



PAA
Annalen

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND XLV.

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND XLV.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT EINUNDACHTZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST ACHT FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1892.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.


-11684-
ASTOR LIBRARY
AUG
11
1892
NEW YORK

Inhalt.

Neue Folge. Band XLV.

Erstes Heft.

Geschlossen am 15. Januar 1892.

Zweites Heft.

Geschlossen am 15. Februar 1892.

Drittes Heft.

Geschlossen am 15. März 1892.

Viertes Heft.

Geschlossen am 1. April 1892.

Nachweis zu den Figurentafeln.

1892. ANNALEN № 1.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLV.

I. *Ueber die electrische Kraft an den Electroden und die Electrisirung des Gases bei der Glimmentladung; von E. Warburg.*

(Hierzu Tafel I Fig. 1.)

§ 1. Electrische Entladung tritt zwischen zwei Metallflächen ungleichen Potentials in einem Gase ein, wenn die Potentialdifferenz der Flächen und damit die electrische Kraft [1]) einen gewissen Werth erreicht hat. Bei Atomsphärendruck jedenfalls, bei welchem nach den Versuchen von H. Hertz [2]) und denen von E. Wiedemann und Ebert [3]) die Entladung durch Bestrahlung der Kathode eingeleitet werden kann, kommt es auf den Werth der electrischen Kraft an der Kathode an. Der Werth dieser Kraft ist für Kugeln an der maassgebenden Stelle von A. Schuster [4]) aus Versuchen von Baille und Paschen berechnet worden.

§ 2. Auch wenn die Glimmentladung in constantem Strom zwischen zwei Metallelectroden übergeht, wird die electrische Kraft an ihnen gewisse Werthe aufweisen. Die Grösse dieser Kraft zu kennen, ist in diesem Falle zunächst von ähnlichem Interesse, wie für den Fall des Einsetzens der Entladung, hat aber hier noch einen weiteren Werth. Es ist besonders von A. Schuster [5]) aus dem Verlauf des Potentials in dem stromdurchflossenen Gase geschlossen worden, dass bei

1) Unter der electrischen Kraft in einem Punkt ist hier stets die mechanische Kraft verstanden, welche auf einen mit der Einheit positiver Electricität geladenen Massenpunkt wirkte, wenn er ohne Beeinflussung des Feldes an jenen Punkt gebracht würde.

2) H. Hertz, Wied. Ann. **31.** p. 983. 1887.

3) E. Wiedemann und H. Ebert, Wied. Ann. **33.** p. 241. 1888.

4) A. Schuster, Phil. Mag. (5) **29.** p. 182. 1890.

5) A. Schuster, Proc. Roy. Soc. **47.** p. 541. 1890.

der Glimmentladung körperliche Electrisirung des Gases eintritt. Ueber den Integralwerth dieser Electrisirung zwischen gewissen Grenzen gibt nun der Werth der electrischen Kraft an den Electroden Aufschluss. In der That möge die Glimmentladung zwischen zwei unendlichen Ebenen übergehen. Legt man (Fig. 1) die z-Axe senkrecht zu diesen Ebenen, so ist die electrische Kraft im Gase hier nach der z-Axe gerichtet und nur von z abhängig; sie werde in üblicher Weise durch Z bezeichnet. Die Ladung e eines geraden cylindrischen Raumtheils, dessen Axe der z-Axe parallel, dessen Basis 1 ist und für dessen Endflächen z die Werthe z_1 und z_2 hat, ist, wenn ϱ die räumliche Dichte der Electricität bedeutet und $z_2 > z_1$

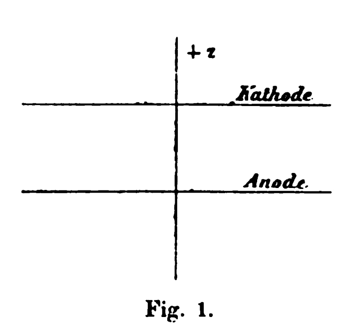


Fig. 1.

(1) $$e = \int_{z_1}^{z_2} \varrho\, dz = \frac{1}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dZ}{dz} dz = \frac{1}{4\pi} (Z_2 - Z_1),$$

wobei alle Grössen in electrostatischem Maass gemessen sind.

Die z-Axe habe die Richtung von der Anode zur Kathode und es entspreche zunächst z_2 der Kathode, z_1 einer Stelle im positiven dunkeln Raum, dem negativen Glimmlicht nahe. Nach meinen früheren Versuchen ändert sich das Potential an einer solchen Stelle sehr langsam, so dass in erster Annäherung Z_1 vernachlässigt werden kann. Für die totale Ladung e_2 im negativen Glimmlicht ergibt sich also pr. Flächeneinheit

(1a) $$e_2 = \frac{1}{4\pi} Z_2.$$

Die Dichtigkeit σ_2 der negativen Ladung der Kathodenfläche

(1b) $$\sigma_2 = -\frac{1}{4\pi} Z_2$$

ist der positiven Ladung e_2 des negativen Glimmlichts entgegengesetzt gleich.

Entspreche zweitens z_2 wieder der Kathode, z_1 aber der Anode, so findet man die totale Ladung des von der Glimmentladung durchströmten Gases per Flächeneinheit

$$(1c) \qquad e' = \frac{1}{4\pi}(Z_2 - Z_1) = -(\sigma_2 + \sigma_1),$$

wo Z_2 und Z_1 die electrischen Kräfte, σ_2 und σ_1 die Flächendichtigkeiten der Ladung von Kathode und Anode bedeuten. Die Versuche zeigen, wie schon hier erwähnt werden möge, dass der absolute Werth der electrischen Kraft, also auch der Flächendichte, an der Kathode grösser als an der Anode ist ($|Z_2| > |Z_1|$, $|\sigma_2| > |\sigma_1|$). Solange die Electricität im Gleichgewicht ist, sind die Ladungen von Kathode und Anode entgegengesetzt gleich. Geht aber die Glimmentladung über, so ist nach dem Obigen (1c) die negative Ladung der Kathode σ_2 dem absoluten Betrage nach grösser, als die positive Ladung der Anode um die positive algebraische Summe derjenigen freien Electricität, welche sich in dem durchströmten Gase vorfindet.

Die experimentelle Bestimmung der electrischen Kraft, welche an den Electroden stattfindet, welche in dem eben behandelten Falle Z genannt wurde und ihrem absoluten Werthe nach electrostatisch gemessen in der Folge $\mathfrak{R}$ heissen soll, ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung.

§ 3. Es ist hier gleich die Frage aufzuwerfen, von welchen Umständen $\mathfrak{R}$ abhängen wird. Nehmen wir die Beschaffenheit des Gases und der Electroden, sowie die Stromdichte als gegeben an, so kann in dem idealen Fall des § 2 $\mathfrak{R}$ nur noch von der Entfernung der Electroden abhängen. Um diese Abhängigkeit zu untersuchen, wollen wir annehmen, die Kathode sei auf dem Potential Null. Die Dichtigkeit der electrischen Ladung und damit die electrische Kraft $\mathfrak{R}$ an der Kathode ist dann dadurch bestimmt, dass jene Ladung zusammen mit den übrigen vorhandenen Mengen freier Electricität im Innern der Kathode das Potential Null erzeugen muss. Jene übrigen Mengen freier Electricität sind in diesem Falle zunächst die Ladung des Gases, das von der Glimmentladung durchflossen wird, welche Ladung selbst wieder zerfällt in 1. die Ladung des negativen Glimmlichtes, 2. die Ladung des positiven Theils des Glimmstroms, 3. kommt in Betracht die Ladung der

Anode. Betrachten wir zunächst 2. und 3., so ist im positiven dunkeln Raum die electrische Kraft klein und jedenfalls nur wenig variabel, die Dichte der freien Electricität kann dort vernachlässigt werden. Nehmen wir weiter an, was sowohl bei meinen älteren Versuchen, als auch den gegenwärtigen der Fall war, dass das positive Licht sich auf eine dünne Lichthaut auf der Anode reducirt, so ist nur in diesem Theil der positiven Bahnstrecke freie Electricität vorhanden und deren Quantität nach dem vorigen Paragraphen der Ladung der Anode nahezu entgegengesetzt gleich. Da endlich das ganze positive Potentialgefälle unter diesen Umständen sehr klein ist gegen das Kathodengefälle, so lässt sich muthmaassen und wird durch die vorliegende Untersuchung experimentell bestätigt, dass an der Anode $\mathfrak{R}$ einen sehr viel kleineren Werth hat, als an der Kathode. Die unter 2. und 3. genannten Ladungen können also zusammen hier als eine electrische Doppelschicht von verhältnissmässig geringer Stärke angesehen werden, deren Wirkung auf die Kathode bei den in den Versuchen vorkommenden Entfernungen vernachlässigt werden darf. Die electrische Kraft $\mathfrak{R}$ an der Kathode ist daher hier merklich nur durch die Ladung des negativen Glimmlichts bestimmt. Und da, constante Beschaffenheit des Gases und der Electroden, sowie constante Stromdichte vorausgesetzt, das negative Glimmlicht sich in Bezug auf Kathodengefälle, Dicke u. s. w. constant verhält, so sind auch constante Werthe von $\mathfrak{R}$ zu erwarten.

Nicht so constante Beschaffenheit zeigt das positive Licht, welches die Anode bedeckt. Aus diesem Grunde betreffen die mitzutheilenden Messungen im Allgemeinen nur die electrische Kraft an der Kathode und sind für die Anode nur gelegentlich Messungen angestellt, welche hinreichen, um die verhältnissmässige Kleinheit von $\mathfrak{R}$ an der Anode zu zeigen.

§ 4. Die electrische Kraft $\mathfrak{R}$ kann in dem idealen Fall des § 2 aus der electrostatischen Anziehung berechnet werden, welche einen Flächentheil s der Electrode gegen die andere hintreibt und welche den Werth

$$F = s \cdot \frac{\mathfrak{R}^2}{8\pi}$$

besitzt, wenn die Dielectricitätsconstante des Gases = 1 ge-

setzt wird. Es könnte daher scheinen, als ob in jenem Fall $\mathfrak{R}$ aus der mechanischen Wirkung abzuleiten wäre, welche auf einen Flächentheil s einer Electrode ausgeübt wird. Man muss aber in Betracht ziehen, dass diese mechanische Wirkung sich aus der gesuchten electrostatischen Anziehung und dem hydrostatischen Druck des Gases zusammensetzt und dass dieser hydrostatische Druck durch die Electrisirung des Gases vergrössert wird. Wenn nämlich in dem Fall des § 2 das Gas bei der Glimmentladung im Gleichgewichte sich befindet, so ist, wenn p den hydrostatischen Druck bedeutet:

$$(2) \qquad o = -\frac{dp}{dz} + \varrho Z = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{4\pi} Z . \frac{dZ}{dz},$$

woraus, wenn C eine Constante ist

$$(3) \qquad C = -p + \frac{Z^2}{8\pi} = -p + \frac{\mathfrak{R}^2}{8\pi}.$$

Bezieht man diese Gleichung auf eine Electrode, so steht rechterhand die mechanische Wirkung, welche auf die Flächeneinheit derselben ausgeübt wird und welche mithin für beide Electroden denselben Werth hat, wie verschieden auch die electrische Kraft $\mathfrak{R}$ an den beiden Electroden sein mag. In der That wächst der hydrostatische Druck, welcher dem electrischen Zuge entgegenwirkt, von einer Electrode zur andern um denselben Werth wie jener Zug.

Die Constante C in der Gleichung (3) kann man bestimmen, wenn man sich das Gas zwischen den Electroden von dem äusseren Gase abgeschlossen denkt. Sind dann p_0 und D_0 Druck und Dichte des Gases vor der Electrisirung, und ist b der Abstand der Electroden, so hat man, da unter den gemachten Voraussetzung die Menge des Gases zwischen den Electroden constant bleibt, wenn D die Dichte des Gases bedeutet und 1 und 2 sich auf Anode und Kathode beziehen:

$$\int_{z_1}^{z_2} D\, dz = b . D_0,$$

oder nach dem Mariotte'schen Gesetz

$$\int_{z_1}^{z_2} p\, dz = b\, p_0.$$

Setzt man hier für p seinen Werth aus Formel (3), s ergibt sich:

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\Re^2}{8\pi} - C\right) dz = b \cdot p_0,$$

woraus

$$C = \frac{\overline{\Re^2}}{8\pi} - p_0,$$

wo $\overline{\Re^2} = \int_{z_1}^{z_2} \Re^2 \, dz$ den Mittelwerth von $\Re^2$ zwischen den Elec troden vorstellt. Man hat daher

$$p = p_0 + \frac{1}{8\pi}(\Re^2 - \overline{\Re^2}). \tag{3a}$$

§ 5. Aus den Erörterungen des vorigen Paragraphen geh hervor, dass wenn die mechanische Wirkung auf eine Elec trodenfläche sich auf den electrostatischen Zug reduciren soll dafür zu sorgen ist, dass hydrostatische Druckwirkungen nich in merklichem Betrage stattfinden. Diess wird bis zu einen gewissen Grade durch Anwendung begrenzter Electroden er reicht. Denkt man sich zwei nicht zu grosse, etwa kreis förmige Electroden einander gegenübergestellt, so werden sic vermöge der aus der Electrisirung nach dem vorigen Para graph entspringenden Druckdifferenzen Strömungen in der Gase bilden und durch diese die Druckdifferenzen bis zu einer gewissen Grade ausgeglichen werden.

§ 6. Einige allgemeine Schlüsse über die Strömungen welche sich in einem electrisirten Gase bilden, ergeben sic aus den Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen, vo denen die erste für unsern Fall unter Vernachlässigung de Schwerkraft lautet

$$D \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{dp}{dx} + \varrho X,$$

wo D die Gasdichte, X die x-Componente der electrische Kraft, ϱ die electrische Raumdichte bedeutet und sonst di übliche Bezeichnungsweise gebraucht ist.

Aus dieser und den entsprechenden Gleichungen für di beiden anderen Coordinaten folgt zunächst, dass wenn Gleich gewicht möglich sein soll

$$dp = \varrho(X dx + Y dy + Z dz),$$

also die Grösse rechterhand, welche auch, unter V die electrische Potentialfunction verstanden, $-\varrho \,.\, dV$ geschrieben werden kann, vollständiges Differential einer Function der Coordinaten sein muss. Dies bringt mit sich, dass die Flächen gleichen Potentials und gleicher electrischer Raumdichte zusammenfallen müssen, was in dem idealen Fall des § 2 zwar zutrifft, im Allgemeinen aber nicht, z. B. nicht in dem Fall des § 5, in welchem also kein Gleichgewicht möglich ist und Strömungen eintreten müssen. Da nun im letzteren Fall die Grösse $\varrho(Xdx + Ydy + Zdz)$ kein vollständiges Differential ist, so folgt weiter, dass ein Geschwindigkeitspotential nicht besteht und also in einem electrisirten Gase im Allgemeinen Wirbelströme entstehen müssen.

Die stationären Strömungen, welche sich in dem Fall des § 5 bilden, werden ähnlicher Art sein, wie in dem Fall, dass das Gas, welches in dem Kreiscylinder zwischen den Electroden enthalten ist, einer Kraft, wie der Schwerkraft, unterläge, diese von der Anode gegen die Kathode hinwirkte, das umliegende Gas aber der Schwere entzogen wäre. Das Gas wird an der Kathode, wo der hydrostatische Druck am grössten ist, radial nach Aussen, zwischen den Electroden von der Anode zur Kathode strömen. Bis zu welchem Grade durch diese Strömungen die Druckdifferenzen gegen das umgebende Gas sich ausgleichen, lässt sich schon deshalb theoretisch nicht finden, weil die Electrisirung des Gases nicht bekannt ist. Man muss daher hier den Versuch zu Rathe ziehen.

§ 7. Das Experiment, auf welches diese Ueberlegungen hinführen, würde also darin bestehen, dass zwischen zwei ebenen, horizontalen, kreisförmigen, einander gegenüberstehenden Electroden die Glimmentladung eingeleitet und die Anziehung oder scheinbare Gewichtszunahme bestimmt wird, welche eine der Electroden dabei erfährt. Die letztere, gewöhnlich die Kathode, war bei meinen Versuchen an dem einen Arm einer Wage aufgehängt, die andere Electrode, gewöhnlich die Anode, befand sich ausserhalb jener. Aus der hervorgebrachten Ablenkung des Balkens, sowie der Empfindlichkeit der Wage wurde die scheinbare Gewichtszunahme F direct in Grammgewicht erhalten. Soll aber in diesem Fall die gesuchte electrische Kraft $\mathfrak{R}$ an der Elec-

trode zu F, sowie in dem idealen Fall des § 2, in der Beziehung

$$\frac{\mathfrak{K}^2}{8\pi} = \frac{F}{S}$$

stehen, so müssen — hydrostatische Druckwirkungen ausgeschlossen gedacht — zwei weitere Bedingungen erfüllt sein. Erstens müssen alle Kraftlinien von der obern Seite der an der Wage aufgehängten Electrode abgehalten werden und zweitens müssen die Kraftlinien, welche von der untern Fläche dieser Electrode ausgehen, senkrecht zu ihr verlaufen.

§ 8. Hängt man die kreisförmige Kathode frei auf, so ist die erste Bedingung auch dann nicht erfüllt, wenn das negative Glimmlicht nur auf der untern, der Anode zugekehrten Fläche erscheint. Brachte ich nämlich in diesem Falle eine Sonde oberhalb der Kathode in 6 mm Abstand von dieser an, und maass nach der Methode, die ich früher beschrieben habe [1]), am Electrometer die Potentialdifferenz zwischen der Sonde und der Kathode, so nahm sofort nach Einsetzen der Glimmentladung das Electrometer eine feste Einstellung an und zeigte z. B. in einem Versuch eine Potentialdifferenz von 238 Volts zwischen der Sonde und der Kathode an. Es geht daraus hervor, dass das Gas oberhalb der Kathode leitend wird und dass eine erhebliche electrostatische Kraft auf die obere Fläche der Electrode wirkt.

Um nun die Kraftlinien von der oberen Seite der aufgehängten Electrode abzuhalten, brachte ich oberhalb derselben in etwa 6 mm Abstand eine mit ihr leitend verbundene Metallplatte („Schutzplatte") an, deren Durchmesser gleich dem der Electrode war. (Fig. 2.) Letztere sass an einem Stil, welcher durch ein Loch in der Schutzplatte frei hindurchging. Die Sonde wurde jetzt zwischen der oberen Electrodenfläche und der Schutzplatte angebracht. Als die Glimmentladung einsetzte, trat ein sehr geringer Ausschlag der Electrometernadel ein, worauf dieselbe sich langsam vorwärts bewegte. Der

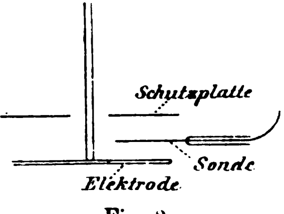


Fig. 2.

1) E. Warburg, Wied. Ann. **31.** p. 549. 1887.

Wagebalken indessen, an welchem die Kathode aufgehängt war, schwang sofort nach Einsetzen der Glimmentladung um die Gleichgewichtslage, welche er definitiv während der Dauer der Glimmentladung annahm. Daraus folgt, dass in diesem Fall keine zu berücksichtigende Zahl von Kraftlinien von der obern Seite der Kathode ausging. Uebrigens wurde die Erreichung des Zwecks ausserdem durch einen aufwärts gekehrten 5 mm hohen cylindrischen Fortsatz gesichert, welcher um den Rand der Electrode gelegt und zur Vermeidung von Zerstäubung aus Aluminium gemacht war. (Taf. 1 Fig. 1.)

§ 9. Um weiter die von der unteren Electrodenfläche ausgehenden Kraftlinien möglichst in die gewünschte Richtung senkrecht zur Electrodenfläche zu drängen, versah ich die Schutzplatte mit einem cylindrischen Fortsatz nach unten, so dass die Electrode in einer Büchse (Taf. 1 Fig. 1) von ihrem eigenen Potential, einer Schutzbüchse, schwebte. Da jetzt keine Kraftlinien von der Electrode zur Büchsenwand gehen konnten, so wurden jene der gewünschten Richtung genähert.

Wenn man aber auf den Fall, zu dem wir jetzt gelangt sind, die Betrachtungen des § 3 anwendet, so sieht man, dass nunmehr die positive Gasladung auf der Innenfläche der Büchse negative Influenzelectricität hervorruft, welche den Werth der Kraft $\mathfrak{R}$ an der Electrode beeinflussen bezw. herabsetzen wird. Sollen also die Versuchsergebnisse allgemeine Gültigkeit haben, d. h. nur von der Stromdichte, sowie von der Beschaffenheit der Electroden und des Gases abhängig sein, so muss man der Büchse eine hinreichende, durch den Versuch zu ermittelnde Weite geben der Art, dass die Wirkung jener Influenzelectricität vernachlässigt werden kann.

§ 10. Ich gehe nun dazu über, die Versuchsanordnung zu beschreiben. Die benutzte Wage, von dem hiesigen Mechaniker H. Elbs verfertigt, ist Taf. 1 Fig. 1 in $^{17}/_{30}$ nat. Gr. nach einer Photographie gezeichnet, die Abmessungen ergeben sich aus dem mitphotographirten verticalen Millimetermaasstab, welcher bei den Versuchen nicht vorhanden war. Das Balkengewicht ist 30,5 g, das eines Gehänges 4,14 g. Die an dem einen Arm aufgehängte Versuchselectrode K ist durch das Gegengewicht G am andern Arm äquilibrirt. Die Bewegungen des Balkens werden mittelst des Spiegels m durch Scala und Fernrohr

beobachtet. Die Empfindlichkeit war gewöhnlich so regulirt, dass bei einer Entfernung von 1,8 m zwischen Spiegel und Scala 10 Doppelmillimeter der letztern 1 mgr entsprachen; dabei betrug die ganze Schwingungsdauer mit einer Balkenbelastung von 7,76 g auf jeder Seite (das Gehänge einbegriffen) 5",3. Die Büchse B aus Aluminium wird mittelst eines Fortsatzes in dem Spalt eines mit der Wage verbundenen Metalltheils M gehalten; bei den Versuchen steht sie nicht so wie in der Figur, sondern ist über die Electrode K geschoben, sodass deren unterer Rand von dem Büchsenrand 5—7 mm absteht. Wage, Büchse und Electrode sind sämmtlich metallisch verbunden.

Die Wage, deren Fuss auf einen Luftpumpenteller aufgekittet war, befand sich bei den Versuchen unter einer Glocke, welche in der Figur im vertikalen Durchschnitt gezeichnet ist. Dieselbe enthält 5 Tubulaturen T_1—T_5. In T_1 ist ein Glasrohr C_1 eingeschliffen, durch dessen Drehung die Arretirung der Wage im Vacuum bewirkt wird. An C_1 ist nämlich ein kurzes Metallrohr u mit vierkantiger Bohrung eingekittet, die über den vierkantigen Metalltheil v passt; die mit der Drehung von C_1 verbundene Drehung von v arretirt die Wage. v liegt in einer Gabel, die sich nach unten in einen in der verticalen Hülse L drehbaren Theil fortsetzt; die Wirkung von v auf die Wage wird durch die drei Hooke'schen Schlüssel H vermittelt. Hierdurch erhält die Arretirungsvorrichtung die nöthige Biegsamkeit, sodass während u in v eingreift, die Glocke um einen erheblichen Winkel gedreht werden kann. In das Glasrohr C_1 ist ausserdem ein mit v metallisch verbundener Platindraht p eingeschmolzen, welcher die electrische Zuleitung zur Wage, Büchse und Electrode vermittelt.

In T_2 ist das Rohr C_2 eingeschliffen, in dieses mittelst Siegellacks ein dicker Kupferdraht k luftdicht eingekittet und dessen in die Glocke frei hineinragendes Ende platt geschlagen und mit einem Loch versehen, durch welches der Stil der zweiten kreisförmigen Electrode A gesteckt wurde.

Die dritte Tubulatur T_3 ist in der Figur nicht sichtbar, sie befindet sich vorn an der Glocke und ist durch ein Glasrohr verschlossen, das den Sondendraht zur Bestimmung des Kathodengefälles durchlässt. Dasselbe ragt in den von der

Glimmentladung durchsetzten Raum frei hinein, ist dann in ein Glasrohr E eingeschmolzen und tritt durch T_3 ins Freie (die Fortsetzung des Sondendrahts über E hinaus ist in der Figur fortgelassen). Es erwies sich als vortheilhaft, anstatt eines in den Strom tauchenden Drahtes ein netzartiges Geflecht aus mehreren feinen Platindrähten anzuwenden [1]).

T_4 ist durch das Planglas P verschlossen, das Durchsicht zum Spiegel gewährt, T_5, oben an der Glocke, führt mittelst Glasschliffs zur Töpler-Hagen'schen Pumpe und zu dem Röhrensystem, mittelst dessen die Füllung des Gasraumes mit Stickstoff oder Wasserstoff bewirkt wurde. Die Bereitung der Gase geschah wie in meiner älteren Arbeit l. c., Hg-Dampf wurde nicht abgehalten. Alle Versuche wurden mit constantem Strom gemacht und dieser durch einen 600gliedrigen Accumulator geliefert.

§ 11. Bei der einfachsten Construction der Wage wird, wenn die Glimmentladung übergeht, nur der *eine* Balkenarm vom Strome durchflossen und dadurch erwärmt und verlängert. Ist $\alpha = 19 . 10^{-6}$ der lineare Ausdehnungscoefficient des Messings, $P = 8$ g das angehängte Gewicht, so ist die Temperaturerhöhung 1^0 einer Vermehrung des Gewichts um $\alpha P = 152 . 10^{-6}$ g bezüglich der Einstellung der Wage gleichwerthig. Die Temperaturerhöhung Θ von p g Substanz, deren specifische Wärme c ist, durch die Wärme eines t Secunden dauernden Stromes $= i$ Amp., beträgt

$$\Theta = \frac{W . t}{p . c} \qquad W = i^2 w . 0{,}24 \text{ gr. cal.},$$

wo w der Widerstand des stromdurchflossenen Theils ist. Der Balken besteht im Wesentlichen aus zwei Messingstäben 3 mm dick, 4 mm breit, 40 mm lang. Für den grössten vor-

1) Durch besondere Versuche habe ich mich überzeugt, dass die Anwesenheit der Sonde auf das Resultat ohne Einfluss ist, d. h. dass man unter gleichen Umständen dieselben Werthe des electrischen Zuges an der Electrode findet, mag die Sonde vorhanden sein oder nicht. Es ist dies auch nicht anders zu erwarten, da die Sonde das Potential des stromdurchflossenen Gases annimmt, in das sie eintaucht. Dagegen ist zu beachten, dass wenn die Nullstellung der Wage genommen wird, Sonde, Kathode und Anode leitend verbunden, also auf demselben Potential sein müssen.

kommenden Strom von 0,004 A. ergiebt sich für einen der Stäbe $i = 0{,}002$ A., $W = 0{,}023 \,.\, 10^{-8}$ und mit $p = 4$ g, $c = 0{,}1$, $\Theta = 0{,}056 \,.\, 10^{-6}$ Grad C. Hiernach ist die Wirkung der Erwärmung des Balkens durch den ihn durchfliessenden Strom unmerklich. Uebrigens ist der Balken durch eingesetzte Achatstücke so construirt, dass der Strom beide Arme ziemlich gleichmässig durchlaufen muss.

§ 12. Von grösserer Bedeutung kann der Fehler werden, welcher durch die Wärmeproduction im negativen Glimmlicht entsteht. Einem Kathodengefälle von 300 Volt entspricht bei einer Stromstärke von 0,001 A. eine Leistung von 0,3 Watts oder 0,24 × 0,3 gr. cal. p. Sec., oder 4,2 gr. cal. per Minute, eine Wärmemenge, die dem einen Doppelarm der Wage zugeführt, dessen Temperatur um $\frac{4{,}2}{0{,}8} = 5^0{,}3$ erhöhen würde, diess wäre unter der Annahme des § 11 einer Mehrbelastung von $798 \,.\, 10^{-6}$ g gleichwerthig.

Die besprochene Wirkung machte sich in der zu erwartenden Weise in der That sehr geltend, wenn man der Wage eine Empfindlichkeit ertheilte, etwa 10 mal so gross, als die bei den maassgebenden Versuchen benutzte. Es ist indessen nicht nöthig hierauf einzugehen, weil bei den maassgebenden Versuchen wegen der hier stattfindenden kleineren Empfindlichkeit der Wage, die erwähnte Fehlerquelle hinreichend zurücktrat. In der That wurden hier bei abwechselndem Schliessen und Oeffnen des Stromes nahezu dieselben Einstellungen der Wage erhalten. Z. B. bei einem Kathodengefälle von 286 Volt und dem Strom 0,003 A. die Einstellungen

bei geöffnetem	Strom	84,3	84,0	85,3
,, geschlossenem	,,		64,8	64,6.

Die Ablenkung ist im Mittel 19,7 Scalentheile. Der Strom wurde dabei stets nur solange geschlossen, als zur Beobachtung der drei Umkehrpunkte nöthig war, aus denen die Einstellung sich ergab.

§ 13. Zur Anwendung kamen blank polirte Electroden aus Platin und Aluminium von gewöhnlich 2 cm Durchmesser mit einem 0,5 cm hohen Rand aus Aluminiumblech versehen. Die Büchse aus Aluminium war gewöhnlich 24 mm lichtweit und 15 mm hoch; sie war leicht paraffinirt um zu verhüten,

dass ein Theil des negativen Glimmlichts an ihr spielte. Geschah dies dennoch gelegentlich, so trat eine Verunreinigung der Electrode nicht ein, da die Büchse aus dem unter den Versuchsbedingungen nicht zerstäubenden Aluminium bestand.

Bei der gewählten Weite der Büchse hatte auf die beobachtete mechanische Wirkung die Stellung der 2 cm im Durchmesser haltenden Electrode in der Büchse keinen Einfluss, während ein solcher Einfluss bei einer nur 22 mm weiten Büchse hervortrat. Ich schiebe dies darauf, das bei der engeren Büchse der in §§ 3 und 9 erörterte Einfluss der auf der Büchse hervorgerufenen Influenzelectricität sich geltend macht. Zur näheren Begründung des Gesagten setze ich einige Versuchsresultate hierher. Der Druck ist immer in Millimetern Quecksilber angegeben, i ist die Stromstärke in Mikroampères, F die beobachtete Anziehung in Milliontel Gramm, F_1 die auf 1 Milliampère reducirte Anziehung, indem F sich mit i proportional ergeben hat (§ 15). Die Versuche beziehen sich auf *trockene* Luft; es befand sich nämlich unter der Glocke ein mit Phosphorsäureanhydrid gefülltes Uhrglas.

Tabelle I.

Luft trocken.

	Druck	i	F	F_1
Büchse 22 × 15 Platte a. unt. Rand	1,09	665	1296	1949
„ 22 × 15 „ 7 mm eintauchend	1,20	730	800	1096
„ 24 × 15 „ a. unt. Rand	0,85	740	1230	1662
„ 24 × 15 „ 7 mm eintauchend	0,84	730	1270	1740

Natürlich musste vor jedem der vier mitgetheilten Versuche der Apparat auseinandergenommen werden, was die Vergleichbarkeit der Resultate etwas beeinträchtigte. Man sieht, dass bei der 22 mm weiten Büchse F_1 erheblich kleiner ausfällt, wenn die Electrode sich in der Mitte der Büchse befindet, als wenn sie dem untern Rande nahe ist, dass hingegen bei der 24 mm weiten Büchse dieses Verhalten sich nicht zeigt. Ich theile hiernach zwei Versuche mit, aus welchen die Wirkung der Büchse hervorgeht.

Tabelle II.

Luft trocken.

	Druck	i	F	F_1
Ohne Büchse	0,96	800	537	671
Mit Büchse 24 × 15	0,89	800	1200	1500

F_1 findet sich mit Büchse über doppelt so gross, als ohne Büchse.

§ 15. Es folgen nunmehr Tabellen, welche die hauptsächlichsten Versuchsresultate enthalten; die Schutzbüchse war 24 mm lichtweit.

Nr. bedeutet die Journalnummer des Versuchs. Wo zwei Nummern angegeben wurden, sind die angegebenen Werthe die Mittel aus zwei Versuchen, deren Reihenfolge aus den Nummern ersichtlich ist.

Weiter bedeutet:

i den Strom in Mikroampères,

$\varDelta$ die Anziehung in Scalentheilen,

F die Anziehung in Milliontel Grammgewicht,

R die electrische Kraft an der Versuchselectrode in Volt auf das Centimeter,

e das Kathodengefälle in Volts,

F_1 die Anziehung pro Milliampère,

R_1 die electrische Kraft für die Stromdichte von 1 Milliampère aufs Quadratcentimeter,

σ_1 die Flächendichte der Electricität auf der Electrode in Coulombs aufs Quadratcentimeter für die Stromdichte auf welche R_1 sich bezieht.

Bei allen Versuchen der hier folgenden Tabellen war die Versuchselectrode die Kathode. Sie wurde, wie schon erwähnt, vor den Versuchen stets blank polirt und nur solche Versuche berücksichtigt, nach deren Beendigung die Kathode keine oder sehr geringe Anlauffarben zeigte. Durch das Auftreten der letzteren wird die Bildung von Oxydschichten angezeigt, welche, wenn sie dicker werden, erheblich vergrösserte Werthe der Anziehung F liefern. Der zur Bildung des Oxyds benöthigte Sauerstoff stammt wahrscheinlich zum grössten Theil aus den Electroden selbst; das Freiwerden occludirter Gases, durch Druckmessung an der Töpler'schen Pumpe

beurtheilt, war oft sehr erheblich und störend. In der That enthält an der Luft aufbewahrtes Platin nach A. **Berliner**[1]) das 80fache seines Volums an Gas occludirt.

Tabelle III.

Platin, Stickstoff schwach feucht.

Nr.	Druck	i	Δ	Δ ber.	$F.10^6$	R	e	$F_1.10^6$	R_1	$\sigma_1.10^{-10}$
114	2,18	3660	28,8		2880	1430	261÷	790	1330	1,17
115. 119	0,93	2730	19,5		1950	1175	340			
116		1980	12,9	14,2	1290	957	320			
117. 120		1410	8,6	10,1	860	782	290			
118		750	4,2	5,4	420	546	258			
125. 131	0,91 fr. Füll.	2000	12,25		1225	931	285	604	1160	1,03
126. 130		1400	8,33	8,57	833	769	265			
127. 129		770	4,56	4,72	456	569	241			
128		500	2,78	3,06	278	444	231÷			
140	1,43 fr. Füll.	2990	19,68		1968	1180	286			
139. 141		1410	9,30	9,29	930	813	257	661	1210	1,07
142		1000	6,79	6,59	679	694	250			
144	0,84	1415	7,77		777	742	307	550	1100	0,98
143. 145		1000	5,50	5,50	550	624	289			

Tabelle IV.

Platin, Stickstoff trocken.

Nr.	Druck	i	Δ	Δ ber.	$F.10^6$	R	$F_1.10^6$	R_1	$\sigma_1.10^{-10}$
12	1,57	1970	27,1	25,5	4910	1860	2390	2300	2,04
13		2570	33,1		6000	2060			
14	1,06	2410	26,4		4790	1840			
15		1160	14,0	12,7	2530	1340	2050	2130	1,89
16		615	7,6	6,8	1380	987			
17	0,65	510	4,4	3,5	800	750			
18		1000	8,3	6,9	1500	1030	1340	1730	1,53
19		1760	12,2		2210	1250			

Tabelle V.

Platin, Wasserstoff.

Nr.	Druck	i	Δ	Δ ber.	$F.10^6$	R	e	$F_1.10^6$	R_1	$\sigma_1.10^{-10}$
147	3,05	2210	7,84		784	745	265÷	350	881	0,780
150	1,94	2000	4,4		440	558	305			
149		930	2,48	2,18	248	420	283	228	711	0,630
148		500	1,23	1,10	123	295	267÷			

1) A. **Berliner**, Wied. Ann. **35.** 807. 1888.

Nr.	Druck	i	Δ	Δ ber.	$F.10^6$	R	e	$F_1.10^6$	R_1	$\sigma_1.10^{-10}$
152	3,4 fr. Füll.	3630	10,74		1074	873	255	300	817	0,723
153. 155	2,21	2000	5,35		535	615	289	272	778	0,689
154		1000	2,91	2,68	291	454	276			
156	2,83 fr. Füll.	1530	4,7	4,46	470	577	267†	299	815	0,721
157		2000	5,83		583	643	276			
159	1,92	1000	2,48		248	420	282	258	757	0,670
160. 161		540	1,58	1,33	158	335	270†			
162	1,16	270	1,05		105	267	269†	389	929	0,822
164	5,06 fr. Füll.	4930	17,28		1728	1110	273†	350	881	0,780

Tabelle VI.

Aluminium, Stickstoff schwach feucht.

Nr.	Druck	i	Δ	Δ ber.	$F.10^6$	R	e	$F_1.10^6$	R_1	$\sigma_1.10^{-10}$
78	1,44	1240	11,2	10,3	1080	879	208			
79		980	8,4	8,2	811	762	200	826	1360	1,20
80		2080	17,4		1685	1100	211			
84	0,65	200	1,65	1,69	160	338	243	785	1320	1,17
85. 85a		560	4,53		438	560	252			
86	1,44 fr. Füll.	3430	26,4		2550	1350	219	736	1280	1,13
87		1510	10,8	11,6	1040	863	195			
88	1,01	1520	11,4	9,8	1100	887	217			
89		690	5,2	4,4	502	600	201	641	1190	1,06
90		3540	22,7		2195	1250	247			
91	0,62	1520	9,1		879	793	262	581	1130	1,01
92		690	4,2	4,2	401	536	234			

Tabelle VII.

Aluminium, Wasserstoff.

Nr.	Druck	i	Δ	Δ ber.	$F.10^6$	R	e	$F_1.10^6$	R_1	$\sigma_1.10^{-10}$
93	3,3	3540	8,4		850	780	178	231	716	0,634
94		1490	4,2	3,5	425	551	170			
95	2,61	3570	7,95		804	759	223	232	718	0,635
96		1525	4,15	3,4	420	548	197			
97	1,39	1560	4,1		415	545	226	266	769	0,681
98	3,3 fr. Füll.	3500	7,6		769	742	174	217	695	0,615
99		1975	4,15	4,3	420	548	171			
100	2,05	2000	4,5	4,26	455	570	191			
101		3550	7,55		764	740	220	222	702	0,621
102		1510	3,75	3,22	379	521	197			
103	1,24	660	2,00		202	380	258	300	817	0,723
104		465	1,34	1,41	136	312	244			
105	2,61 fr. Füll.	3050	6,35		643	678	215	210	682	0,604

§ 15. Es ist schon im § 13 erwähnt worden, dass die Anziehung Δ bezw. F bei gleicher Beschaffenheit der Electrode und des Gases der Stromdichte proportional gefunden wird. Inwieweit diese Beziehung zutrifft, ergiebt die Vergleichung der Columnen Δ beob. und Δ ber., wobei auch die Tab. VIII und IX zu berücksichtigen sind. Die Stromstärken wurden variirt bis zum Verhältniss 1 : 4, grössere Stromdichten anzuwenden war nicht möglich, da bei solchen das Glimmlicht von der Versuchselectrode auf andere Theile der mit der Electrode leitend verbundenen Metalloberflächen übertrat. Die Abweichungen zwischen den beobachteten und nach der Proportionalität mit i berechneten Werthen Δ sind zwar zuweilen procentisch ziemlich gross, finden aber bald in dem einen, bald in dem anderen Sinne statt und es lassen sich, worauf hier nicht eingegangen werden soll, Ursachen der Unregelmässigkeiten angeben.

Unter Annahme des ausgesprochenen Gesetzes wurde aus den auf einerlei Druck bezüglichen Versuchen F_1 nach der Formel

$$F_1 = \frac{\Sigma i F}{\Sigma i^2}$$

berechnet.

Es ist nun ersichtlich, dass jenes Gesetz es erlaubt, die Versuchsergebnisse in sehr einfacher Weise zusammenzufassen. Der Werth F_1, d. i. die Anziehung per Milliampère, ist nämlich nach jener Regel unabhängig von der Oberflächengrösse der Electrode, da wenn die Oberfläche auf ihr $n$faches wächst, zwar die Stromdichte und damit der Zug per Flächeneinheit auf $\frac{1}{n}$ verringert, gleichzeitig aber die Fläche, auf welche der Zug ausgeübt wird, ver-n-facht wird. Natürlich ist dabei die Stromdichte so gross vorausgesetzt, dass die ganze Oberfläche der Electrode vom negativen Glimmlicht bedeckt ist, was bei sämmtlichen mitgetheilten Versuchen zutraf. So würde z. B. nach den Versuchen 115, 119 — 128 Tab. III in schwach feuchtem Stickstoff vom 0,9 mm Druck die Anziehung einer ebenen blanken Platinkathode bei normalem Verlauf der Kraftlinien 604 Milligrammgewicht pro Ampère betragen.

Da dieses Resultat aus einem Gesetz abgeleitet ist, welches nicht mit der im Allgemeinen zu fordernden Genauigkeit durch

die Versuche belegt wird, und da auch die Erörterungen der §§ 4, 6, 9 mancherlei Bedenken aufkommen lassen, so habe ich, um mich vor grobem Irrthum zu schützen, für schwach feuchten Stickstoff den Werth F_1 unter veränderten geometrischen Verhältnissen von Electrode und Schutzbüchse bestimmt. Nämlich erstens für eine Electrode von wiederum 20 mm Durchmesser, welche aber in einer Büchse von 28 mm Lichtweite und 15 mm Höhe schwebte; zweitens für eine Electrode von 30 mm Durchmesser in einer Büchse von 34 mm Lichtweite und 15 mm Höhe. Die folgenden Tabellen enthalten die Ergebnisse.

Tabelle VIII.

Platin, Stickstoff schwach feucht.
Electrode 20 mm Durchmesser
Büchse 28 mm lichtweit, 15 mm hoch.

Nr.	Druck	i	Δ	Δ ber.	$F.10^6$	R	e	$F_1.10^6$	R_1	$\sigma_1.10^{-10}$
235. 238	1,17	1090	6,35		690	703	247	615	1170	1,04
236		620	3,2	3,6	348	499	224			
241. 243	1,08	1080	6,8		740	728	261	681	1230	1,09
240. 244		570	3,5	3,6	380	521	236			

Tabelle IX.

Platin, Stickstoff schwach feucht.
Electrode 30 mm Durchmesser
Büchse 34 mm lichtweit, 15 mm hoch.

Nr.	Druck	i	Δ	Δ ber.	$F.10^6$	R	e	$F_1.10^6$	R_1	$\sigma_1.10^{-10}$
221. 223	1,22	3730	18,3		2030	800	277	661	1210	1,07
222		1670	8,4	8,2	929	541	252			
224. 226	0,96	3310	16,0		1770	746	295	536	1090	0,97
225		1110	5,4	5,4	597	433	250[1]			

Vergleicht man die Tabellen III, VIII und IX, so sieht man, dass Werthe von F_1, welche gleich sein sollten, zwischen 536 und 681 schwanken. Mehr kann aber hier nicht erwartet werden, da schon die Zahlen der Tabelle IX für sich derartige Abweichungen zeigen, welche in dem letzten Fall ohne Zweifel mit der veränderlichen uncontrollirbaren Beschaffenheit der Electrodenoberfläche zusammenhängen.

Man muss auch in Betracht ziehen, dass die Anziehung

F_1 dem *Quadrat* der electrischen Flächendichte auf der Electrode proportional ist. Die Werthe der Flächendichte selbst, welche gleich sein sollten, betragen in den drei Tabellen 1,00; 1,04, 1,09; 1,07, 0,97, die grösste vorkommende Abweichung beträgt 12 Proc. des ganzen Werthes. Da hierbei die Electrodenfläche im Verhältniss von 4 : 9 variirt wurde, so glaube ich, dass hydrostatische Druckwirkungen einigermaassen eliminirt sind.

§ 16. Die in den Tabellen vorkommenden Grössen R, R_1, σ_1 (§ 14) ergeben sich folgendermaassen. Sei s der Flächeninhalt der unteren Electrodenseite, von welcher die Glimmentladung ausgeht, $\mathfrak{R}$ wie früher die electrische Kraft electrostatisch, R' dieselbe electromagnetisch gemessen, $v = 30 \,.\, 10^9$ Cent. die Lichtgeschwindigkeit, g die Beschleunigung der Schwere, so ist:

$$\frac{F.g}{s} = \frac{\mathfrak{R}^2}{8\pi} \qquad \mathfrak{R} = \frac{R'}{v} \qquad R = \frac{R'}{10^8}, \text{ woraus}$$

(4) $$R = 300 \,.\, \sqrt{\frac{8\pi g.F}{s}}.$$

Da weiter $F = i \,.\, F_1$

(5) $$\begin{cases} R = 300 \,.\, \sqrt{8\pi g F_1} \,.\, \sqrt{\frac{i}{s}} = R_1 \,.\, \sqrt{\frac{i}{s}} \\ R_1 = 300 \,.\, \sqrt{8\pi g F_1}. \end{cases}$$

Endlich hat man für die Dichtigkeit σ der Ladung auf der Electrode:

$$\sigma_{e.s} = \frac{\mathfrak{R}}{4\pi} \quad \sigma_{e.m} = \frac{\sigma_{e.s}}{v} \quad \sigma = \sigma_{e.m} \,.\, 10 \frac{\text{Coul.}}{\square\,\text{cm}}, \text{ daher}$$

(6) $$\sigma = \frac{R}{4\pi} \cdot \frac{1}{9.10^{11}} \cdot \frac{\text{Coul.}}{\square\,\text{cm}}.$$

Nach diesen Formeln sind die betreffenden Werthe der Tabellen berechnet. In Folge des Gesetzes, welches in § 15 dargelegt wurde, ist also die electrische Kraft, sowie die electrische Flächendichte an der Kathode, daher auch nach § 2 die positive Ladung des negativen Glimmlichts der Quadratwurzel aus der Stromdichte proportional.

§ 17. Mit der Stromdichte wächst, wie Hittorf[1]) ge-

1) W. Hittorf, Wied. Ann. **21.** 124. 1884.

zeigt hat und wie ein Blick auf die Tabellen III bis VII lehrt, auch das Kathodengelälle; eine einfache Beziehung zwischen diesen beiden Grössen scheint aber, wie schon Hittorf l. c. hervorhebt, nicht zu bestehen. Die electrische Kraft an der Kathode folgt hier einfacherem Gesetz, als das Kathodengefälle.

§ 18. Wir wollen nun die auf den Stickstoff bezüglichen Versuche etwas näher ins Auge fassen. Constante Werthe des Kathodengefälles erhält man in trockenem Stickstoff nur, wenn derselbe völlig sauerstofffrei ist, was ich durch nascirenden Natriumdampf erziehlt habe.[1] Dieses Mittel war hier nicht anwendbar. Der angewandte Stickstoff, mittelst Phosphors aus atmosphärischer Luft bereitet und von CO_2 befreit, war also sauerstoffhaltig. In solchem fand ich früher, wenn er trocken war, an drahtförmigen Platinkathoden das Kathodengefälle durch längere Wirkung des Stroms bis zu 400 Volts wachsend; kleinere und constante Werthe des Kathodengefälles erhielt ich für schwach feuchten Stickstoff, nämlich 260 Volts bei drahtförmigen Platinkathoden. Wird daher ein Glasapparat mit trockenem Stickstoff gefüllt und alsdann von Trockenmitteln abgesperrt, so nimmt das Kathodengefälle mit der Zeit ab, indem durch das von den Glaswänden abdampfende Wasser das Gas mehr und mehr durchfeuchtet wird.[2]

In noch höherem Maasse als beim Kathodengefälle zeigt sich nun der Einfluss der Feuchtigkeit bei der electrischen Anziehung, bezw. der electrischen Kraft R. Bei den Versuchen der Tabelle III war die Glocke nach der Füllung mit Stickstoff von Trockenmitteln abgesperrt und abgewartet worden, bis in Folge des abdampfenden Wassers das Kathodengefälle constant geworden war. Zugleich mit dem Kathodengefälle nahm dabei die electrische Anziehung F ab, wie die folgende Tabelle zeigt.

---

1) E. Warburg, Wied. Ann. **40.** p. 1. 1890.
2) E. Warburg, Wied. Ann. **31.** p. 557 ff. 1887.

Tabelle X.

Nr.	Zeit	e	Δ	i
122	11 Uhr	316	18,7	2020
123	12 „	297	15,5	1960
124	3 Uhr 45 M.	291	13,7	1970
125	n. weiteren 18 Stunden	285	12,8	2000

Die Versuche der Tabelle III, sowie die der Tabellen VIII und IX, sind erst 5—18 Stunden nach Absperrung des Apparates von Trockenmitteln gemacht, daher der Stickstoff hier als „schwach feucht“ bezeichnet worden.

Bei den Versuchen der Tabelle IV befand sich ein mit Phosphorsäureanhydrid gefülltes Uhrglas unter der Glocke. Man sieht, dass unter gleichen Verhältnissen des Drucks die Anziehung F für trockenen Stickstoff bei höheren Drucken etwa 3 mal so gross in trockenem, als in schwach feuchtem Stickstoff gefunden wurde. Mit abnehmendem Druck nimmt nach den Tabellen F_1, folglich auch die positive Electrisirung des negativen Glimmlichts für die Einheit der Stromdichte ab, bedeutend ist die Abnahme bei trockenem Stickstoff mit grossen F_1werthen, geringer bei schwach feuchtem mit kleinen F_1werthen. Ausnahmen von dieser Regel zeigt auch die auf Aluminiumelectroden bezügliche Tabelle VI dann nicht, wenn man berücksichtigt, dass nur die auf *eine* Füllung bezüglichen Versuche als in dieser Hinsicht maassgebend betrachtet werden können.

§ 19. Gehen wir zum Wasserstoff über, so wurde dieser stets durch Phosphorsäureanhydrid, das sich unter der Glocke befand, trocken gehalten, da man bei trockenem Wasserstoff constante Werthe des Kathodengefälles erhält. Auch wurde viele Mühe auf Herstellung möglichst reinen Gases verwandt. Ein Kriterium für verhältnissmässige Reinheit des Gases giebt hier das Auftreten grünen Quecksilberlichts an der Kathode.[1] Hatte aber der Strom eine Zeit lang gewirkt, so zeigte das Verschwinden jenes Lichts beginnende Verunreinigung des Gases an. Es kommt hinzu, dass im Wasserstoff die Kathode

1) E. Warburg, Wied. Ann. **31.** 575. 1887.

bei längerem Gebrauch starke Anlauffarben zeigte, was eine Vergrösserung der electrischen Anziehung mit sich bringt (§ 14). Aus diesen Gründen ist es schwer, über den Einfluss des Druckes etwas Sicheres zu ermitteln. Ich beschränke mich daher auf die Bemerkung, welche durch die Tabellen V und VII begründet wird, dass R_1 und σ_1 mit dem Drucke nur wenig variabel sind, also auch die positive Electrisirung des negativen Glimmlichts bei derselben Stromdichte sich mit dem Druck nur wenig ändert. R_1 ist für Aluminium etwas kleiner, als für Platin gefunden worden.

§ 20. Vergleicht man endlich das Verhalten des Stickstoffs und Wasserstoffs, so sind für Platin sowohl, als für Aluminium sämmtliche im Wasserstoff beobachtete R_1 werthe erheblich kleiner, als die im Stickstoff gefundenen; bei gleicher Stromdichte ist also innerhalb der bei den Versuchen vorkommenden Druckgrenzen die positive Electrisirung im negativen Glimmlicht stets grösser für Stickstoff, als für Wasserstoff. Wenn gleichwohl das Kathodengefälle am Platin bei Wasserstoff etwas grösser, als bei Stickstoff ist, so muss man in Betracht ziehen, dass unter gleichen Umständen des Drucks die Dicke des negativen Glimmlichts und damit die Strecke, auf welcher der Fall des Potentials sich vollzieht, für Wasserstoff erheblich grösser, als für Stickstoff ist.

§ 21. In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich den Werth des Kathodengefälles für den Fall, dass das negative Glimmlicht die Kathode nicht ganz bedeckt, also sich frei über dieselbe verbreiten kann, das normale Kathodengefälle genannt. Ebenso will ich die dem normalen Kathodengefälle entsprechende Stromdichte, welche mit abnehmendem Druck abnimmt, die normale Stromdichte und den Werth der ihr entsprechenden electrischen Kraft den Normalwerth dieser Kraft nennen. In den Tabellen III bis VII ist ein normales Kathodengefälle e jedesmal durch ein † bezeichnet; dass in diesen Fällen die Stromdichte sehr nahe die normale war, wurde daraus geschlossen, dass bei einer kleinen Schwächung des Stromes das negative Glimmlicht die Kathode nicht mehr ganz bedeckte. Die folgende Zusammenstellung zeigt den

1) E. **Warburg**, Wied. Ann. **31**. 538. 1887.

Zusammenhang zwischen dem Normalwerth der electrischen Kraft R und dem Druck für Platinkathoden in Wasserstoff und Stickstoff.

Tabelle XI.

Normales Kathodengefälle.
Platin, Stickstoff, schwach feucht.

Nr.	Druck	i	$\varDelta$	$F.10^6$	R	e	$\sigma.10^{-10}$
114	2,18	3660	28,8	2880	1430	261	1,265
128	0,91	500	2,78	278	444	231	0,393
			Platin, Wasserstoff.				
164	5,06	4930	17,28	1728	1110	273	0,982
147	3,05	2210	7,84	784	745	265	0,659
156	2,83	1530	4,7	470	577	267	0,511
160. 161	1,92	540	1,58	158	335	270	0,296

Man sieht, dass der Normalwerth R der electrischen Kraft an der Kathode mit abnehmendem Druck sehr bedeutend sinkt, z. B. unter den 3. Theil seines Werthes im Wasserstoff, wenn der Druck von 5 auf 1,9, im Stickstoff, wenn der Druck von 2,2 auf 0,9 erniedrigt wird. Ferner ergibt sich für gleichen Druck der Normalwerth der electrischen Kraft bedeutend kleiner für Wasserstoff, als für Stickstoff, z. B. für Wasserstoff von 2,8 mm $R = 577$, für Stickstoff von 2,2 mm $R = 1430$.

Diese Resultate haben nun Bezug auf das, was über die Schlagweite schon lange bekannt ist. Man weiss, dass dieselbe mit abnehmendem Druck abnimmt und bei gleichem Druck für Wasserstoff kleiner, als für Stickstoff ist. Bei den Versuchen über die Schlagweite handelt es sich aber stets um den Normalwerth der electrischen Kraft. Es ist hierdurch auch der scheinbare Widerspruch gehoben, der darin zu liegen schien, dass das normale Kathodengefälle vom Druck nahezu unabhängig gefunden wird und dass dasselbe für Platinkathoden im Wasserstoff grösser, als in schwach feuchtem Stickstoff ist.

§ 22. Vergleicht man die Werthe des normalen Kathodengefälles, welche sich für Scheiben ergeben haben mit den früher [1]) an drahtförmigen Kathoden von 2 mm Durchmesser gefundenen, so sind jene etwas kleiner, als diese, nämlich:

---

1) E. Warburg, Wied. Ann. 31. 545. 1887.

	Scheibe	Draht
Pt in N_2	246 Volt	260 Volt
Pt „ H_2	270 „	300 „
Al „ N_2	200 „	230 „
Al „ H_2	170 „	190 „

Von der Wirkung der Büchse rührt dies nicht her, da ich ähnliche Werthe des Kathodengefälles auch an freien Scheiben gefunden habe. Das Kathodengefälle ist daher an Scheiben etwas kleiner, als an Drähten.

§ 23. Die algebraische Summe der freien Electricität im Glimmstrom ist unter den idealen Verhältnissen des § 2 für die Einheit des Querschnitts gleich der algebraischen Summe der electrischen Flächendichte an Kathode und Anode. Zur Ermittelung dieser Grösse habe ich einige vergleichende Versuche über die Anziehung der Anode und Kathode angestellt. Dabei wurde die an der Wage aufgehängte Electrode abwechselnd zur Kathode und Anode gemacht. Die positive Lichthaut bedeckte die Anode dabei ganz, die folgende Tabelle enthält die Resultate zweier derartiger Versuche. e ist hier jedesmal die Potentialdifferenz zwischen der Sonde und der an der Wage aufgehängten Electrode.

Tabelle XII.

Aluminium, Wasserstoff.

	Nr.	Druck	i	Δ	$F.10^6$	R	e	$\sigma.10^{-10}$
Electrode −	105	2,61	3050	6,35	643	678	215	0,600
„ +	106	2,61	2900	0,1	10	85	43	0,075
			Platin, Stickstoff schwach feucht.					
Electrode −	227. 229	0,96	1720	9,7	1070	582	262	0,515
„ +	228	0,96	1620	0,8	89	167	49	0,148

Wie man sieht, wird in dem ersten Fall bei nahezu gleicher Stromdichte die Kathode über 64 mal so stark, als die Anode angezogen, electrische Kraft und absoluter Werth der Flächendichte sind also an jener 8 mal so gross, als an dieser. Es ist daher in dem von der Glimmentladung durchsetzten Gase ein Ueberschuss freier positiver Electricität vorhanden.

In dem zweiten Falle beträgt die Anziehung der Kathode

das 12fache von der Anziehung der Anode bei nahe gleicher Stromdichte.

§ 24. Es wurde schon in den §§ 4—6 bemerkt, dass bei begrenzten Electroden vermöge der durch die Electrisirung des Gases bewirkten Drucksteigerung Strömungen sich bilden müssen. Nachdem die electrische Kraft an der Kathode gemessen worden ist, sind wir nun im Stande die dort bewirkte Drucksteigerung und die grösste Geschwindigkeit, welche aus jener entstehen kann, zu schätzen. Legen wir der Rechnung etwa den Versuch Nr. 114 Tabelle III zu Grunde, welcher sich auf schwach feuchten Stickstoff von 2,18 mm Druck bezieht. Hier ist $F = 2880 . 10^{-6}$ Grammgewicht, die dadurch bewirkte Steigerung des hydrostatischen Drucks $\frac{\mathfrak{R}^2}{8\pi} = \frac{F}{s} = 916 . 10^{-6}$ Grammgewicht aufs □cm, da hier $s = \pi$. Diess entspricht $h = \frac{916 . 10^{-6}}{13,6}$ cm Quecksilber. Würde das Gas unter diesem Ueberdruck aus einer Oeffnung in dünner Wand ausströmen, so würde diess nach dem Torricelli'schen Thorem geschehen mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh . \frac{13,6}{0,00125 . \frac{2,18}{760}}} = 708 \frac{\text{cm}}{\text{Sec.}} = 7,08 \frac{\text{met.}}{\text{Sec.}}$$

Man sieht also zunächst, dass durch die betrachtete Wirkung sehr erhebliche Strömungsgeschwindigkeiten in dem dünnen Gase entstehen können. Weiter wächst nach Tabelle XI für die normale Stromdichte F oder $\mathfrak{R}^2$ sehr viel schneller, als die Dichte des Gases. Ich schliesse daraus, dass die Strömungen, welche in Folge der Electrisirung des Gases bei der Glimmentladung sich bilden können, für normale Stromdichte um so intensiver sind, je dichter das Gas. Diese Strömungen gehen zwischen den Electroden von der Anode zur Kathode (§ 6); es kann daher auf diesen Strömungen die in dieser Richtung stattfindende Fortführung des Natriumdampfes beruhen, welche ich in diesen Annalen Bd. 40 p. 5 beschrieben habe; auch hier fand die Fortführung bei normaler Stromdichte um so energischer statt, je höher der Gasdruck war.

§ 25. Die Resultate der vorliegenden Untersuchung lassen sich der Hauptsache nach folgendermaassen zusammenfassen:

1. Die electrostatische Anziehung, welche eine ebene Kathodenfläche bei der Glimmentladung erfährt, kann durch die Wage gemessen und daraus die electrische Kraft und die Flächendichte an der Kathodenfläche berechnet werden. Jene Anziehung ergibt sich der Stromdichte proportional und beträgt in Milligrammgewicht pro Ampère für blanke Platin- und Aluminiumkathoden in

trockenem Stickstoff	von 0,5—2 mm	Druck	1300—2400
schwach feuchtem Stickstoff	„ 0,5—2 mm	„	500— 800
Wasserstoff	„ 1—3 mm	„	200— 350

2. In dem negativen Glimmlicht befindet sich, wie schon A. Schuster[1]) hervorgehoben hat, ein Ueberschuss freier positiver Electricität. Der Betrag dieser positiven Ladung ist der negativen Ladung der Kathode entgegengesetzt gleich, wie diese Ladung der Quadratwurzel aus der Stromdichte proportional und von der Ordnung $10^{-10}\,\frac{\text{Coul.}}{\square\text{cm}}$ für 1 Milliampère aufs Quadratcentimeter bei blanken Platin- und Aluminiumkathoden in Stickstoff und Wasserstoff gefunden worden.

3. Eine Anodenfläche wird viel schwächer angezogen und ist daher viel schwächer geladen, als eine Kathodenfläche.

Wenn also zwei unendliche parallele Electrodenflächen einander gegenüberstehen, so sind dieselben gleich stark geladen nur so lange die Electricität im Gleichgewicht ist. Geht aber die Glimmentladung zwischen den Flächen über, so ist die Ladung der Anode schwächer, als die Ladung der Kathode um den Ueberschuss freier positiver Electricität, welcher sich im stromdurchflossenen Gase vorfindet.

4. Für die normale Stromdichte, bei welcher das negative Glimmlicht sich frei über die Kathode hin ausbreiten kann, nimmt die electrische Kraft an der Kathode mit abnehmendem Druck ab und ist für Wasserstoff kleiner, als für Stickstoff entsprechend den für die Schlagweite bekannten Gesetzen. Bei normaler Stromdichte nimmt daher der unter

---

1) A. Schuster, Proc. Roy. Soc. **47.** p. 541. 1890.

3. erwähnte Ueberschuss freier positiver Electricität im Gase mit abnehmendem Drucke ab.

5. Die körperliche electrische Ladung des Gases, welche bei der Glimmentladung stattfindet, bringt Steigerung des hydrostatischen Drucks mit sich und erzeugt dadurch unter gewöhnlichen Umständen Wirbelströme, welche zwischen begrenzten Electroden von der Anode zur Kathode fliessen und die mehrfach beobachtete Fortführung von Materie im Sinne des positiven Stromes erklären können.

Freiburg i. B., 31. Oct. 1891.

II. *Ueber den Durchgang der Kathodenstrahlen durch dünne Metallschichten; von H. Hertz.*

Die Kathodenstrahlen unterscheiden sich vom Lichte wesentlich in Hinsicht der Fähigkeit, feste Körper zu durchdringen. Selbst solche Stoffe, welche für das Licht aller Gattungen die durchlässigsten sind, setzen schon in den dünnsten herstellbaren Schichten dem Durchgang der Kathodenstrahlen einen unüberwindlichen Widerstand entgegen. Um so auffallender erschein es mir, dass gerade die für das Licht so undurchlässigen Metalle für die Kathodenstrahlen eine wenn auch geringe Durchlässigkeit besitzen. Dickere Metallschichten sind freilich wie für das Licht, so auch für die Kathodenstrahlen undurchdringlich; Metallschichten aber von solcher Dünne, dass schon ein Theil des auffallenden Lichtes hindurchgeht, lassen auch einen Theil der auffallenden Kathodenstrahlen hindurchdringen, ja wie es scheint einen etwas grösseren Bruchtheil der Kathodenstrahlen als des Lichtes. Man kann sich davon durch die einfachsten Versuche überzeugen. Eine phosphorescenzfähige ebene Glasplatte, am besten ein Stück Uranglas belegt man auf einer Seite, welche wir die vordere nennen wollen, theilweise mit echtem Blattgold, befestigt auf dem Golde noch einige Glimmersplitter, und setzt nun diese vordere Seite den Kathodenstrahlen aus, welche etwa von einer ebenen kreisrunden Aluminiumkathode von 1 cm Durchmesser ausgehen, sagen wir in einem Abstande von 20 cm von der Kathode. Solange die Luftverdünnung noch nicht weit vorgeschritten ist und die Kathodenstrahlen als dichter blauer Lichtkegel das ganze Entladungsrohr füllen, phosphorescirt das Glas nur ausserhalb der goldbelegten Stelle. Die Phosphorescenz wird in diesem Stadium hauptsächlich durch das Licht der Entladung bewirkt, von welchem das Goldblatt nur einen sehr kleinen Theil hindurchlässt. Wird nun aber bei fortschreitender Verdünnung das Innere des Entladungsrohres mehr und mehr lichtlos und beginnen die eigentlichen Kathodenstrahlen das belegte Glas zu treffen,

so beginnt dieses auch hinter der Goldschicht zu phosphoresciren; dies Leuchten nimmt zu und wenn die Kathodenstrahlen ihre lebhafteste Entwickelung erreicht haben, erscheint von der hintern Seite aus betrachtet, das Goldblatt nur noch als ein matter Schleier auf der Glasplatte, hauptsächlich erkennbar an seinen Rändern und an den kleinen Fältelungen, welche es enthält. Man kann kaum sagen, dass es einen Schatten wirft. Die dünnen Glimmerplättchen dagegen, welche wir auf die Goldschicht gelegt haben, werfen durch diese hindurch ihre tiefschwarzen Schatten auf das Glas. Die Kathodenstrahlen durchsetzen also die Goldschicht; wie es scheint, mit geringem Verluste. Den gleichen Versuch mit gleichem Erfolge führte ich mit echtem Blattsilber aus, mit Blattaluminium, mit verschiedenen Sorten unechten Blattsilbers und Blattgoldes (Zinn, Zink- und Kupferlegirungen), ferner mit chemisch niedergeschlagenen Silberschichten, sowie mit Schichten von Silber, Platin und Kupfer, welche im Vacuum durch die Entladung niedergeschlagen waren. Diese letzteren Schichten waren übrigens viel dünner als die geschlagenen Metallblätter. Charakteristische Unterschiede zwischen den verschiedenen Metallen habe ich nicht bemerkt. Am geeignetsten für die Versuche erschien mir das geschlagene Aluminium, wie es im Handel zu haben ist, es ist schon fast völlig undurchlässig für das Licht, sehr durchlässig für die Kathodenstrahlen, leicht zu handhaben, und wird von den Kathodenstrahlen nicht angegriffen, während z. B. eine Schicht von Blattsilber von denselben schnell in eigenthümlicher Weise zerfressen wird.

Der Annahme, es seien in diesem Versuche die Kathodenstrahlen durch den Stoff des Metalls hindurchgegangen, kann man den Einwand entgegenstellen, es seien so dünne Metallschichten voll feiner Oeffnungen und die Kathodenstrahlen möchten wohl durch diese und nicht durch das Metall hindurch zum Glase gelangt sein. Bei den geschlagenen Metallen, an welchen die Erscheinung am meisten überrascht, ist das Vorhandensein vieler Poren nicht zu leugnen, aber die Gesammtoberfläche der Oeffnungen beträgt doch kaum einige Procent der Oberfläche des Metalles und dies reicht nicht aus, das helle Leuchten des belegten Glases zu erklären. Es erscheint ferner der belegte Theil des Glases völlig lichtlos,

wenn wir das Glas von der vorderen Seite, der Seite der Ka thode her betrachten. Die Kathodenstrahlen müssen als zu dem Glase auf einem Wege gelangt sein, welchen das vo ihnen erregte Licht nicht rückwärts zurücklegen kann, si können also nicht durch die Oeffnungen des dem Glase en anliegenden Metallblattes eingetreten sein. Legen wir weite zwei Metallblätter übereinander, so wird die Zahl der sic überdeckenden Oeffnungen verschwindend klein sein, die Ka thodenstrahlen aber bringen das Glas auch noch unter eine doppelten Schicht der Blattmetalle zum kräftigen Leuchte ja noch unter einer drei- und vierfachen Schicht von Blatt gold oder Blattaluminium vermögen wir das Phosphorescire des Glases und die Schatten davor befindlicher Gegenständ wahrzunehmen. Es ist mir übrigens aufgefallen, dass ein doppelte Schicht das Leuchten weit mehr schwächt, als ma es nach der geringen Schwächung erwarten sollte, welche di einfache Schicht hervorbringt. Ich glaube, dass die folgend Ueberlegung eine genügende Erklärung dieser Erscheinun abgiebt. Die Metallbelegung bildet eine spiegelnde Fläche, i welcher das Phosphorescenzlicht reflectirt wird. Indem di spiegelnde Fläche dies Licht hindert, nach der Seite de Kathode auszustrahlen, verdoppelt sie die Intensität desselbe für die der Kathode abgewandte Seite. Nehmen wir nun a die Metallschicht lasse nur $^1/_3$ der Kathodenstrahlen hindurc so vermindert sich gleichwohl das Leuchten nicht auf $^1/$ sondern nur auf $^2/_3$ des früheren Werthes, die zweite Schic aber wird das Leuchten schon auf $^2/_9$ herabsetzen und weite Schichten werden die Phosphorescenz schnell verschwind machen. Ist diese Auffassung richtig, so dürfen Metallfläche welche mehr als die Hälfte der Kathodenstrahlen hindurc lassen, das Leuchten überhaupt nicht schwächen, sondern muss das Glas hinter solchen Metallschichten sogar stärk phosphoresciren, als an den unbelegten Stellen. An chemis niedergeschlagenen Silberschichten von passender Dicke, glau ich diese Vermuthung bestätigt gefunden zu haben; doch i die Beobachtung insofern etwas unsicher, als man an den u belegten Stellen durch das phosphorescirende Glas hindur unvermeidlich das graublaue Leuchten des Gases wah nimmt und man nicht mit völliger Sicherheit die Helligke

dieses Lichtes von der des grünen Phosphorescenzlichtes trennen kann.

Gingen endlich die Kathodenstrahlen durch die Oeffnungen des Metalls hindurch, so müssten sie nach dem Durchgang ihren geradlinigen Weg fortsetzen. Dies aber thuen sie nicht, vielmehr werden die Strahlen bei dem Durchgang diffus zerstreut, etwa in der Weise, in welcher das Licht bei seinem Durchgang durch ein trübes Medium, z. B. Milchglas, zerstreut wird. Wir sperren den ganzen Querschnitt des cylindrischen Entladungsrohres in etwa 20 cm Entfernung von der Kathode durch eine Metallplatte ab, bringen in dieser eine kreisrunde Oeffnung von einigen Millimetern Durchmesser an und verschliessen dieselbe wieder durch ein Stück Blattaluminium. Halten wir nun eine phosphorescenzfähige Glasplatte unmittelbar hinter die Oeffnung, so erhalten wir, wie zu erwarten war, ein deutliches und helles Bild der Oeffnung auf dem Glase; entfernen wir die Glasplatte aber nur auf einen oder zwei Millimeter, so erscheint das Bild schon merklich vergrössert und seine Helligkeit entsprechend vermindert, zugleich erscheint sein Rand verwaschen. Bei einer Entfernung der Glasplatte auf mehrere Millimeter erscheint das Bild der Oeffnung schon äusserst verwaschen, vergrössert und lichtschwach und entfernen wir die Platte weiter, so erscheint das Entladungsrohr hinter dem Diaphragma einfach dunkel. Dass dies nur an der Schwäche der von der kleinen Oeffnung ausgestreuten Kathodenstrahlen liegt, zeigt sich, wenn wir in dem Metalldiaphragma viele solcher durch Blattaluminium verschlossener Oeffnungen anbringen. Am einfachsten bilden wir für diesen Versuch das Diaphragma aus einem Drahtgitter, welches wir eben gehämmert und auf welchem wir ein Stück Blattaluminium ausgespannt haben. Hinter derartigen Diaphragmen leuchtet das gesammte Entladungsrohr in gleichmässig verbreitetem, mässig hellem Lichte. Die Phosphorescenz ist hinreichend stark, um zu gestatten, dass wir aus den diffusen Kathodenstrahlen durch weitere Diaphragmen Strahlenbündel ausscheiden können und an diesen uns überzeugen, dass auch nach dem Durchgang durch das Metallblatt die Kathodenstrahlen die Fähigkeit der gradlinigen Ausbreitung, der Ablenkung durch den Magneten u. s. w. nicht verloren haben.

Die Erscheinung, dass die Kathodenstrahlen beim Durchgang durch blanke dünne Metallschichten zerstreut werden dürfte im Zusammenhang stehen mit der andern Erscheinung dass der von der Vorderfläche solcher Schichten reflectirte Theil der Kathodenstrahlen diffus zurückgeworfen wird, wie Hr. E. Goldstein [1]) nachgewiesen hat.

Bonn, November 1891.

---

1) E. Goldstein, Ueber die Reflexion electrischer Strahlen. Wied. Ann. **15.** p. 246. 1882.

III. *Die electromotorische Gegenkraft des Lichtbogens; von Fr. Stenger.*

Die electrischen Vorgänge im Lichtbogen sind häufig aus wissenschaftlichem sowohl, als auch technischem Interesse studirt worden. Die hohe Spannung zwischen beiden Electroden, die geringe Veränderlichkeit dieser Spannung mit der Bogenlänge haben eine Reihe von Forschern dazu geführt, eine electromotorische Gegenkraft im Lichtbogen anzunehmen. Den Nachweis dieser Gegenkraft bez. den Beweis ihrer Nichtexistenz hat man auf directem und indirectem Wege zu führen gesucht.

Die indirecten Methoden (v. Lang[1]), Arons[2])) sind nicht einwurfsfrei, weil sie das Ohm'sche Gesetz benutzen. Es ist indessen unzulässig, für die Gasstrecke des Lichtbogens einen von der Stromstärke unabhängigen Widerstand vorauszusetzen.

Von den directen Methoden ist die älteste diejenige von Edlund[3]). Es wurde der Hauptstrom unterbrochen und eine kurze Zeit, etwa $^1/_{80}$ Secunde später, eine aus positiver Kohle, Lichtbogen, negativer Kohle, Galvanometer bestehende Nebenschliessung hergestellt. Edlund erhielt dann am Galvanometer einen Ausschlag und schrieb ihn unbedenklich der von ihm aus zweifelhaften Speculationen erschlossenen electromotorischen Gegenkraft zu. Nach einer ähnlichen Methode hat später Luggin[4]) ausführliche und sorgfältige Versuche gemacht, erhielt aber ein negatives Resultat, obgleich bei ihm die Zeit zwischen der Unterbrechung des Hauptstromes und der Herstellung der Nebenschliessung kürzer war als bei Edlund. Nach meinen eigenen, weiter unten geschilderten Versuchen muss ich behaupten, dass das positive Ergebniss

---

1) v. Lang, Wied. Ann. **26.** p. 145. 1885; **31.** p. 384. 1887.

2) Arons, Wied. Ann. **30.** p. 95. 1887.

3) Edlund, Pogg. Ann. **131.** p. 586. 1867; **133.** p. 353. 1868; **134.** p. 250. 337. 1868.

4) Luggin, Wien. Ber. **98.** p. 1192. 1889.

Edlund's auf Fehlern beruht. Welcher Art diese Fehler waren, weiss ich nicht.

Gegen die Versuche von Luggin lässt sich nur ein Einwand machen. Nehmen wir an, dass der Polarisationszustand des Lichtbogens nach dem Erlöschen desselben sehr rasch verschwindet, in einer Zeit, welche geringer ist, als das Intervall zwischen dem Oeffnen des normalen Stromes und der Herstellung des Nebenschlusses, dann beweist das negative Resultat Luggin's nichts.

Lecher[1]) hat daher Versuche nach einer anderen Methode angestellt. Ich will dieselbe hier reproduciren, weil meine eigenen Versuche nur eine Modification der Lecher'schen sind. In der Fig. 1 bedeutet *D* eine Dynamomaschine. Von der Bürste b_1 aus geht der positive Strom über *a* zur positiven Kohle, durch den Bogen hindurch zur negativen Kohle, zum Galvanometer *G* und über den Punkt *b* zur negativen Bürste b_2. Am Galvanometer war eine einseitige Hemmung angebracht, so dass der directe Strom eine Ablenkung nicht hervorbringen konnte, während der Drehung des Magnets im entgegengesetzten Sinne ein Hinderniss nicht im Wege stand. Das Galvanometer musste den vollen Strom aufnehmen können, besass also jedenfalls wenige Windungen dicken Drahts. Werden die Punkte *a* und *b* unmittelbar metallisch verbunden, so war die Maschine kurz geschlossen, die Klemmspannung an den Kohlen sank sofort und der Bogen erlosch. Wäre nun eine electromotorische Gegenkraft im Lichtbogen thätig, so müsste das Galvanometer einen Ausschlag zeigen. Das Ergebniss war jedoch negativ und daraus folgert Lecher, dass eine Gegenkraft nicht existirt. Die Methode Lecher's involvirt in einem Punkte allerdings einen wesentlichen Fortschritt gegen die

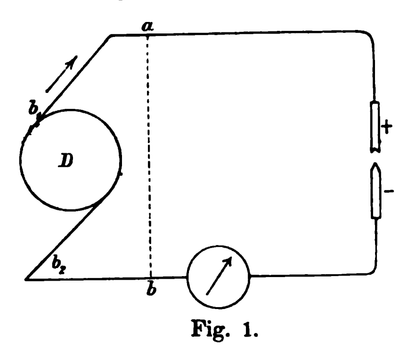


Fig. 1.

1) Lecher, Wied. Ann. **33.** p. 609. 1888.

Methode von **Edlund** und **Luggin**. Die Zeit zwischen dem Verlöschen des Bogens und der Herstellung der Nebenschliessung ist hier verschwindend, weil erst nach der Herstellung der Nebenschliessung der Lichtbogen zum Verlöschen kommt. Aber man kann andererseits der Methode **Lecher's** den Vorwurf machen, dass sie unempfindlich sei. Die Methode erheischt ein Galvanometer von geringem Widerstande, während möglicherweise der Widerstand des erlöschenden Bogens sehr gross ist. **Lecher** hat selbst diesen Mangel gefühlt, aber er hat keinen Weg gezeigt, wie man demselben abhelfen kann.

Meine Methode ist im Grunde vollkommen die **Lecher'sche**. Aber durch eine kleine Ergänzung wird der Nachweis geführt, dass die Empfindlichkeit der Methode in der That vollständig ausreichend ist. Fig. 2 stellt das ergänzte Schema dar. Darin bedeutet D eine **Schuckert'sche** Flachringmaschine mit Nebenschlusswickelung. A ist ein **Kohlrausch'sches** Federgalvanometer zur Messung des normalen Stroms, T eine mit einseitiger Hemmung ausgerüstete Tangentenbussole, R ein Ballastwiderstand. B ist eine Kette von fünf hinter einander geschalteten Akkumulatoren; der negative Pol der Kette ist mit der positiven Kohle verbunden. Von den Punkten a und b führen kurze Drähte zu den beiden Theilen eines zunächst geöffneten Stromschlüssels.

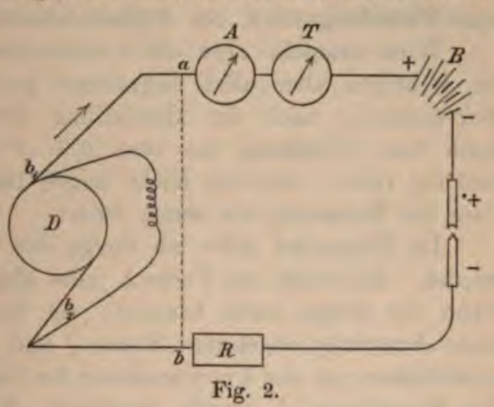


Fig. 2.

Während die Lampe normal brennt, werden gleichzeitig die Akkumulatoren geladen. Die Tangentenbussole schlägt nicht aus in Folge der einseitig wirkenden Hemmung. Wird jetzt zwischen den Punkten a und b der Kurzschluss hergestellt, so geht der von der Dynamomaschine erzeugte Strom durch den Kurzschluss, die Schenkelwickelung erhält nur noch einen minimalen Strom, die Feldmagnete verlieren ihren Mag-

netismus fast vollständig, die Maschine wird stromlos. In Folge dessen sinkt unmittelbar nach der Herstellung des Kurzschlusses die Klemmenspannung an den Kohlen schnell, der Bogen verlischt. In demselben Augenblick schlägt die Galvanometernadel kräftig aus, oft um mehr als 90°. Daraus folgt, dass die Gasstrecke eine freilich sehr kurze Zeit nach der Unterbrechung des Hauptstroms so gut leitet, dass selbst ein so unempfindliches Galvanometer reagirt. Dieser Versuch lässt aber unentschieden, ob dieser Galvanometerausschlag von der fraglichen electromotorischen Gegenkraft herrührt oder vom Entladungsstrom der Akkumulatoren.

Wird nunmehr aber die Akkumulatorenbatterie entfernt, im Uebrigen aber alles ungeändert gelassen, so zeigt das Galvanometer nach der Herstellung des Kurzschlusses nur noch eine Ablenkung von etwa 0,5—1°. Diese geringe Ablenkung rührt, wie sich leicht zeigen lässt, nur davon her, dass die Hemmung ein wenig federt.

Im Folgenden gebe ich einige der beobachteten Zahlen wieder. Es wurde der Versuch jedes Mal erst dann begonnen, wenn der Bogen ruhig brannte. An der Bussole wurde der erste Ausschlag abgelesen; Strom J und Spannung E wurden unmittelbar vor der Unterbrechung des Hauptstroms bestimmt, die Bogenlänge L wurde geschätzt. Es versteht sich von selbst, dass stets controlirt wurde, dass eine directe Berührung der Kohlen ausgeschlossen war.

A. Mit fünf hinter einander geschalteten Akkumulatoren.

J (Ampère)	E (Volt)	L (mm)	Ausschlag
17	40	3	55°
16	40	2	55°
14,5	40	1	20°
15	40	1	39°
15	43	3	11°
15	41	1	54°
15	38	0,5	112°
16	35	0,5	127°.

Für kurze Bögen und starken Strom waren die Ausschläge am grössten, was auch von vornherein zu erwarten ist. Ebenso waren die Ausschläge grösser, wenn die Kohlen normale Glühtemperatur hatten, als wenn man sofort beobachtete, sobald der Bogen nach der Entzündung ruhig brannte.

B. Ohne Akkumulatoren.

Der Ausschlag betrug stets 0,5—1^0 für jede Stromstärke und jede Bogenlänge.

Resultat: Während in demselben Moment, wo der Lichtbogen verlischt, wenige Akkumulatoren einen kräftigen Strom durch die Gasstrecke schicken, ist ohne Akkumulatoren absolut nichts nachweisbar. Mir scheint damit endgültig nachgewiesen zu sein, dass eine electromotorische Gegenkraft im Lichtbogen nicht vorhanden ist.

Dresden, Electrotech. Labor. der techn. Hochschule.

IV. *Ueber den Magnetismus organischer Verbindungen; von S. Henrichsen.*

In diesen Annalen Bd. 34, p. 180, 1888 habe ich eine Arbeit über die Abhängigkeit des Magnetismus einiger organischen Verbindungen von ihrer chemischen Zusammensetzung veröffentlicht. Es war damals meine Absicht, die Versuche über ein grösseres Gebiet auszudehnen und demnächst die Abhängigkeit von der Temperatur und der magnetisirende Kraft zu untersuchen und endlich absolute Messungen zu machen. Wegen Mangel an Zeit habe ich die Arbeit nicht in befriedigender Weise vollführen können. Da ich aber jetzt gezwungen bin, dieselbe ganz abzuschliessen, will ich die bisher gefundenen Resultate kurz referiren.

1. Die Abhängigkeit des Magnetismus von der magnetisirenden Kraft.

Ob die Magnetisirungsfunction bei diamagnetischen und schwach magnetischen Körpern eine Constante ist oder veränderlich wie beim Eisen, ist eine Frage, die von mehreren Physikern experimentell behandelt worden ist. Während Becquerel, Tyndall, Reich, Joule, G. Wiedemann und andere die Function constant gefunden haben, scheinen dagegen Versuche von Plücker, Silow, Eaton und vor allen Schumeister eine mehr oder minder bedeutende Veränderlichkeit in genannter Function zu beweisen. Um einen Beitrag zur Lösung dieser Frage zu geben, habe ich einige der in oben citirter Arbeit benutzten Stoffe untersucht. Es wurde derselbe Electromagnet mit Torsionsapparat wie damals benutzt. Vor allem war es nothwendig, die Stärke des magnetischen Feldes messen zu können und dessen Abhängigkeit von der Stromstärke zu bestimmen. Um dies bewerkstelligen zu können, liess ich eine kleine Inductionsrolle anfertigen, welche dieselbe Grösse und Form hatte, wie das Glasgefäss, in welches die Flüssigkeiten bei den Messungen gefüllt waren, und in derselben Stellung zwischen

den Halbankern des Electromagnets aufgestellt wurde. Die Rolle stand mit einem Galvanometer in Verbindung, das ungefähr 5 m von dem Electromagnet in solcher Lage aufgestellt war, dass derselbe nur einen verschwindend kleinen Einfluss aut die Einstellung des Galvanometers hatte. Die Wirkung wurde für jede benutzte Stromstärke gemessen. Bei den Versuchen wurde das Multiplicationsverfahren benutzt. Die Inductionsrolle wurde um 90° aus ihrer Stellung gedreht, dann zurück, und dies zehnmal wiederholt. Statt die Stromstärke direct zu messen, wurde die Wirkung des Electromagnets an einem in der Nähe aufgestellten Magnetometer abgelesen. In dieser Weise wurden folgende Werthe gefunden. M bedeutet das Magnetometer, G das Galvanometer.

M	83,1	126,1	181,9	226,9	277,6
G	70,6	99,5	134,8	161,2	188,8
G berechnet	70,4	100,2	134,6	160,5	189,3

Die Zahlen wurden durch die Formel:

$$G = 0{,}9730\,M - 0{,}001\,721\,M^2 + 0{,}0_5 243\,M^3$$

dargestellt.

Nach dieser Voruntersuchung wurden die Versuche mit den Flüssigkeiten begonnen und genau in derselben Weise durchgeführt, wie ich schon in meiner vorigen Arbeit beschrieben habe. Die Resultate sind aus den folgenden Tabellen ersichtlich. M bedeutet wieder das Magnetometer, A die diamagnetische Abstossung, K die magnetisirende Kraft.

M	K	A	A/K^2	M	K	A	A/K^2
Propylalkohol.				Ameisensäure.			
104	85,0	48,5	0,00672	102,0	83,8	42,5	0,00605
152,5	116,9	91,5	670	152,5	116,9	85,9	629
200,5	145,5	140,0	661	201,5	146,7	134,2	624
230,5	160,5	172,1	668	258,0	178,0	188,0	593
Isobutylalkohol.				Allylchlorid.			
103,5	84,8	48,1	0,00669	104,0	85,0	49,3	0,00682
154,0	117,8	94,2	679	156,5	119,3	100,4	705
203,5	147,2	144,8	668	198,0	144,1	141,0	679
254,0	175,1	197,4	640	252,0	173,8	200,7	680
Paraldehyd.				Amylchlorid.			
103,5	84,8	52,0	0,00723	105,0	85,7	58,4	0,00799
153,0	117,1	100,9	736	153,5	117,4	111,0	805
203,5	147,2	158,6	732	204,5	147,5	173,4	779
247,0	171,9	208,0	704	249,5	173,2	228,7	762

Amylacetat.

M	K	A	A/K^2
101,0	83,0	48,1	0,00698
151,5	116,2	96,7	716
203,5	147,2	154,2	712
264,5	181,8	220,9	669

Isovaleriansäure.

M	K	A	A/K^2
104,5	85,2	51,9	0,00715
154,5	118,1	100,2	719
203,5	147,2	154,6	713
259,0	178,6	215,1	674

Aceton.

M	K	A	A/K^2
104,5	85,2	38,6	0,00532
155,5	118,8	76,2	540
206,0	148,7	121,8	551
260,5	179,4	173,8	540

Isobutylbromid.

M	K	A	A/K^2
107,5	87,3	39,1	0,00513
155,5	118,8	73,1	517
207,0	149,3	114,6	514
263,0	181,0	162,8	497

Isobuttersäure.

M	K	A	A/K^2
103,0	84,3	47,1	0,00663
154,5	118,1	91,7	657
203,0	146,9	142,5	660
261,0	179,8	208,5	645

Propylacetat.

M	K	A	A/K^2
102,0	83,7	37,1	0,00530
154,0	117,8	75,0	541
203,0	146,9	117,3	544
268,0	183,6	175,3	520

Aethylformiat.

M	K	A	A/K^2
101,0	83,0	30,6	0,00444
151,0	116,0	61,4	457
199,0	144,8	96,9	462
264,5	181,9	149,8	453

Propylformiat.

M	K	A	A/K^2
100,5	82,7	32,3	0,00595
151,0	116,0	65,4	612
201,5	146,1	103,6	613
259	178,6	152,4	602

Eisenchloridlösung.

M	K	A	A/K^2
98,5	81,2	49,3	0,00748
150,0	115,1	100,5	759
199,5	145,0	160,6	764
246,0	171,2	221,3	755

Die Zahlen zeigen für alle untersuchten Stoffe so ziemlich denselben Verlauf. Die Magnetisirungsfunction steigt bis auf ein Maximum und sinkt dann wieder. Nimmt man ein Hauptmittel aus allen Stoffen, so erhält man für die vier benutzten Feldstärken folgende Werthe für A/K^2:

0,00638 – 0,00648 – 0 00651 – 0,00627,

in welchen die bei den einzelnen Stoffen vorkommenden, aus Beobachtungsfehlern herrührenden Unregelmässigkeiten sich ausgeglichen haben. Ob man aus diesen Zahlen auf eine Veränderlichkeit der Magnetisirungsfunction, und speciell auf ein Maximum derselben schliessen darf, scheint mir zweifelhaft. Erstens ist die Abweichung der Curve von einer geraden Horizontalen nicht sehr gross, und dann liegt das Maximum bei allen Stoffen sehr nahe auf derselben Stelle. Wenn nun auch die untersuchten Körper chemisch verwandt sind, so scheint doch eine so nahe Uebereinstimmung in dem Verlauf ihrer Magnetisirungsfunction nicht sehr wahr-

scheinlich. Dazu kommt noch, dass das Eisenchlorid dieselbe Curve gibt, wie die organischen Verbindungen. Das kann wohl kaum anders gedeutet werden, als dass die Curve eine Gerade ist, und dass die Krümmung durch eine mangelhafte Beobachtungsmethode hervorgebracht wird. Wenn man also einen Schluss aus diesen Beobachtungen überhaupt ziehen darf, so scheint mir der nächstliegende zu sein: Die Magnetisirungsfunction ist wahrscheinlich constant. Dieses Resultat wird auch durch andere Messungen, über die ich weiter unten berichten werde, bestätigt.

2. Die Abhängigkeit des Magnetismus von der Temperatur.

Um der zu untersuchenden Flüssigkeit die erwünschte Temperatur ertheilen zu können, wurde der ganze untere Theil des Torsionsapparates durch einen kleinen ringförmigen Gasbrenner erwärmt und die Temperatur auf einem hineingesteckten Thermometer abgelesen. Der Brenner war mit einem Thermoregulator verbunden, der sehr gut functionirte. Selbst bei 100° konnte die Temperatur mehrere Stunden lang bis auf wenige Zehntel constant gehalten werden. Die Versuche wurden bei zwei verschiedenen Temperaturen, ungefähr 20° und 90°, angestellt und bei jeder Temperatur wurden 12 Beobachtungen gemacht. Die Resultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

Essigsäureanhydrid

T =	17,2°	95,1°
M =	75,1	66,1

$a = \div 0{,}00148$

Amylchlorid

T =	15,2°	94,5°
M =	96,4	86,1

$a = \div 0{,}00133$

Heptylalkohol

T =	20,1°	96,8°
M =	91,0	81,1

$a = \div 0{,}00128$

Ameisensäure

T =	20,5°	97,2°
M =	74,2	65,1

$a = \div 0{,}00156$

Buttersäure

T =	10,1°	92,7°
M =	84,7	75,1

$a = \div 0{,}00133$

Propylenbromid

19,3°	94,8°
122,5	112,0

$a = \div 0{,}00113$

Aethylenbromid

18,8°	91,1°
111,4	101,0

$a = \div 0{,}00121$

Isovaleriansäure

18,2°	88,7°
82,4	76,3

$a = \div 0{,}00103$

Essi säure

18,2°	92,7°
78,7	70,4

$a = \div 0{,}00136$

Isobuttersäure

17,1°	90,4°
86,1	76,0

$a = \div 0{,}00155$

	Amylalkohol		Isobutylalkohol	
T =	9,6°	90,5°	11,0°	92,5°
M =	89,0	80,9	86,6	77,8
	a = ÷ 0,00109		a = ÷ 0,00120	

	Propionsäure		Allylacetat	
T =	21,0°	92,5°	12,2°	93,3°
M =	78,3	70,6	197,2	174,2
	a = ÷ 0,00132		a = ÷ 0,00142	

	Capronsäure		Caprylen	
T =	15,5°	88,3°	14,7°	91,2°
M =	218,1	199,4	202,8	185,8
	a = ÷ 0,00117		a = ÷ 0,00109	

	Amylvalerat		Aethylvalerat	
T =	19,6°	91,0°	17,0°	91,8°
M =	168,6	152,7	83,9	74,3
	a = ÷ 0,00129		a = ÷ 0,00150	

	Amylacetat	
T =	18,6°	95,1°
M =	87,4	77,4
	a = ÷ 0,00144.	

Nennt man den Magnetismus bei t^0 M_t, bei 0° M_0 und den Temperaturcoëfficienten a, so hat man:

$$M_t = M_0(1 + at).$$

Man sieht, dass a für alle untersuchten Stoffe negativ ist. Sein Werth schwankt zwischen 0,00103 und 0,00156. Die Messungen waren bei hohen Temperaturen mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Es bilden sich im Inneren des Torsionsapparates Luftströme, die den zu magnetisirenden Körper in Bewegung setzen, und das als Dämpfer benutzte Oel wurde so dünnflüssig, dass die Dämpfung wenig wirksam war. Es war deshalb nicht möglich, genaue Ablesungen zu erhalten. Die für a gefundenen Werthe sind deshalb nur als Näherungswerthe zu betrachten, und wenn die Zahlen für die verschiedenen Stoffe ein wenig verschieden ausgefallen sind, so darf man diesem Umstande keine weitere Bedeutung beilegen. Vorläufig nehmen wir also einen gemeinsamen Temperaturcoëfficient an, dessen Werth sich zu:

$$a = 0{,}00133$$

ergibt.

Dieser Coëfficient gilt nun aber für den Volumenmagnetismus, indem das Volumen des Gefässes, in dem die Flüssigkeiten eingeschlossen waren, als unverändert angesehen werden kann. Wie der Coëfficient sich für den specifischen

Magnetismus und den Molecularmagnetismus gestalten werde, kann nur gefunden werden, wenn der Ausdehnungscoëfficient δ des Körpers bekannt ist. Ich stelle unten die Werthe von δ, über die ich Angaben gefunden habe, mit den entsprechenden von a zusammen.

	a	δ	
Ameisensäure . . .	÷0,00156	0,00110	(Zander)
Essigsäure	136	116	"
Propionsäure . . .	132	120	"
Buttersäure	133	115	"
Isobuttersäure . . .	155	118	"
Capronsäure	117	104	"
Amylalkohol	109	109	(Kopp)
Heptylalkohol . . .	138	097	(Zander)
Amylchlorid	133	136	(Pierre)
Amylacetat	144	127	(Kopp)
Aethylvalerat . . .	150	168	(Zander)
Aethylenbromid . . .	121	106	(Thorpe)
Propylenbromid . . .	132	120	(Zander)

Im Mittel ergibt sich für diese Stoffe:

$$a = \div 0{,}00134, \qquad \delta = 0{,}00118.$$

Nennt man den Volumenmagnetismus, den specifischen Magnetismus und das specifische Gewicht bei 0° v_0, m_0 und s_0, und entsprechend bei t^0 v_t, m_t, s_t, so hat man:

$$m_0 = \frac{v_0}{s_0}, \qquad m_t = \frac{v_t}{s_t} = \frac{v_0\,(1 + a\,t)\,(1 + \delta\,t)}{s_0} = m_0\big(1 + (k + \delta)\,t\big).$$

Die Beobachtungen geben:

$$k + \delta = \div 0{,}0_3 16,$$

folglich:

$$\underline{m_t = m_0\,(1 \div 0{,}0_3 16\,t)}.$$

Dieselbe Formel gilt für den Molecularmagnetismus. Der in jedem Molecül dieser diamagnetischen Verbindungen hervorgebrachte Magnetismus ist also nur in sehr geringem Grade von der Temperatur abhängig. Wie bekannt, hat G. Wiedemann für eine Reihe *magnetischer* Metallsalze auch einen negativen, aber bedeutend grösseren Temperaturcoëfficienten ÷0,00325 gefunden.

3. Absolute Messungen.

Um die Magnetisirungsconstante in absolutem Maasse bestimmen zu können, habe ich die magnetisirende Kraft einer Spirale benutzt. Da die Wirkung einer solchen Spirale

auf die sehr schwach magnetischen organischen Körper so klein ist, dass man kaum brauchbare Messungen erhalten kann, habe ich es vorgezogen, die Wirkung auf eine Eisenchloridlösung zu bestimmen und nachher diese Lösung mit den organischen Verbindungen mittelst des Electromagneten zu vergleichen. Zwei gleich grosse Spiralen, *A* und *B*, wurden, wie in Fig. 1, übereinander gestellt. Die Spiralen wurden durch einen Strom entgegengesetzt magnetisirt und ein kleiner Magnet *E* zwischen ihnen so aufgehängt, dass die Wirkungen der beiden Spiralen auf ihn sich gegenseitig aufhoben. In die eine Spirale wurde ein mit Eisenchloridlösung gefülltes Glasrohr *D* und in die andere eine von einem schwachen Strome durchflossene Spirale *C* von denselben Dimensionen eingeschoben und deren Magnetismus miteinander verglichen. Ein Strom von 4—8 Bunsen'schen Elementen wurde in drei Leitungen verzweigt; zwei führten zu den Spiralen *A* und *B* und die dritte durch einen Widerstandskasten zu der kleinen Spirale *C*. Der Widerstand wurde so abgeglichen, dass die Wirkung der Spirale und der Lösung auf den Magneten gleich gross waren. Die Messungen wurden abwechselnd mit der Spirale und der Lösung vorgenommen. Um die Stromstärke zu bestimmen, war ein in Ampères geaichtes Galvanometer in die Hauptleitung eingeschaltet. Zuerst wurde das leere Glasrohr auf seinen Magnetismus geprüft, aber keine messbare Wirkung gefunden, wie folgende Beobachtungsreihe zeigt:

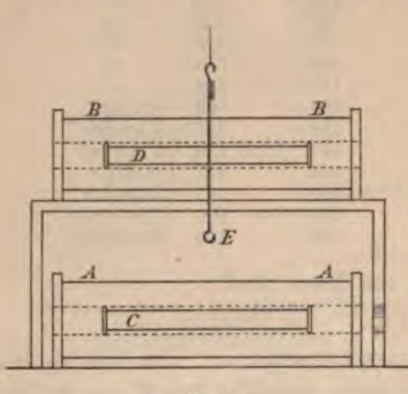


Fig. 1.

	Ausschlag des Magneten	Mittel
Spirale	17,7 — 19,6 — 17,4 — 17,6 — 16,9 — 17,7	17,8
Lösung	19,4 — 18,1 — 17,4 — 17,1 — 16,5 — 17,6	17,7

Stromstärke 1 = 2,17 Amp.

Nennt man den in der Lösung durch die Spirale B hervorgebrachten Magnetismus M_B, den Magnetismus der kleinen Spirale M_C, a und b zwei Constanten, die von den Abständen der Spirale und der Lösung vom Magneten abhängen, so hat man also:

$$b M_B = 17{,}7 \quad \text{und} \quad a M_C = 17{,}8 \quad \text{oder:}$$

$$(1_a) \qquad \frac{b M_B}{a M_C} = 0{,}994.$$

Weitere Reihen gaben folgende Werthe:

$$\frac{b M_B}{a M_C} = 1{,}011 - 0{,}998 - 0{,}975 - 1{,}006 - 0{,}978$$

Mittel $\underline{0{,}996}$.

Die Spirale und die Lösung wurden jetzt gewechselt und in dieser Stellung folgende Werthe erhalten:

$$(1_b) \quad \frac{a M_A}{b M_C} = 0{,}960 - 0{,}987 - 1{,}000 - 0{,}990 - 1{,}007 - 0{,}964 - 0{,}973$$

Mittel $\underline{0{,}983}$.

Die Stromstärke variirte zwischen 1,8 und 3,2 Amp., und es zeigt sich folglich keine Abhängigkeit der Magnetisirungsfunction von der magnetisirenden Kraft.

Für die magnetisirende Wirkung einer Spirale auf einen in seinem Inneren befindlichen Cylinder hat von Waltenhofen[1]) folgende Formel gegeben:

$$M = 4\pi i n\left[\sqrt{R^2 + (L + l)^2} - \sqrt{R^2 + (L - l)^2}\right].$$

Hier bedeutet $2L$ die Länge der Spirale, R deren Radius, n die Anzahl der Windungen auf der Längeneinheit, $2l$ die Länge des Cylinders und i die Stromstärke. Die Formel gilt für einen unendlich dünnen Cylinder, der in der Mitte der Spirale angebracht ist. Der von mir benutzte Cylinder war aber gar nicht unendlich dünn. Ich fand es deshalb nothwendig, den Querschnitt des Cylinders in die Formel einzuführen. Hierzu benutzte ich die folgende Formel von Boltzmann[2]), die die magnetisirende Kraft einer Spirale in der Richtung der Axe auf einen beliebigen Punkt P im Inneren gibt:

---

1) von Waltenhofen, Wien. Ber. **67.** p. 417. 1873.
2) Boltzmann, Wien. Ber. **80.** p. 687. 1879.

$$(2)\begin{cases} X = -2\pi i n\left\{\left(\frac{p_1}{g_1}-\frac{p_2}{g_2}\right)+\frac{3a^2R^2}{4}\left(\frac{p_1}{g_1{}^5}-\frac{p_2}{g_2{}^5}\right)\right. \\ \left.-\frac{15a^4R^2}{16}\left(\frac{p_1}{g_1{}^7}-\frac{p_2}{g_2{}^7}\right)+35\,\frac{2a^6R^2+3a^4R^4}{64}\left(\frac{p_1}{g_1{}^9}-\frac{p_2}{g_2{}^9}\right)-\dots\right\}. \end{cases}$$

Hier bedeutet p_1 und p_2 die auf die Axe projicirten Abstände der beiden Enden der Spirale vom Punkte P, a der Abstand des Punktes von der Axe, $g^2 = R^2 + p^2$. Denkt man sich einen Cylinder von der Länge $2l$ und dem Radius ϱ in die Mitte der Spirale hineingebracht und integrirt obigen Ausdruck über das ganze Volumen des Cylinders, so erhält man für das in dem Cylinder hervorgebrachte magnetische Moment:

$$\begin{aligned} M = 4\pi^2 i n k \varrho^2 \Big\{ & \left[(R^2+(L+l)^2)^{1/2} - (R^2+(L+l)^2)^{1/2}\right] \\ & - \tfrac{1}{8} R^2\varrho^2\left[(R^2+(L+l)^2)^{-3/2} - (R^2+(L-l)^2)^{-3/2}\right] \\ & + \tfrac{1}{16} R^2\varrho^4\left[(R^2+(L+l)^2)^{-5/2} - (R^2+(L-l)^2)^{-5/2}\right] \\ & - \tfrac{5}{128}(R^2\varrho^6 - 2R^4\varrho^4)\left[(R^2+(L+l)^2)^{-7/2} - (R^2+(L-l)^2)^{-7/2}\right] + \dots \Big\}, \end{aligned}$$

wo k die Magnetisirungsfunction bedeutet. Das erste Glied stimmt mit der Formel von von Waltenhofen überein.

Meine Spiralen hatten folgende Dimensionen:

	Spirale A	Spirale B	Spirale C
Länge	30,2 cm	30,2 cm	20,1 cm
Innerer Durchmesser .	5,09 "	5,19 "	2,03 "
Aeusserer " .	8,65 "	8,84 "	
Windungen	911 "	896 "	325 "
Lagen	8 "	8 "	1 "

Die Durchmesser wurden an acht verschiedenen Stellen und an jeder Stelle in zwei aufeinander senkrechten Richtungen gemessen. Die inwendigen Dimensionen des Glascylinders waren:

Länge 20,17 cm, Durchmesser 1,953 cm.

Führt man die Berechnung für die beiden Spiralen durch, so erhält man:

$$M_A = k\iota_1\, 22249, \qquad M_B = k\iota_2\, 21866$$

und für die kleine Spirale:

$$M_C = i\,1052.$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln (1_a) und (1 ein, so kommt:

$$b\,k\,\iota_2\,21866 = 0{,}996\,.\,a\,.\,\iota\,.\,1052,$$
$$a\,k\,\iota_1\,22249 = 0{,}983\,.\,b\,.\,\iota\,.\,1052.$$

Um ι, ι_1, ι_2 zu finden, muss man die Widerstände der drei Leitungen A, B, C kennen. Diese sind:

$$R_A = 1{,}693 \text{ Ohm}, \quad R_B = 1{,}616 \text{ Ohm}, \quad R_C = 1802 \text{ Ohm}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\iota = 0{,}0_3 458\,6\,J, \quad \iota_1 = 0{,}4882\,J, \quad \iota_2 = 0{,}5114\,J,$$

wenn J den Hauptstrom bedeutet.

Mit diesen Werthen erhält man endlich:

$$\underline{k = 42{,}9\,.\,10^{-6}}.$$

Um die Genauigkeit des Resultates zu prüfen, habe ich dieselbe Lösung auch nach anderen Methoden untersucht. Boltzmann hat die Formel (2) dazu benutzt, um die Kraft zu berechnen, mit welcher ein magnetischer Körper in eine Spirale hineingezogen wird. Für den Fall, dass der Körper ein mit der Spirale conaxialer Cylinder ist, dessen eine Hälfte sich im Inneren der Spirale befindet, hat er folgenden Ausdruck gefunden:

$$K = \frac{8\pi^2 k n^2 \iota^2 \varrho^2 l}{\sqrt{R^2 + l^2}}\left[1 + \frac{3\varrho^2 R^2}{8(R^2 + l^2)^2} - \frac{R^2(L^2 + l^2)}{2(L^2 - l^2)} - \frac{R^2 L \sqrt{R^2 + l^2}}{L^2 - l^2} + \cdots\right].$$

Für eine Spirale von ν Windungslagen vom Radius r bis R hat hieraus Ettingshausen[1]) folgende Formel berechnet, die er bei Bestimmung der Magnetisirungsconstante des Wismuthes benutzte:

$$K_1 = \frac{8\pi^3 k n^2 \nu^2 \iota^2 \varrho^2 l}{R - r}(\xi + \zeta - \eta - \theta),$$

wo:

$$\xi = \log\frac{R + \sqrt{R^2 + l^2}}{r + \sqrt{r^2 + l^2}},$$

$$\zeta = \frac{\varrho^3}{8 l^2}\left(\frac{R^3}{\sqrt{R^2 + l^2}^3} - \frac{r^3}{\sqrt{r^2 + l^2}^3}\right),$$

$$\eta = \frac{L^2 + l^2}{4(L^2 - l^2)^2}\left(R\sqrt{R^2 + l^2} - r\sqrt{r^2 + l^2}\right) - l^2 \log\frac{R + \sqrt{R^2 + l^2}}{r + \sqrt{r^2 + l^2}}.$$

$$\theta = \frac{L(R^3 - r^3)}{3(L^2 - l^2)^2}.$$

1) Ettingshausen, Wied. Ann. 17. p. 272. 1882.

Was die Genauigkeit dieser Formel betrifft, verweise ich auf Ettingshausen's Abhandlung. Ich habe die Versuche in derselben Weise wie Ettingshausen angestellt (Fig. 2). Ein Cylinder mit Eisenchloridlösung a war am einen Ende eines horizontalen Holzbalkens b befestigt und am anderen Ende durch ein Gläschen mit Quecksilber c äquilibrirt. Das Ganze wurde von einem dünnen Messingfaden, der an der Mitte des Balkens befestigt war, getragen. Das Drehungsmoment, welches die Spirale auf den Balken ausübt, wird durch die Torsion des Fadens im Gleichgewicht gehalten. Der Torsionswinkel wurde mittelst Fernrohr und Spiegel gemessen. Nennt man den Hebelarm des Balkens s, das Trägheitsmoment K, die Schwingungsdauer T, den Abstand der Spiegel von der Scala δ und die abgelesenen Scalentheile A, so erhält man:

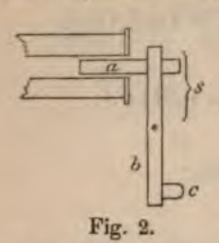


Fig. 2.

$$k = \frac{K(R-r)}{16\iota^2 s\pi n^2\nu^2\varrho^2 l(\xi+\zeta-\eta-\theta)\delta}\frac{A}{T^2}.$$

Die hier angewendete Spirale ist die mit A bezeichnete. Das bei den früheren Versuchen benutzte Glasrohr konnte nicht zur Anwendung kommen, da es zu gross war, um sich mit dem nothwendigen Spielraum im Inneren des Cylinders bewegen zu können. Das neue Rohr war 10,82 cm lang mit 0,720 cm Durchmesser. Das Trägheitsmoment wurde durch Schwingungsversuche bestimmt und zu:

$$K = 8120$$

gefunden. Die übrigen Grössen hatten folgende Werthe: $s = 7{,}38$ cm, $\delta = 141{,}4$ cm, $L = 30{,}2$ cm, $R = 4{,}28$ cm, $r = 2{,}60$ cm, $n\nu = 30{,}16$. Hieraus berechnet sich:

$$k = 0{,}0_4 3916\,\frac{A}{i^2 T^2}.$$

Die Stromstärke wurde durch ein Kupfervoltameter gemessen. Zuerst wurde das Glasrohr leer untersucht und schwach diamagnetisch gefunden. Als Mittel aus drei Beobachtungsreihen ergab sich $A_1 = -0{,}25$ für $i = 1$ Amp. Aus den Beobachtungen mit gefülltem Cylinder gebe ich die ersten Reihen

in extenso wieder. Die Ablenkungen bei geschlossenem (g)- und geöffnetem (o)-Strom waren:

g 505,5 — 505,0 — 504,4 — 503,9 — 503,6 — 503,4
o 524,6 — 524,3 — 524,1 — 523,9 — 523,6,

$$\iota = 1{,}22 \text{ Amp.}, \quad T = 34{,}56 \text{ sec.}$$

Hieraus findet sich: $k = 44{,}1 \,.\, 10^{-6}$.

Die Ergebnisse der folgenden Reihen sind in nachstehender Tabelle enthalten:

ι	T	A	k	ι	T	A	k
1,27	34,56	19,5	43,9 . 10^{-6}	2,78	34,70	97,9	41,3 . 10^{-6}
1,36	34,56	24,8	44,1	1,57	34,55	31,6	42,1
2,23	34,51	65,0	42,9	1,66	34,61	34,4	40,5
2,01	34,50	52,0	42,6	2,40	34,44	73,1	42,1
1,82	34,70	42,4	41,5	2,40	34,62	74,0	42,1
1,78	34,71	40,5	41,8				

Darauf wurde die Spirale mit fünf neuen Windungslagen versehen und nachfolgende Beobachtungen angestellt:

ι	T	A	k	ι	T	A	k
1,76	34,55	99,3	43,5 . 10^{-6}	1,41	34,43	59,6	41,0 . 10^{-6}
1,67	34,51	88,3	43,3	1,40	34,50	59,3	41,5
1,76	34,64	99,9	43,4	1,85	34,51	104,2	41,5
1,43	34,42	65,0	43,1	2,20	34,38	151,6	42,9
1,70	34,25	92,5	44,5	2,02	34,40	127,9	43,1
2,23	34,41	157,0	43,4	1,67	34,49	84,8	41,5
2,35	34,44	175,9	43,4				

Als Mittel aus allen Reihen ergibt sich:

$$k = 42{,}6 \,.\, 10^{-6}.$$

Endlich habe ich einige Versuche mit dem Weber'schen Diamagnetometer angestellt. Dazu benutzte ich zwei Glasröhren A und B und zwei Spiralen a und b, deren Dimensionen waren:

	A	B	a	b
Länge . . .	13,50 cm	13,46 cm	13,55 cm	13,62 cm
Radius . . .	0,696 „	0,694 „	0,688 „	0,691 „
Windungen .	—	—	215	220

In die eine Spirale des Diamagnetometers wurde ein Glasrohr in die andere eine Spirale hineingehängt und die Wirkung auf das Magnetpaar verglichen. Der Strom von 1—3 Accumulatoren wurde in zwei Leitungen verzweigt. Die eine führte zum Dynamometer, die andere durch einen Widerstandskasten zu der Vergleichsspirale. Dieser Wider-

stand R wurde so abgeglichen, dass die Wirkung der Spirale und des Rohres einander gleich waren. Dann wurde abwechselnd mit der Spirale und dem Rohre beobachtet, indem das Rohr gehoben und gesenkt und in der Spirale der Strom gewechselt wurde. Die nachstehende Tabelle gibt die Resultate einer Beobachtungsreihe:

Spirale a links Rohr A rechts
$i = 2$ Amp. $R = 3200$ Ohm.

	Ablenkungen			
Rohr . . .	22,95	22,90	22,82	22,65
Spirale . .	22,55	22,56	22,55	22,03
Temp. . .	23,0	22,3	22,7	20,3

Der Strom im Diamagnetometer gewechselt:

Rohr	16,05	15,78	15,13
Spirale	16,85	16,90	16,72
Temp.	21,6	22,0	21,9

Mittel: Rohr 19,24 Spirale 19,62 Temp. 21,8.

Jede der angeführten Zahlen ist das Mittel aus drei Beobachtungen. Die Windungen des Diamagnetometers wurden immer vom Strome ein wenig erwärmt, wobei der Widerstand sich änderte. Da der Strom sich zwischen Diamagnetometer und Vergleichsspirale nach Maass der Widerstände theilt, war es nothwendig, die Temperatur bei jedem Versuche zu beobachten und die Veränderung des Widerstandes in der Diamagnetometerleitung mit der Temperatur zu bestimmen. Es wurde gefunden:

$$W = 0{,}7937 + 0{,}00163\, t \text{ Ohm.}$$

Nach dieser Formel wurden alle Beobachtungen für 20° berechnet. Obiges Mittel wird dann:

Rohr 19.30 — Spirale 19,62.

Spirale und Rohr wurden jetzt gewechselt und eine Reihe Beobachtungen mit:

Rohr A links Spirale a rechts

angestellt. Daraus ergab sich:

Rohr 17.94 Spirale 17,52.

Hierzu kommt noch eine kleine Correction wegen des Magnetismus des leeren Glasgefässes, welches sich zu 0,03 ergab.

In ganz ähnlicher Weise wurden Beobachtungen mit Spirale *B* und Rohr *b* angestellt. Um aber nochmals den Einfluss der magnetisirenden Kraft auf die Magnetisirungsfunction prüfen zu können, wurde mit drei verschiedenen Stromstärken ungefähr 1, 2 und 3 Amp. gearbeitet. Die Resultate waren:

Rohr *B* links	Spirale *b* rechts		
i	3 Amp.	2 Amp.	1 Amp.
Rohr	26,96	17,73	9,27
Spirale	26,67	17,54	9,15
Spirale *a* links	Rohr *A* rechts		
Rohr	23,80	15,35	7,86
Spirale	28,30	18,41	9,51

Das Mittel aus beiden Reihen gibt:

$\frac{\text{Rohr}}{\text{Spirale}}$	0,923	0,920	0,918

Da das magnetische Moment der Spirale der Stromstärke proportional ist, so geht hieraus hervor, dass die Magnetisirungsfunction constant ist. Um deren Werth zu berechnen, müssen noch folgende Grössen gegeben sein. Der Widerstand der Vergleichsspirale mit Zuleitung $W = 3202$ Ohm. Die Anzahl Windungen pro Längeneinheit der Diamagnetometerspiralen sind resp. $n_R = 3{,}67$, $n_L = 3{,}64$. Die Länge der Spiralen war 85 cm. Mit so langen Spiralen und so kleinen Cylindern, wie die hier benutzten, hat es keinen Sinn, mit der früher angeführten weitläufigen Formel zu rechnen. Hat die Spirale eine Länge $2L$, einen Radius r und eine Anzahl Windungen N, so ist die magnetisirende Kraft in der Mitte:

$$M = \frac{2\pi Ni}{\sqrt{L^2 + r^2}},$$

und der in dem Cylinder hervorgebrachte Magnetismus:

$$m = kv \cdot \frac{2\pi Ni}{\sqrt{L^2 + r^2}},$$

wenn v das Volumen des Cylinders ist. Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass diese Formel für die vorliegenden Versuche hinlänglich genau ist. Die Durchführung der Rechnung hat ergeben:

Für Rohr A $k = 43{,}9 \,.\, 10^{-6}$,
" " B $k = 41{,}9 \,.\, 10^{-6}$,
Mittel $k = 42{,}9 \,.\, 10^{-6}$.

Als Mittel aller Versuche nach den verschiedenen Methoden ergibt sich also:

$$k = 42.8 \,.\, 10^{-6}.$$

Es erübrigt noch, die Eisenchloridlösung mit einem der früher behandelten Körper zu vergleichen, und hierzu eignet sich am besten Wasser. Da indessen der Magnetismus der benutzten Lösung so viel mal grösser ist, als derjenige des Wassers, war eine directe Vergleichung schwierig auszuführen. Ich habe deshalb vorgezogen, eine schwächere Lösung als Zwischenglied zu verwenden. Die Beobachtungen, die mit dem Electromagnet und Torsionsapparat in der früher beschriebenen Weise angestellt wurden, gaben folgende Resultate:

$\frac{\text{Lösung I}}{\text{Lösung II}}$ = 10,70—11,56—11,15—11,33—11,19—11,14—11,20—11,11—10,95
Mittel 11,15

$\frac{\text{Lösung II}}{\text{Wasser}}$ = 5,19 — 5,14 — 4,91 — 5,15 — 5,12 — 5,08
Mittel 5,12.

Mit diesen Factoren können die Magnetisirungsfunctionen der früher behandelten organischen Verbindungen in absolutem Maasse berechnet werden. Ich will die lange Liste nicht aufzählen. Nur will ich meine Zahlen, soweit es sich thun lässt, mit denjenigen anderer Experimentatoren vergleichen. Für Eisenchloridlösungen liegen mehrere Beobachtungen vor, die aber nicht sehr übereinstimmend zu sein scheinen. Ich ordne sie nach dem specifischen Gewichte:

Sp. Gew.	k	Autor	Sp. Gew.	k	Autor
1,24	$15{,}2 \,.\, 10^{-6}$	Bergmann	1,48	$57{,}1 \,.\, 10^{-6}$	Ettingshausen
1,36	42,9	Henrichsen	1,487	48,8	Borgmann
1,395	35,1	Schumeister	1,52	37,1	Borgmann
1,395	31,6	Schumeister	1,52	55—142	Silow
1,475	81,5	Silow			

Für die übrigen Substanzen habe ich nur einige Versuche von Schumeister gefunden. Seine Werthe sind kleiner als die von mir gefundenen und variiren stark mit der magnetisirenden Kraft, wie aus folgender Zusammenstellung hervorgeht:

	Wasser	Alkohol	Aether	Schwefelkohlenstoff
Schumeister	0,533—0,433	0,451—0,367	0,397—0,290	0,462—0,368 . 10^{-6}
Henrichsen	0,751	0,609	0,582	0,739 . 10^{-6}

Schliesslich möchte ich noch einige Versuche von Külp[1]) erwähnen. Unter einer Reihe von Abhandlungen über magnetische Correctivkraft finden sich auch einige Beobachtungen über den Einfluss der Aggregation. Dabei hat er auch eine Eisenchloridlösung untersucht. Dieselbe wurde in eine enge Glasröhre eingeschlossen und durch eine Spirale mit steigender Stromstärke magnetisirt. Bei jeder Stromstärke wurde auch die entgegengesetzte Magnetisirung vorgenommen. Es ergab sich dann, dass die positive und negative Magnetisirung ungleich waren; die negative war immer kleiner. Der Unterschied war ziemlich gross. Bei der grössten Stromstärke verhielt sich der positive zu dem negativen Magnetismus, wie 33:25. Auch ein kleiner remanenter Magnetismus wurde gefunden. Diese Resultate schienen mir höchst auffallend, und da ich damals eben damit beschäftigt war, meine Eisenchloridlösung nach der Boltzmann'schen Anziehungsmethode zu untersuchen, beschloss ich, die Külp'schen Resultate einer Prüfung zu unterwerfen. Ich liess einen Strom von ungefähr 2 Amp. durch die Spirale fliessen und beobachtete die Anziehung des Rohres mit der Lösung bei gewechselter Stromesrichtung. Die Ablesungen waren:

	Nullpunkt 503,3	Mittel
$J+$	395,0 — 396,9 — 397,1 — 394,7 — 395,2	395,8
$J\div$	395,9 — 395,0 — 393,8 — 395,5	395,1

also die Ablenkungen $A+ = 108{,}2$, $A\div = 107{,}5$. Ich liess dann die Lösung 30 Minuten lang in derselben Richtung magnetisiren und beobachtete wieder mit gewechselter Stromrichtung. Ich fand:

	Nullpunkt 502,6
$J+$	423,9 — 422,7 — 424,9 — 422,9 — 419,0 — 415,6 — 415,2
$J\div$	423,6 — 425,1 — 421,1 — 419,8 — 418,3 — 416,1

Mittel	420,6	$A+ = 82{,}0$
	420,7	$A\div = 81{,}9$

Hier scheint wirklich ein kleiner Unterschied vorhanden zu sein, der aber sehr gut von Unregelmässigkeiten in der

1) Külp, Exner's Rep. 25. p. 135. 1889.

Stromstärke herrühren kann. Der Strom wurde nämlich von einem Dynamo geliefert und war ein wenig schwankend, was man ja auch aus den Ablesungen ersehen kann. Ich wiederholte deshalb die Versuche mit dem Strom von Bunsen'schen Elementen. Die Stromstärke wurde jedesmal auf einer Tangentenbussole gemessen, die immer in derselben Richtung von dem Strome durchflossen wurde. Die Bussole war in einem Abstande von ungefähr 10 m von der Spirale aufgestellt, und eine Einwirkung von der Spirale konnte gar nicht beobachtet werden. In der folgenden Tabelle bedeutet *T* die Tangentenbussole.

J	*T*	*J*	*T*	*J*	*T*
Nullp. 501,3	— 640,3	+ 404,7	— 43,0	— 408,4	— 50,9
+ 400,8	— 38,5	÷ 405,3	— 43,2	+ 408,6	— 53,0
÷ 401,0	— 39,0	+ 405,8	— 45,0	÷ 409,3	— 54,4
+ 402,0	— 40,0	— 406,5	— 45,2	+ 409,5	— 56,2
÷ 403,0	— 40,2	+ 406,7	— 47,0	502,6	— 640,0
+ 403,4	— 41,6	÷ 407,6	— 48,2	Nullpunkt	
÷ 404,3	— 42,2	+ 407,6	— 49,9		

Hieraus erhält man:

T	*A*
+ 594,2	+ 96,4
÷ 594,8	÷ 96,2

Hier ist also ein Unterschied von derselben Grösse wie früher gefunden. Nachdem aber die Lösung entfernt worden war, machte ich eine ganz ähnliche Beobachtungsreihe mit dem leeren Gefässe und mit derselben Stromstärke, und fand einen Unterschied in demselben Sinne von 0,1 bis 0,2 Scalentheilen. Der Unterschied rührt also nicht von der Lösung her, und meine Versuche widersprechen entschieden den Külp'schen Resultaten. Ob ein remanenter Magnetismus vorhanden ist, kann nach dieser Methode nicht geprüft werden.

Kristiania, September 1891.

V. *Zur Electrodynamik der Leiter;*
von E. Cohn.

Bezüglich der Isolatoren haben die Hertz'schen Versuche den Sieg der Maxwell'schen Electrodynamik über die älteren Theorien entschieden. Künftige Erfahrungen mögen sie in Einzelheiten modificiren und erweitern; aber wir dürfen überzeugt sein, in ihr die sicheren Grundlagen unserer Erkenntniss gewonnen zu haben. —

Nicht so für die Leiter. Dass für diese Theorie und Erfahrung in Widerspruch treten, sobald man sehr schnell veränderliche Zustände (Lichtschwingungen) in's Auge fasst, hat schon Maxwell selbst[1]) hervorgehoben. Er bemerkt, dass sowohl Electrolyte, wie Metalle für Lichtwellen besser durchlässig sind, als sich mit ihren electrischen Constanten verträgt. Sofern es sich nun um Electrolyte handelt, kann man eine Erklärung dieses Widerspruchs in der Bewegung ponderabler Massen, der Ionen, finden.[2]) — Bezüglich der Metalle wird, soweit mir bekannt, die Auffassung Maxwell's bis heute allgemein getheilt. Auch die folgenden Zeilen wollen den Widerspruch nicht beseitigen, sondern ihn vielmehr schärfer formuliren. Es wird sich dabei zeigen, dass er tiefergehend und für die Grundlagen der Maxwell'schen Theorie bedenklicher ist, als man bisher angenommen hat.

Wir betrachten die Ausbreitung einer ebenen electromagnetischen Welle im Innern eines homogenen Leiters. Dieselbe muss, als ein innerer Vorgang, nothwendig durch die *inneren* Constanten des Mediums, die kritische Geschwindigkeit V und die Relaxationszeit T, vollkommen bestimmt sein. Die gewöhnlich benutzten Constanten, Leitungsvermögen, Dielectricitätsconstante, magnetische Constante — können in den betr. Gleichungen nur in solchen Combinationen auftreten, die sich durch V und T ausdrücken lassen.

1) Maxwell, Phil. Trans. f. 1864. p. 504 u. Treatise II. § 798 ff.
2) Vgl. E. Cohn, Wied. Ann. **38.** p. 217. 1889.

Wir gehen daher zweckmässig von den **Maxwell'schen** Gleichungen in derjenigen Form aus, in welcher ich sie [1]) dargestellt habe:

$$\frac{dL}{dt} = V\left(-\frac{dZ}{dy} + \frac{dY}{dz}\right) \text{ etc.} \tag{1}$$

$$\frac{X}{T} + \frac{dX}{dt} = V\left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right) \text{ etc.} \tag{2}$$

wo

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) \text{ die electrische,} \\ \frac{1}{2}(L^2 + M^2 + N^2) \text{ die magnetische} \end{cases} \tag{3}$$

Energie der Volumeneinheit bedeutet. Indem wir aus (1) und (2) eine der Gruppen $L\,M\,N$ oder $X\,Y\,Z$ eliminiren, erhalten wir u. A. [2])

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{1}{T}\frac{dX}{dt} = V^2 \Delta X. \tag{4}$$

Nehmen wir noch $X \ldots N$ unabhängig von x und y an, so ist ein Integral von (4):

$$X = e^{-pz} \sin(nt - qz), \text{ sofern} \tag{5}$$

$$V^2(q^2 - p^2) = n^2 \text{ und} \tag{6}$$

$$V^2 . 2pq = \frac{n}{T} \text{ ist.} \tag{7}$$

Die Gleichung (5) stellt eine nach $+z$ fortscheitende Welle dar mit der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{n}$, der Wellenlänge $\frac{2\pi}{q}$, dem Absorptionscoefficienten $\frac{p}{q}$. (Man erhält die Gleichungen (4) bis (7) in Maxwell's Bezeichnungen [3]) mittelst der Substitutionen

$$T = \frac{K}{4\pi C}, \qquad V^2 = \frac{1}{\mu K}, \tag{8}$$

wo K die Dielectricitätsconstante, C das Leitungsvermögen, μ die magnetische Constante ist.)

Wären also für ein bestimmtes Medium V und T bekannt, so würden die Gleichungen (6) und (7) für jede Schwingungsdauer die zugehörigen optischen Constanten, Wellenlänge und Absorptionscoefficienten, ergeben müssen.

1) Cohn, Wied. Ann. **40.** p. 626. 1890.

2) Unter der Voraussetzung: $\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = o$, welche keine wesentliche Beschränkung enthält.

3) Maxwell, Treatise II, § 798.

Maxwell[1]) benutzt zur Berechnung von p ausschliesslich die Gleichung (7). Indem er für den specifischen Widerstand des Goldes den Werth einsetzt, welchen Messungen mit stationären Strömen ergeben (und, was nicht besonders erwähnt wird, für die magnetische Constante und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Werthe, die mit den für Luft gültigen der Grössenordnung nach übereinstimmen), folgt eine Absorption, die ausserordentlich viel stärker ist, als die Beobachtung sie ergiebt. Also, so folgert Maxwell, muss weniger Energie verloren gehen, wenn die electrischen Kräfte schnell wie die Lichtschwingungen ihre Richtung wechseln, als wenn sie für längere Zeit andauern. Zu dem gleichen Ergebnis würden, bei gleicher Schlussweise, auch neuere Bestimmungen der optischen Constanten führen. Setzt man z. B. für Gold das specifische Leitungsvermögen, bezogen auf Quecksilber, 50, die magnetische Constante 1, den Brechungsexponenten der rothen Strahlen nach Kundt[2]) 0,4, so folgt aus (7) und (8) für die Absorption dieser Strahlen: $2p = 47 \,.\, 10^7 \text{ cm}^{-1}$. Hingegen ergaben die directen Messungen von Rathenau[3]): $2p = 42 \,.\, 10^4 \text{ cm}^{-1}$. Aehnliches gilt für andere Metalle. — Auch die Messungen der Reflexionsconstanten der Metalle von Drude[4]) führen qualitativ zu dem gleichen Resultat, wenn auch zu abweichenden numerischen Werthen.

Zu ganz anderen Ergebnissen aber gelangen wir, wenn wir nicht mit Maxwell die Gleichung (7) einseitig bevorzugen, sondern zur Bestimmung der Unbekannten p und q die *beiden* Gleichungen (6) und (7) benutzen.

a) Löst man sie nach q und p auf, so erhält man Brechung und Absorption als Function der Schwingungszahl für alle Körper durch das gleiche Gesetz dargestellt, in welchem lediglich die zwei Parameter V und T den einzelnen Körper charakterisiren. Nach diesem Gesetz giebt es weder anomale Dispersion noch auswählende Absorption. Dasselbe wird den Thatsachen nicht einmal in den gröbsten Zügen gerecht.

1) Maxwell, siehe besonders Phil. Trans. l. c.

2) Kundt, Wied. Ann. **34.** p. 477, 1888.

3) Rathenau, Die Absorption des Lichtes in Metallen. Inaugural-Dissertation, Berlin 1889.

4) Drude, Wied. Ann. **39.** p. 537 und 553. 1890.

b) Wir wissen aber zum Voraus, dass wir mit diesem Verfahren unerfüllbare Anforderungen an unsere Gleichungen gestellt haben. In dieser Richtung versagt unsere Theorie selbst für Isolatoren; denn sie ergibt für die letzteren *gar keine* Dispersion. Wir erkennen hierin eine Unvollständigkeit der Theorie, aber wir werden dadurch nicht genöthigt, an der Richtigkeit ihrer Grundlagen zu zweifeln. Wir können die „Optik *einer* Schwingungszahl" mit derselben Berechtigung auf electromagnetischer, wie früher auf elastischer, Grundlage aufbauen, wenn wir uns auch zunächst bescheiden müssen, den Parameter unserer Gleichungen (V) als rein empirisch gegebene Function der Schwingungszahl aufzufassen.

c) *Unsere*, für Leiter gültigen, Gleichungen enthalten ausser V noch die Relaxationszeit T. Dürfen wir auch dieser für wechselnde Schwingungszahl wechselnde Werthe zuschreiben? — T ist definirt — und kann unter Umständen bestimmt werden — aus einem Vorgang, bei welchem der Körper, sich selbst überlassen, aperiodisch seine electrische Energie verliert.[1]) Dieser Vorgang wird allein durch den Werth von T bestimmt; keine andere physikalische oder geometrische Grösse kommt dabei in Frage; von keiner dem System von aussen aufgezwungenen Periode kann dabei die Rede sein. — Daraus schliesse ich: T ist entweder eine absolute Constante des Mediums, — oder die Gleichungen, die es enthalten, sind im Kern unrichtig.

d) Die Ueberlegungen unter b) und c) führen uns dazu, aus den Gleichungen (6) und (7) V zu eliminiren. Wir erhalten:

$$(9) \qquad \frac{q}{p} - \frac{p}{q} = 2\,n\,T$$

als eine Beziehung, welche für einen gegebenen Körper durch ein constantes T bei allen n befriedigt werden soll. Diese Gleichung steht aber mit aller Erfahrung im vollständigen Widerspruch.

In allen Fällen, wo $\frac{p}{q}$ klein gegen 1 ist, d. h. wo erst auf einer Strecke von vielen Wellenlängen merkliche Absorption stattfindet, würde $\frac{q}{p} = 2\,n\,T$ oder, wenn wir den Bre-

1) E. Cohn, Wied. Ann. **40**. p. 638. 1890.

chungsexponenten β und die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum V_0 einführen,

$$2p = \frac{\beta}{V_0 T} \tag{9a}$$

sein müssen, d. h. die Curve der Absorption (auf gleiche Schichtdicken bezogen) müsste sich mit der Curve der Brechungsexponenten decken. — Für sehr verdünnte Lösungen ist ferner erfahrungsmässig [1]) die Dielectricitätsconstante sehr wenig von derjenigen des reinen Lösungsmittels verschieden. Es wird also (s. Gl 8) in

$$2p = \frac{4\pi}{V_0 K} \cdot \beta C \tag{9b}$$

allein das Product βC von dem gelösten Körper abhängig, nnd alle verdünnten wässrigen Lösungen z. B. von gleichem Leitungsvermögen müssten die Strahlen gleicher Brechbarkeit auch gleich stark absorbiren. Jede gefärbte Lösung zeigt, wie sehr das erste, und ihr Vergleich mit einer beliebigen anderen Lösung, wie sehr das zweite Gesetz von der Wahrheit entfernt ist. Will man gleichwohl die Formeln numerisch weiter verfolgen, so hätte man (wenn C in absoluten, magnetischem Maasse ausgedrückt wird) für wässrige Lösungen $K = \frac{80}{9 \cdot 10^{20}}$, und daraus z. B. für eine einprocentige Na Cl-Lösung: $2p = 0{,}08 \text{ cm}^{-1}$, während Glan [2]) für eine 14procentige Lösung und rothes Licht: $2p = 0{,}01 \text{ cm}^{-1}$ findet. In den meisten Fällen wird sich, wie hier, die berechnete Absorption viel zu stark ergeben; an den Stellen starker Absorption wird auch einmal das Gegentheil eintreten. — Auch für Gläser genügen die vorliegenden Daten, so unsicher sie im übrigen sein mögen, um darzuthun, dass unsere Gleichung weit entfernt ist, die Thatsachen darzustellen.

Bisher war von sehr schlechten Leitern die Rede, für welche man T mehr oder weniger genau messen kann. Sie sind sicher zum grössten Theil, und wahrscheinlich alle Electrolyte; man kann also die in der Einleitung (p. 33) erwähnte Bemerkung zu Gunsten der Maxwell'schen Theorie geltend machen.

---

1) E. Cohn und L. Arons, Wied. Ann. **33.** p. 24. 1888 und E. Cohn, Berl. Ber. 1891, p. 1037.

2) Glan, Pogg. Ann. **141.** p. 69. 1870.

Für metallische Leiter können wir bisher T nicht bestimmen; wir können auch seine Grösse selbst der Ordnung nach nicht schätzen. *Aber es muss eine positive Zahl sein; — und aus Gleichung (9) ergibt es sich für alle Metalle negativ. Denn für alle Metalle ist nach Kundt und Rathenau, wie nach Drude*[1] $\frac{p}{q} > 1$.

e) Will man den Schluss unter c) nicht gelten lassen, so darf man V und T als unbekannte Functionen der Schwingungszahl ansehen. Auch dann aber können unsere Gleichungen für die Lichtbewegung *in Metallen* nicht richtig sein. Denn für letztere ist, wie soeben erwähnt, $p > q$, — und somit ergeben sich aus (6) und (7), für V^2, wie für T negative Werthe. *Die Absorption ist* thatsächlich nicht kleiner — wie Maxwell annahm — sondern *grösser, als selbst bei freiester Verfügung über die Constanten mit der Theorie verträglich ist.*

Die *Form* der Gleichungen verliert auf diesem Gebiete ihre Gültigkeit.

f) Auch auf dem Boden der electromagnetischen Theorie sind Dispersion und Absorption behandelt worden. Es war dazu nöthig, wie in der mechanischen Behandlung der gleichen Aufgabe, das durchstrahlte Medium als inhomogen, aus Aether und Materie zusammengesetzt, zu betrachten. Diesen Untersuchungen gegenüber erheben die vorstehenden Zeilen selbstverständlich keinerlei kritische Ansprüche; meine Absicht war vielmehr ausschliesslich, zu zeigen, wie weit die Maxwell'schen Gleichungen uns ein verlässlicher Führer sein können. Dieses Gebiet glaube ich in folgender Weise abgrenzen zu könne:

1. Die Gleichungen (1) (2) (3) haben sich bewährt im Fall $T = \infty$, d. h. für Nichtleiter, durchweg, sofern man V als empirische Function der Periode betrachtet. — Hier kommen die Glieder $\frac{X}{T}\cdots$ nicht vor.

2. Sie haben sich ferner bewährt im Fall endlicher T, d. h. der Leiter, für stationäre Zustände: Ohm'sches Gesetz, Stromverzweigung, magnetische Wirkungen stationärer Ströme.

---

1) ll. cc.; Drude's $\varkappa$ ist identisch mit unserem $\frac{p}{q}$, Rathenau's k, mit unserem $2p$.

— Hier kommt die dielectrische Polarisation der Leiter, d. h. die Glieder $\frac{dX}{dt}\cdots$ nicht in Frage.

3. Desgleichen für quasi-stationäre Zustände, d. h. Vorgänge, die noch so langsam verlaufen, dass die zeitliche Ausbreitung im Leiter nicht zur Erscheinung kommt: Inductionserscheinungen bis zur Entladung von Leydener Flaschen einschliesslich. — Die Glieder $\frac{dX}{dt}\cdots$ fallen ausser Betracht.

4. Ein Fehler ist nicht merkbar geworden, selbst für die viel schnelleren Hertz'schen Schwingungen. Aber hier blieb das Innere der Leiter überhaupt ausser Spiel [1]); die Vorgänge vollzogen sich, so weit sie der Messung und der Berechnung unterworfen werden konnten, ausschliesslich im umgebenden Dielectricum.

5. Für einige sehr schlecht leitende Flüssigkeiten sind die Gleichungen (2) richtig befunden in dem Specialfall, wo die rechten Seiten $=0$ werden. [2])

6. *Es gibt nur eine experimentell untersuchte Classe von Erscheinungen, in welchen die Gleichungen (1) (2) mit ihren sämmtlichen Gliedern zur Geltung kommen müssten: die Durchstrahlung der Leiter. Und hier versagen sie.*

Ich weiss nicht anzugeben, wo die bessernde Hand anzulegen ist, ohne dass zugleich der Theil des Fundaments gefährdet würde, auf dem bereits ein mächtiges Gebäude ruht; aber ich glaube, dass es für die Fortführung des Baues schon nützlich sein kann, wenn zunächst die vorgetragenen Bedenken anerkannt, — oder widerlegt werden.

Strassburg i. E., October 1891.

---

1) Abgesehen von einigen Versuchen J. J. Thomson's über Electrolyte.

2) Cohn und Arons, Wied. Ann. **28.** p. 454. 1886. Der Ausdruck im Text gibt das *wesentliche* des Vorgangs, entspricht aber nicht genau der Versuchsanordnnng. Um zu haben $\frac{X}{T}+\frac{dX}{dt}=0$, hätte man das *Verschwinden* der Ladung auf dem unvollkommen isolirenden Condensator beobachten müssen. Statt dessen wurde das *Entstehen* der Ladung messend verfolgt. Dieses wird unter den Versuchsbedingungen erzeugt durch eine Superposition der Vorgänge 2. und 5.

VI. *Ueber die Reflexion von Strahlen electrischer Kraft an Schwefel- und Metallplatten; von Ignaz Klemenčič.*

(Aus den Sitzungsberichten d. kais. Academie d. Wissenschaften in Wien Mathem.-naturw. Classe; Bd. C. Abth. II. a. Februar 1891; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Februar 1891.)

Prof. Hertz hat in seinen berühmten Versuchen [1]) nachgewiesen, dass sich die Strahlen electrischer Kraft in sehr vielen Punkten geradeso verhalten, wie die Licht- oder Wärmestrahlen. Solche Strahlen werden reflectirt, gebrochen nach den gleichen Gesetzen wie die Lichtstrahlen und sie besitzen auch eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche der des Lichtes nahe gleichkommt. Die den Strahl erzeugenden electrischen Schwingungen sind polarisirt, geschehen in der Richtung der Axe der Pimärinductoren und werden durch ein der Schwingungsrichtung parallel gestelltes Drahtgitter aufgehalten. Wenn sich nun die Strahlen electrischer Kraft von den Lichtstrahlen sonst nicht wesentlich, als nur durch die Wellenlänge unterscheiden, dann muss sich die Thatsache der Polarisation auch bei der Reflexion an Dielectricis bemerkbar machen, und zwar muss entsprechend dem Verhalten optischer Strahlen die Reflexion bei einer bestimmten Schwingungsrichtung gegen die Einfallsebene ganz besonders hervortreten, bei der darauf senkrechten jedoch sehr schwach sein und bei einem bestimmten Winkel geradezu verschwinden. An Metallen soll bei beiden Schwingungsrichtungen und unter allen Incidenzwinkeln reflectirt werden, obwohl auch da, gemäss den optischen Erfahrungen, eine verschiedene Intensität der Reflexion je nach der Schwingungsrichtung zu erwarten wäre. Die vorliegende Untersuchung hatte den Zweck, die Reflexion von Strahlen electrischer Kraft an einem Dielectricum, dem Schwefel, und

---

1) Hertz, Wied. Ann. **36.** p. 769. 1889.

an einer Zinkplatte qualitativ und quantitativ zu erforschen und ihr Verhalten auch in dieser Beziehung mit dem der Lichtstrahlen zu vergleichen.

Die Frage der Reflexion electrischer Schwingungen an einem Dielectricum ist bereits von zwei Seiten berührt worden. Trouton [1]) beobachtete die Reflexion an einer gewöhnlichen, 3 Fuss dicken Gebäudemauer und dann an einer 13 cm dicken, 180 cm langen und 120 cm hohen Paraffinwand. Er fand an der Mauer eine Reflexion der Strahlen, wenn die Richtung der electrischen Verschiebungen im Strahle senkrecht stand zur Einfallsebene; sonst konnte er nichts beobachten. Danach würde die Polarisationsebene mit der Ebene der magnetischen Verschiebungen zusammenfallen. Rubens und Ritter [2]) untersuchten die Reflexion an einer Glasplatte, bekamen jedoch kein Resultat. Der Grund für diese Thatsache ist schon von Trouton angegeben worden. Hat nämlich die reflectirende Wand eine gegen die Wellenlänge sehr geringe Dicke, dann tritt bei der Reflexion der electrischen Schwingungen die Erscheinung auf, welche beim Newton'schen Farbenglase den dunklen Fleck erzeugt.

Zur Untersuchung der Strahlen bediente ich mich der Secundärinductoren mit eingeschaltetem Thermoelement, wie ich sie bereits in einer früheren Abhandlung beschrieben habe.[3])
Es wurden auch jetzt zwei Inductoren verwendet; der eine als Standard, der andere als eigentlicher beweglicher Secundärinductor. Diese Methode gestattet, ebenso wie die von Rubens und Ritter angewendete bolometrische Methode, eine quantitative Auswerthung der Vorgänge, während dies bei Anwendung von Resonatoren mit Funkenmikrometern weniger leicht durchgeführt werden kann. Die Reflexion wurde an einer 120 cm langen, 80 cm breiten und 7 cm dicken, aus zwölf Ziegeln zusammengestellten Schwefelplatte und an einer ebenso grossen, aber natürlich weit dünneren Zinkplatte gemessen. Ueberdies untersuchte ich auch den von den Platten durchgelassenen Theil des Strahles. Die Versuche über die

---

1) Trouton, Nature, **39.** p. 391 1890. u. **40.** p. 398. 1890.
2) Rubens u. Ritter, Wied. Ann. **40.** p. 55. 1890.
3) Klemenčič, Wien. Sitzber. **99.** Abth. II. a., Juli 1890.

Reflexion an Metallen vervollständigte ich durch Beobachtungen an einem Drahtgitter und an einer runden Zinkscheibe. Die Dimensionen der reflectirenden Platten und der Spiegel gestatteten die Untersuchung nur bei Incidenzwinkeln zwischen 30 und 70°; aber selbst bei 70° wurde durch die Platte ein Theil der Spiegel abgeblendet.

Indem ich bezüglich der Resultate auf das weiter unten Angeführte verweise, bemerke ich nur, dass sich zwischen der Reflexion an der Zinkplatte und jener an der Schwefelplatte ein Unterschied ergeben hat, welcher der Qualität nach dem Verhalten der Lichtstrahlen entspricht. Die Intensität der Reflexion ist verschieden je nach der Schwingungsrichtung des Strahles. Bei der Schwefelplatte bekommt man unter allen Incidenzwinkeln eine kräftige Reflexion, wenn die Schwingungen zur Einfallsebene senkrecht stehen. Anders verhält sich die Platte gegen Strahlen, die der Einfallsebene parallel schwingen. Hier kann nur bei kleinen Incidenzwinkeln eine schwache Reflexion wahrgenommen werden; die Intensität derselben nimmt mit zunehmendem Einfallswinkel ab und bei 60 und 65° konnte mit den hier angewendeten Messungsmitteln eine bemerkbare Zurückwerfung nicht festgestellt werden. Diese Thatsache stimmt mit den optischen Verhältnissen sehr gut überein, insofern, als sich aus dem Brechungsexponenten des Schwefels in der That ein Polarisationswinkel zwischen 60 und 65° ergibt. Hinsichtlich der Frage nach der Schwingungsrichtung im polarisirten Lichte folgt aus diesen Versuchen dasselbe, was auch Trouton (l. c.) gefunden hat. Es wurde ferner beobachtet, dass die Intensität des von der Schwefelplatte durchgelassenen Strahles genau entgegengesetzt geht wie die Intensität der Reflexion.

Eine Anwendung der Fresnel'schen Intensitätsformeln zur Berechnung der an der Schwefelplatte erhaltenen Resultate kann, so gute Uebereinstimmungen sich für einzelne Incidenzwinkel ergeben würden, im Allgemeinen doch nicht Platz greifen, da einige bemerkenswerthe, mit dem Verhalten der Lichtstrahlen nicht harmonirende Erscheinungen auftreten, die wahrscheinlich darin ihren Grund haben, dass die Dimensionen der reflectirenden Wand im Vergleiche mit der Wellenlänge des Strahles zu klein sind.

1. Die Apparate.

Bei der Erzeugung und Untersuchung des Strahles bildeten die parabolischen Hohlspiegel einen wesentlichen Bestandtheil. Um die Handhabung derselben zu erleichtern, musste bei der Construction derselben von den Angaben Hertz's abgegangen werden; die Dimensionen wurden in allen Richtungen kleiner genommen. So betrug die Weite der Spiegel (Fig. 1) 75 cm, ihre Tiefe 37 und ihre Höhe 78 cm. Durch eine solche Verkürzung der Dimensionen leidet die

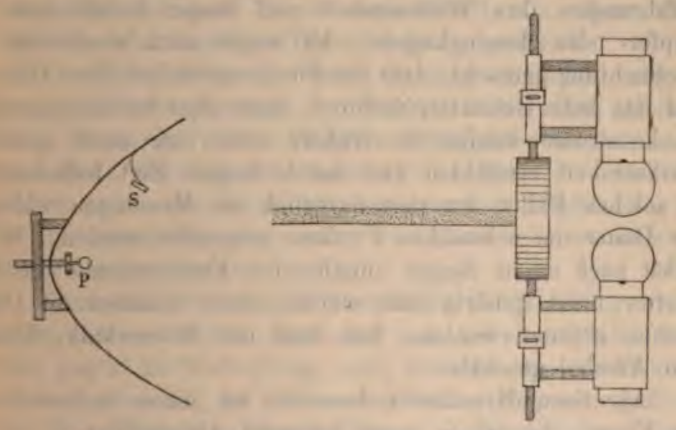


Fig. 1. Fig. 2.

Wirksamkeit der Spiegel, und es hat Hertz in einem Briefe an Fitzgerald ausdrücklich auf die Nothwendigkeit einer grösseren Länge hingewiesen, um den Einfluss der an den Ecken auftretenden Anhäufungen der Electricität zu vermindern. Die hier verwendeten kleinen Spiegel zeigten in der That eine viel geringere verstärkende Kraft als die grossen, nach den Angaben von Hertz verfertigten, deren ich mich in einem früheren Falle bediente. Ich schätze ihre Wirksamkeit nur auf die Hälfte (oder noch weniger) der grossen; vergleichende Versuche habe ich noch nicht gemacht. Das parabolisch gekrümmte Blech der Spiegel war in einem Holzrahmen befestigt und dieser Rahmen selbst so construirt, dass man den Spiegel entweder vertical oder horizotal stellen konnte, wobei die Spiegelmitte immer nahezu in gleicher Höhe blieb.

Der Primärinductor war genau nach den Angaben von Hertz verfertigt, die ihm entsprechende Welle hat eine Länge von 66 cm. Die einander zugekehrten Theile der kugelförmigen Oberfläche waren mit dünnem Platinblech belegt. Die Befestigung des Primärinductors im Spiegel geschah in einer aus Fig. 1 und 2 ersichtlichen Weise. In diesen Figuren sind die punktirten Theile aus Glas, die schraffirten aus Holz, die übrigen aus Metall.

Die Platinbelegung an der Inductorenoberfläche ist sehr zu empfehlen, da solche Inductoren nach den hier gemachten Erfahrungen ihre Wirksamkeit viel länger beibehalten als Kupfer- oder Messingkugeln. Es wurde auch wiederholt die Beobachtung gemacht, dass die Funken plötzlich ihre Activität und das helle Geknatter verloren, dann aber bei fortgesetztem Funkenstrome wieder die frühere oder eine noch grössere Wirksamkeit erreichten und durch längere Zeit beibehielten. In solchen Fällen mussten natürlich die Messungen während der Dauer der schwachen Funken ausgesetzt werden. Wenn selbst nach einem länger anhaltenden Funkenstrome das Geknatter nicht gehörig laut wurde, dann mussten die Oberflächen geputzt werden, was stets mit Wienerkalk, Wasser und Alkohol geschah.

Als Secundärinductor benutzte ich einen Inductor von der Form, die ich in einer früheren Abhandlung (l. c.) beschrieb; er besteht aus zwei dünnen, 10 cm breiten, zwischen Glasplatten gekitteten Messingblechen von je 30 cm Länge, deren zugekehrte und 3 cm von einander entfernte Enden durch ein Thermoelement, bestehend aus einem feinen Platin- und Patentnickeldrath, verbunden sind. Dieser Inductor war im Secundärspiegel angebracht, und zwar wurde er an einer die Spiegelwand durchsetzenden Glasstange befestigt. Im Primärspiegel war ausser dem Primärinductor auch noch ein kleiner Standardinductor an zwei an der Spiegelwand angelötheten Drähten aufgestellt (*S*, Fig. 1). Seine Entfernung vom Primärinductor *P* betrug 18 cm. Der Standardinductor war viel kleiner als der Secundärinductor. Die Breite der Messingstreifen war hier nur 1 cm, ihre Länge nur je 25 cm; das Thermoelement war bei beiden gleich. Die Wirksamkeit solcher Inductoren hängt von der Breite derselben ab; für den

Standardinductor, der sehr nahe dem Primärinductor ist, genügt die geringe Breite von 1 cm; ja, er muss sogar möglichst schmal sein, um nicht die vom Primärinductor ausgehenden Strahlen zu stören.

Die Schwefelplatte war aus 12 Ziegeln aufgebaut. Jeder Ziegel hatte eine Höhe von 20, eine Länge von 40 und eine Dicke von 7 cm. Das Gewicht eines Ziegels betrug 11,5 kg, das Gewicht der ganzen Platte 138 kg. Die Ziegel wurden in eine Holzform gegossen und die Formwände vor dem Gusse ein wenig eingeölt. Vor der Zusammenstellung der Platte wurden die einzelnen Ziegel vorsichtshalber an ihrer Oberfläche mit scharfkantigen Glasscherben abgeschabt.

Die Platte wurde in einem Rahmen aufgebaut und von diesem zusammengehalten. Der Rahmen selbst ruhte auf einem starken Kreuz, an dessen Enden sich Rollräder befanden. Die untere Seite des Rahmens hatte in der Mitte eine Bohrung; in diese passte ein am Boden festgemachter Zapfen, um welchen der ganze Rahmen sammt der Platte wie um eine Axe gedreht werden konnte.

Wenn sich die Strahlen electrischer Kraft analog wie die Lichtstrahlen verhalten, dann darf man bei einer Platte, deren Dicke gegen die Wellenlänge sehr klein ist, keine bedeutende Reflexion erwarten, da die an den beiden Begrenzungsflächen reflectirten Theile eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge haben und sich bei der Interferenz schwächen. Um eine besonders kräftige Reflexion zu haben, muss die Dicke der Platte eine solche sein, dass durch den Weg des Strahles in der Platte die Phasendifferenz auf eine ganze Wellenlänge gebracht wird. Dies gibt für den Schwefel und für die vorhandene Wellenlänge eine Dicke von ungefähr 7 cm. Ueberdies ist bei der grossen Wellenlänge eine gewisse Ausdehnung der Platte in die Höhe und Länge nothwendig, daher wurden die entsprechenden Dimensionen zu 80 und 120 cm gewählt.

Die das Galvanometer, das Inductorium und den Interruptor betreffenden Verhältnisse sind schon in der bereits erwähnten Arbeit (l. c.) beschrieben worden und waren hier wie dort die gleichen.

2. Die Anordnung der Versuche.

Die Anordnung der Apparate ist zum Theil aus Fig. 3 ersichtlich. Die Axe der reflectirenden Platte, bez. der am Boden befestigte Zapfen bildete den Mittelpunkt eines Kreises, auf dessen Peripherie die beiden Spiegel standen. Die Peripherie des Kreises war am Boden mit Kreide verzeichnet und in Grade eingetheilt. Der Pimärspiegel stand bei 60°; er wurde nur hin und wieder um ein kleines Stück längs des Halbmessers, nie aber längs der Peripherie verschoben.

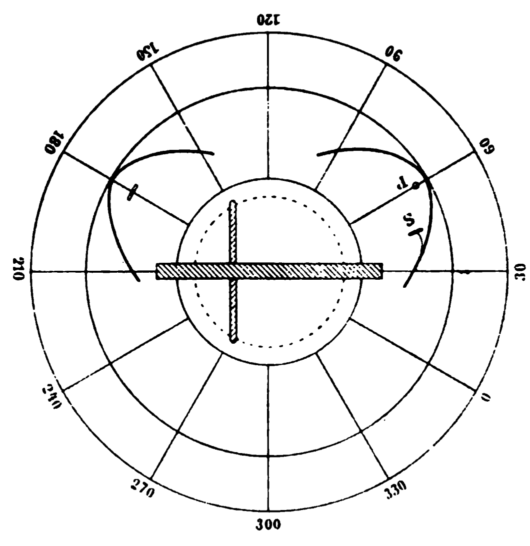


Fig. 3.

Der Secundärspiegel war auf einem mit Rollrädern versehenen Stuhle aufgestellt und konnte an der Peripherie hin und her bewegt werden. Die Mitte der Platte, sowie die des Primär- und Secundärspiegels waren stets in gleicher Höhe.

Vom Thermoelement des Standardinductors gingen zwei Drähte zu einem ausserhalb des Spiegels stehenden Commutator und von da führte die Leitung durchs Galvanometer zum Secundärinductor. Der Commutator wurde aus vier kleinen, mit Quecksilber gefüllten Gläsern gebildet, welche sich wieder in einem grösseren, mit Wasser gefüllten Gefässe be-

fanden, wodurch Temperaturunterschiede im Commutator vermieden werden sollten. Ich brauche wohl kaum hinzuzufügen, dass die Ueberbrückungsdrähte des Commutators dicht mit Baumwolle bewickelt waren, um beim Angreifen derselben Thermoströme zu vermeiden. Alle Zuleitungsdrähte waren so weit als möglich in Zöpfe geflochten.

Um eine möglichst kräftige Wirkung zu bekommen, musste ich mit den Spiegeln so nahe an den Mittelpunkt des Kreises rücken, als es die reflectirende Platte erlaubte. Es war daher der Durchmesser des Kreises, auf welchem die Spiegel, oder genauer gesagt, der Primär- und Secundärinductor standen, bei der zur Einfallsebene parallelen Schwingungsrichtung = 184 cm und bei der darauf senkrechten = 170 cm. Der Vorgang bei der Beobachtung war nun folgender: Vom Beobachtungsfernrohre aus konnte mittelst eines electrisch betriebenen Schlüssels der Pimärstrom des Inductoriums geschlossen werden. Geschah dies, so setzte sich die Galvanometernadel in Folge der im Standard- und Secundärinductor entwickelten Energie und thermoelectromotorischen Kraft in Bewegung. Der Funkenstrom wurde stets durch 10 Secunden unterhalten. Die Notirung des Ausschlages geschah nun in der Weise, dass stets die Ruhelage vor Beginn des Funkenstromes, dann der Umkehrpunkt nach Aufhören desselben und schliesslich noch der erste Umkehrpunkt beim Zurückschwingen durch die Ruhelage aufgeschrieben wurden. Der Unterschied zwischen der zweiten Ablesung und dem Mittel der beiden anderen war je nach der Stellung des Commutators ein Maass für die Summe oder Differenz der im Secundär- und Standardinductor entwickelten Energie. In den folgenden Tabellen ist immer das Verhältniss der dem Secundärinductor entsprechenden Ausschläge zu jenen des Standard verzeichnet. Es ist selbstverständlich, dass immer eine Reihe von Bestimmungen der Summe und Differenz ausgeführt wurde.

Der dem Standardinductor entsprechende Ausschlag betrug unter normalen Verhältnissen 10 Scalentheile. Manchesmal war er etwas grösser und einigemale, als die Oberfläche der Primärinductoren besonders günstig und das Funkengeknatter besonders hell und laut war, bekam ich sogar 16 Scalentheile dafür. In solchen Fällen muss die Dämpfung der

Oscillationen besonders klein sein, während sonst vielleicht nur fünf oder sechs Schwingungen auftreten. Fiel der erwähnte Ausschlag auf 8 und blieb die geringe Wirksamkeit auch nach einem länger andauernden Funkenstrome fortbestehen, so wurde frisch geputzt.

Durch die beschriebene Aufstellung des Standardinductors ist derselbe störenden Einflüssen entzogen worden. Die entsprechenden Ausschläge variirten, wie erwähnt, je nach der Beschaffenheit der Oberfläche der Primärinductoren; es konnte jedoch in keiner Weise constatirt werden, dass die Ausschläge bei einer bestimmten Anordnung der Apparate im Allgemeinen grösser gewesen wären als bei irgend einer anderen.

3. Die Beobachtungsresultate.

A. Untersuchung des seitlichen Einflusses.

Im Nachfolgenden bedeutet das Zeichen $\perp$, dass die Schwingungsrichtung des Primärinductors senkrecht zur Einfallsebene oder vertical war; $\parallel$ bedeutet, dass sie der Einfallsebene parallel oder horizontal war.

Ferner bezeichnen:

Die griechischen Buchstaben immer das Verhältniss der dem Secundärinductor entsprechenden Ausschläge zu jenen des Standardinductors, und zwar so wie es beobachtet wurde.

Die lateinischen Buchstaben dieses Verhältniss in Theilen jenes Verhältnisses, welches bei der geraden Gegenüberstellung der Spiegel erhalten wurde; es sind also die lateinischen Buchstaben ein Maass des beobachteten Effectes, bezogen auf den Effect des einfallenden Strahles als Einheit.

Zunächst wurde die Einwirkung des Primärspiegels auf den Secundärspiegel in gerader Richtung und nach verschienen Seitenrichtungen untersucht. Zu diesem Zwecke wurde der Secundärspiegel an verschiedenen Stellen der Peripherie aufgestellt. Die Stelle 240^0 entspricht der geraden Richtung. In den Tabellen I und II sind die Resultate, wobei δ und d das Maass der beobachteten Energie sind; φ gibt die Stellung des Secundärspiegels.

Tabelle I. ⊥

φ	δ	d
240	2,32	1
220	1,92	0,83
200	1,05	0,45
180	0,48	0,21
160	0,18	0,06
140	0,19	0,06
120	0,23	0,10

Tabelle II. ‖

φ	δ	d
240	2,10	1
220	1,45	0,69
200	1,02	0,49
180	0,55	0,26
160	0,26	0,12
140	0,24	0,11
120	0,21	0,10

Die Einwirkung auf den Secundärspiegel nimmt bis zur Stellung bei 180° ab; dann bleibt sie ziemlich constant. Man sieht also, dass eine ziemlich beträchtliche Seitenwirkung vorhanden ist, die sich bis zur Stellung von 180° erstreckt.

Die Werthe von d für $\varphi = 160$, 140 und 120 kann ich nicht einer directen Einwirkung des Primärinductors zuschreiben, da ich Ausschläge von dieser Grössenordnung auch dann erhielt, wenn ich die Spiegel kreuzte; ich möchte eher annehmen, dass sie einer Einwirkung auf die Zuleitungsdrähte entsprechen. Es liegt auch die Annahme nicht ferne, dass die im Standard inducirten Schwingungen längs der Zuleitungsdrähte zum Secundärinductor laufen und dort auf das Thermoelement einwirken. Dieser Theil kann nur gering sein, da vom Secundärinductor auch dann noch etwas Energie angezeigt wurde, wenn der Standardinductor bei gekreuzten Spiegeln ausgeschaltet war.

B. Die Reflexion bei ‖ Schwingungsrichtung.

In den nachfolgenden Tabellen ist α immer das Maass für die Intensität des reflectirten Strahles; a daher die Intensität des reflectirten durch die Intensität des einfallenden.

β und b geben den Werth der vom Secundärinductor angezeigten Energie für den Fall, dass die Platte um 90° gedreht, also in die Richtung des früheren Einfallslothes gestellt wurde. Bei dieser Stellung übt die Schwefelplatte nahezu keinen Einfluss aus, wie eine Vergleichung der Werthe von β mit den entsprechenden Werthen von δ der Tabellen I und II zeigt. Ist daher bei einem bestimmten Incidenzwinkel $\alpha = \beta$, so ist das ein sicheres Zeichen, dass nichts reflectirt wird. i bedeutet den Einfallswinkel.

Tabelle III.

Metallplatte.

i	α	β	a	b
30	2,81	0,23	1,34	0,11
40	2,09	0,25	1,00	0,12
50	2,01	0,09	0,96	0,04
60	1,82	0,08	0,87	0,04

Tabelle IV.

Schwefelplatte.

i	α	β	a	b
30	0,72	0,20	0,34	0,10
40	0,40	0,17	0,19	0,08
50	0,46	0,26	0,22	0,12
55	0,47	0,37	0,22	0,17
60	0,51	0,49	0,24	0,23
65	0,52	0,58	0,25	0,28

C. Die Reflexion bei ⊥ Schwingungsrichtung.

Tabelle V.

Metallplatte.

i	α	a
30	2,43	0,91
40	5,10	1,92
50	3,27	1,23
60	2,93	1,10
70	2,22	0,84

Tabelle VI.

Schwefelplatte.

i	δ	β	a	b
30	0,90	0,22	0,38	0,10
40	1,76	0,20	0,76	0,08
50	2,26	0,33	0,97	0,14
60	1,80	0,76	0,77	0,33
65	1,68	1,17	0,72	0,50

Hier ist sowohl bei der Metallplatte als auch bei der Schwefelplatte eine kräftige Reflexion zu bemerken.

D. Die Intensität des durchgelassenen Strahles.

Schwingungsrichtung ∥.

Tabelle VII.

Metallplatte.

i	γ	g
45	0,12	0,06
55	0,20	0,10
65	0,22	0,10
75	0,36	0,17
90	1,75	0,83

Tabelle VIII.

Schwefelplatte.

i	γ	g
30	1,88	0,90
40	2,10	1,00
50	2,58	1,23
60	2,52	1,20
65	2 82	1,34
90	3,18	1,50

Schwingungsrichtung ⊥.

Tabelle IX.

Metallplatte.

i	γ	g
0	0,15	0,05
40	0,17	0,06

Tabelle X.

Schwefelplatte.

i	γ	g
30	2,06	0,89
40	1,83	0,79
50	1,20	0,52
60	0,60	0,26
65	0,49	0,21
90	5,10	2,20

Es folgt aus diesen Tabellen, dass die Metallplatte nichts durchlässt, was ja schon bekannt ist; der kleine, bei niederen Incidenzwinkeln erhaltene Ausschlag rührt von anderen bereits erwähnten Einflüssen her. Bei grösseren Einfallswinkeln deckt die Metallplatte nicht mehr den Spiegel.

Bei der Schwefelplatte geht die Intensität des durchgelassenen Strahles entgegengesetzt wie die des reflectirten. Es sei noch erwähnt, dass bei senkrechter Incidenz 0,84 Proc. bei ‖ und 0,78 Proc. bei ⊥ Schwingungsrichtung durchgelassen wurden.

E. Die Reflexion an einem Drahtgitter.

Das Drahtgitter hatte die Dimensionen wie die untersuchte Metallplatte. Die Drähte waren in einem gegenseitigen Abstande 1,5 cm vertical gespannt; daher geschah die Untersuchung bei ⊥ Schwingungsrichtung. Es wurden folgende Werthe gefunden.

Tabelle XI.

i	α	β	a	b
30	1,88	0,16	0,84	0,07
40	3,60	0,12	1,60	0,05
50	4,01	—	1,77	—
60	2,69	—	1,20	—
65	2,02	0,08	0,90	0,04

Für die Intensität des einfallenden Strahles wurde diesmal der Werth 2,25 gefunden. Eine Prüfung des Gitters bezüglich seiner Durchlässigkeit für Strahlen electrischer Kraft ergab, dass es gerade so wie die Metallplatte wirkt.

Rubens und Ritter (l. c.) untersuchten ein grösseres Gitter und fanden bei einem Einfallswinkel von 30° die Intensität des reflectirten Strahls gleich 98 Proc. von der des einfallenden. Diese Versuche ergeben bei 30° 84 Proc. bei anderen Winkeln mehr als 100 Proc.

F. Die Reflexion an einer runden Metallplatte.

Die Platte war aus Zinkblech, hatte einen Durchmesser von 80 cm und ergab nachstehende Resultate.

Tabelle XII.

Schwingungsrichtung ⊥.

i	α	a
30	1,92	0,86
40	3,08	1,37
50	3,31	1,48
60	1,63	0,72

Bei $i = 0$ wurde nichts durchgelassen.

G. Discussion der Resultate.

Aus den oben angeführten Tabellen ist nicht ohne Weiteres zu entnehmen, welcher Theil des beobachteten Werthes von einer wirklichen Reflexion herrührt und wie viel davon auf andere Erscheinungen, die ich Störungen nennen möchte, entfällt. Diese Störungen können zum Theile a) wirklich als solche bezeichnet werden, zum Theile aber bilden sie b) einen integrirenden Bestandtheil der Reflexion, wodurch eine genaue Erforschung derselben von besonderer Wichtigkeit wird.

Zu den mit a) bezeichneten Störungen rechne ich:

1. Den Umstand, dass der Secundärinductor stets auch bei gekreuzten Spiegeln einen kleinen Ausschlag gab, welcher wahrscheinlich in einer Induction in den Zuleitungsdrähten seinen Grund hat. Diese Störung ist in allen Beobachtungen enthalten und summirt sich zu den anderen Werthen.

2. Die directe Einwirkung des Primärspiegels auf den Secundärspiegel. Diese Störung macht sich bei Einfallswinkeln von 60^0 und darüber bemerkbar und kann zu der Reflexionswirkung entweder positiv oder negativ hinzutreten. Unter der Voraussetzung, dass der Strahl bei der Reflexion an der vorderen Schwefelwand keine Phasenänderung erleidet, ist bei ⊥ Schwingungsrichtung eine Andeutung über das Zeichen durch Rechnung zu finden. Bei ∥ Schwingungsrichtung liegt die Sache complicirter. Ich habe die Frage für $i = 60^0$ und ⊥ Schwingungsrichtung auch experimentell untersucht und gefunden, dass bezüglich des Zeichens die Rechnung mit dem Experiment übereinstimmt. [1])

1) Zu diesem Zwecke habe ich in der Richtung des Einfallslothes eine Metallscheibe aufgestellt und bei verschiedenen Abständen derselben

Zu den mit b) bezeichneten Störungen zähle ich:

3. Die Erscheinung, dass in gewissen Fällen die Intensität s reflectirten Strahles jene des einfallenden weitaus überfft. Diese Erscheinung tritt insbesondere bei der Reflexion der Metallplatte auf (vide z. B. Tabelle V; $i = 40$); sie ielt jedoch, wie mir scheint, auch bei der Reflexion an der hwefelplatte eine Rolle. Diese Störung ist grösser für die ⊥, für die ∥ Schwingungsrichtung, wodurch die Ursache derben schon zum Theile angedeutet ist; sie liegt jedenfalls rin, dass die Dimensionen der reflectirenden Platte zu klein d; es tritt in solchen Fällen eine schon von Trouton (l. c.) obachtete Eckenwirkung auf. Ueber die Grösse dieser Stöng können nur weitere Versuche Aufschluss geben.

4. Schliesslich ergeben sich aus der Betrachtung der Intenäten des reflectirten und durchgelassenen Strahles eigenimliche Verhältnisse; die Summe der beiden ist grösser als Intensität des einfallenden Strahles. Ueberraschend sind

---

n der Schwefelplatte die Reflexion untersucht. In der Tabelle XIII deutet d die Entfernung des einen Endes der Metallwand von der rderen Fläche der Schwefelplatte. α und β; a und b haben dieselbe deutung wie früher.

Tabelle XIII.

$i = 60^\circ$, ⊥ Schwingungsrichtung.

d cm	α	β	a	b
16	0,25	0,30	0,11	0,13
21	0,22	—	0,10	—
26	0,32	0,35	0,14	0,15
31	0,68	0,52	0,29	0,22
36	1,12	0,53	0,48	0,23
41	1,54	0,59	0,66	0,25
46	2,06	0,63	0,89	0,27

Bei $d = 46^\circ$ ist α grösser als der entsprechende Werth in Tabelle VI, ährend β noch kleiner ist. Daraus schliesse ich, dass der Werth von α r $i = 60^\circ$, Tabelle VI, durch die Störung 2 heruntergedrückt wird. teressant ist auch die Thatsache, dass die Werthe von α und β für = 16, 21 und 26, nahezu gleich sind, woraus folgt, dass durch die Me-lplatte selbst bei der verhältnissmässig grossen Entfernung von 26 cm Reflexion aufgehoben wird; es hat den Anschein, als wenn gerade Mitte der Schwefelplatte bei der Reflexion gar nicht betheiligt wäre.

aber die hohen Werthe des durrchgelassenen Strahles für $i=0$, also für den Fall, dass die Schwefelplatte parallel steht zur Axe des Strahles; zumal wenn man bedenkt, dass die Plattendicke nur 7 cm beträgt.

Zur Uebersicht stelle ich in der nachfolgenden Tabelle XIV die der Schwefelplatte entsprechenden Werthe zusammen.

Tabelle XIV.

Schwingungsrichtung ∥					Schwingungsrichtung ⊥			
Reflectirt				Durchgelassen	Reflectirt			Durchgelassen
i	a	b	$a-b$	g	a	b	$a-b$	g
30	0,34	0,10	**0,24**	**0,90**	0,38	0,10	**0,28**	**0,89**
40	0,19	0,08	**0,11**	**1,00**	0,76	0,08	**0,68**	**0,79**
50	0,22	0,12	**0,10**	**1,21**	0,97	0,14	**0,63**	**0,52**
55	0,22	0,17	**0,05**	—	—	—	—	—
60	0,24	0,23	**0,01**	**1,20**	0,77	0,33	—	**0,26**
65	0,25	0,28	**0,03**	**1,34**	0,72	0,50	—	**0,21**

Die Werthe $a-b$ sind ein Maass für die Intensität der Reflexion und die von g für die Intensität des durchgelassenen Strahles. Ich habe für die ⊥ Schwingungsrichtung die Werthe von $a-b$ nur für die ersten drei Einfallswinkel aufgeschrieben, bei welchen sich der sub 2 beschriebene störende Einfluss noch nicht bemerkbar macht. Bei der ∥ Schwingungsrichtung ist aus den Werthen von $a-b$ für $i = 60$ und 65^0 zu ersehen, dass unter diesen Winkeln beinahe gar nichts reflectirt wird. Dies gilt ganz bestimmt für $i = 60$; für $i = 65$ könnte man aus den entsprechenden Werthen eher auf eine schwache Reflexion schliessen.

Vergleicht man die bei der Reflexion am Drahtgitter, dann an der rechteckigen und runden Metallplatte erhaltenen Werthe, so findet man nur für $i = 30$ überall nahezu denselben Werth; die anderen Einfallswinkel ergeben verschiedene Resultate, was wieder darauf hindeutet, dass die Form der reflectirenden Platte bei der Reflexion maassgebend ist. Aus dem Umstande, dass die Beobachtung für $i = 30$ in allen drei Fällen nahezu das gleiche Resultat ergab, könnte man schliessen, dass der gefundene Werth wirklich das richtige Maass für die Intensität der Reflexion ist. Würde man diese Annahme

ıf die Schwefelplatte übertragen und aus der bei ⊥ Schwin-
ıngsrichtung für $i = 30$ festgestellten Zahl für $a—b$ nach
en Fresnel'schen Intensitätsgleichungen den Werth des
rechungsexponenten für die Schwefelplatte rechnen, so würde
ch in der That ein Werth nahe gleich 2 ergeben. Aber
ıch aus den für ∥ Schwingungen gefundenen Daten folgen
'erthe für den Brechungsexponenten, welche von den opti-
hen Bestimmungen dieser Constanten nicht sehr abweichen.

Für eine genaue numerische Berechnung müssten die
'erthe von $a—b$ noch eine Correctur erfahren, die bis jetzt
cht berücksichtigt wurde. Ich habe bisher als Intensität
›s einfallenden Strahles bei ∥ und ⊥ Schwingungsrichtung
e ersten Werthe der Tabelle I und II, welche natürlich
ittel aus mehreren Beobachtungen sind, genommen. In
esen Werthen ist jedoch die sub 1 angeführte Störung ent-
ılten; daher sind bei einer genaueren Berechnung die obigen
'erthe noch mit 1,08 zu multipliciren.

Aus den angeführten Beobachtungen ergeben sich folgende
'esultate:

1. Die Metallplatte reflectirt den Strahl sehr kräftig, so-
'ohl bei ⊥ als ∥ Schwingungsrichtung. Die Beobachtungen
rgaben für die ⊥ Schwingungen einen grösseren Werth als
ür die ∥. Diese Erscheinung kann jedoch zum Theil auch
ı der Form der Platte, nicht aber in einem dem Metalle
igenthümlichen Verhalten ihren Grund haben.

2. Die Schwefelplatte reflectirt den Strahl bei ⊥ Schwin-
ıngsrichtung kräftig; bei ∥ schwach und da nur bei Einfalls-
vinkeln, welche unter 60° liegen. Die Intensität des reflectirten
Strahles ist im letzten Falle um so grösser, je kleiner der
Einfallswinkel. Bei 60 und 65° ist mit den angewendeten
Beobachtungsmitteln eine Reflexion nicht mit Sicherheit nach-
uweisen.

3. Die electrischen Verschiebungen im Strahle stehen
enkrecht auf der Polarisationsebene, wie dies auch Trouton
. c.) gefunden hat. Der aus dem Brechungsexponenten des
chwefels bestimmte Polarisationswinkel (63°) stimmt auch
ir die Reflexion der Strahlen electrischer Kraft.

4. Die Intensität des von der Schwefelplatte durchge-
ıssenen Strahles geht verkehrt, wie die Intensität des reflec-

tirten Strahles. Die Summe beider wurde grösser gefunden, als die Intensität des einfallenden Strahles.

Die vorliegende Untersuchung wurde mit verhältnissmässig ziemlich unempfindlichen Secundärinductoren durchgeführt. In neuerer Zeit ist es mir gelungen Secundärinductoren zu construiren, welche hinsichtlich ihrer Empfindlichkeit allen Anforderungen genügen dürften. Die Verbesserung besteht in einer Verminderung des Widerstandes des eingeschalteten Thermoelements, dann in der Anwendung feinerer Drähte und in einer Verbindung der beiden Drähte ohne Loth.

Der Widerstand des eingeschalteten Thermoelements betrug früher ungefähr 1,8 S. E., er wurde jetzt auf 0,8 S. E. herabgesetzt, da der Secundärinductor gerade bei diesem Widerstand am wirksamsten zu sein scheint. Bei den früheren Elementen verband ich einen Platindraht von 0,042 mm Dicke mit einem Patentnickeldraht von 0,11 mm Durchmesser. Nun steht mir auch ein sehr feiner Patentnickeldraht von 0,052 mm [1]) zur Verfügung. Die Entfernung der beiden Inductorenhälften ab (Fig. 4) beträgt 7 mm. Um die Verbindung der beiden Drähte durch eine Löthung zu vermeiden, habe ich zunächst die beiden feinen Drähte an die Inductorenenden bei *a* und *b* angelöthet; an das andere Ende des feinen Drahtes wurde eine schwach federnde Spirale (*s*) aus Kupferdraht und an diese ein dicker Zuleitungsdraht (*z*) ebenfalls mit Loth befestigt. Nun wurden die feinen Drähte bei 0 gekreuzt und einfach geschlungen, hierauf mittelst der Zuleitungsdrähte und Spiralen vorsichtig gespannt und schliesslich die Zuleitungsdrähte fixirt. Das Galvanometer wird bei

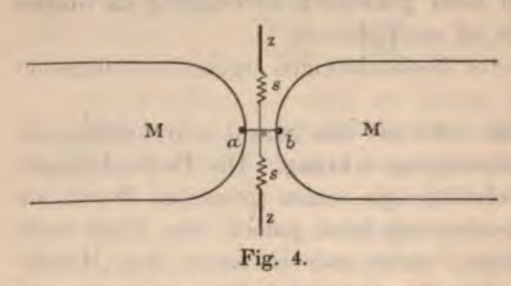


Fig. 4.

1) Die feinen Drähte erhielt ich durch die gütige Vermittelung des Hrn. Prof. Pfaundler von der Drahtzieherei des Hrn. Grafen Enzenberg in Schwaz (Tirol).

en Drähten *z* eingeschaltet. Ein Secundärinductor dieser Art, ei dem die Messingstreifen *M* 5 cm breit und 30 cm lang nd, gibt mit dem Thomson-Carpentier Galvanometer calendistanz 1,7 m) Ausschläge von 200—300 Scalentheilen i einer gegenseitigen Entfernung der Hertz'schen Spiegel n 4 m. Auch mit einem Wiedemann'schen Galvanometer hält man für Messungen gut geeignete Ausschläge. Es sei ch erwähnt, dass für die Erzeugung der Primärfunken ein rch drei Akkumulatoren betriebenes Inductorium dient und ss der angewendete Interruptor ungefähr 23 Unterbrechungen o Secunde macht.

Hiermit glaube ich, kann die Methode der Untersuchung n Strahlen electrischer Kraft mit Hilfe eines Secundärin-ctors mit eingeschaltetem Thermoelement als allen Anfor-rungen genügend angesehen werden. Vor der bolometrischen ethode hat sie den Vorzug, dass ein Primärstrom in der alvanometerleitung und jede Compensation von Widerständen tfällt.

Graz, Physikal. Institut der Univ., August, 1891.

VII. *Ueber das magnetische Verhalten des Moraviczaer Magnetits im Vergleich zu Stahl;* *von Anton Abt.*

(Vorgetragen im Siebenbürger Museum-Verein im April 1891.)

(Hierzu Tafel I Fig. 2—4.)

I.

Bekanntlich gibt es magnetische Stoffe, die grösseren permanenten Magnetismus zeigen, als der Stahl; so übertrifft jener des Nickels in Stabform den des Stahls bei geringen Intensitäten der magnetisirenden Kräfte etwa fünfmal. Nach meinen Messungen[1]), welche ich mit 10 cm langen, 0,9 cm breiten und 0,1 cm dicken Lamellen aus Nickel, glasharten und gelb angelassenem Stahl bei verschiedenen von 0,415 bis 8,665 Ampère allmählich aufsteigenden magnetisirenden Stromintensitäten ausführte, war der permanente Magnetismus des Nickels bei der Stromintensität von 0,654 Amp. 4,8 mal grösser, als jener des glasharten Stahls, während letzterer bei 8,665 Amp. den des Nickels 3,8 mal übertraf.

Auch das unter dem Namen Magnetstein oder Magnetit bekannte Mineral nimmt, wie bekannt, bedeutenden permanenten Magnetismus an, welcher nach A. L. Holz's Untersuchungen[2]) selbst bei stärkeren magnetisirenden Kräften jenen des glasharten Stahls nahe $1^1/_2$ mal übertraf. Auch hier ändert sich dieses Verhältniss bei aufsteigender Intensität des magnetisirenden Stroms, doch nicht so bedeutend, wie bei Nickel. Nach meinen auf den Magnetit aus Marovicza bezüglichen Messungen erreichte diese Verhältnisszahl zwischen den permanenten Magnetismen des Magnetits und des glasharten Stahls den Werth von 1,82, ja bei einem Exemplar sogar 2,21.

Ein seltenes Exemplar eines natürlichen Magnets von ab-

---

1) A. Abt, Berichte der naturwissenschaftlichen Section des Siebenbürger Museum-Vereins 1890, II. Heft, p. 181.

2) A. L. Holz, Wied. Ann. 5. p. 169. 1878.

gerundeter Form aus dem Magnetitlager zu Moravicza, welches bei einem Gewicht von 1,08 kg in seiner jetzigen Armatur vor dem letzten Abreissen des Ankers eine Tragkraft von nahezu $3^3/_4$ kg hatte, veranlasste mich zu einer eingehenden Untersuchung des magnetischen Verhaltens dieser Magnetsteine. Durch Gefälligkeit der Verwaltungsdirection des grossartigen Eisenwerks zu Resicza in Ungarn erhielt ich 10 verschiedene Exemplare aus dem reichhaltigen Magnetitlager zu Moravicza im Krassó-Szörényer Comitat, welche frei von Rissen und Sprüngen zu Messungen ganz besonders geeignet waren.

Behufs Vergleichung des magnetischen Verhaltens dieser Magnetite mit jenem des Stahls liess ich aus zwei Exemplaren von verschiedener Zusammensetzung und Structur je zwei parallelepipedische Stücke I_1, I_2 und II_1, II_2 schleifen und ganz gleichgeformte Stücke aus glashartem und aus blau angelassenem Stahl anfertigen. Das Exemplar, aus welchem die Stücke I geschliffen sind, ist nach der Untersuchung des Hrn. Prof. Anton Koch ein reiner, von fremden Einschlüssen freier, kleinkörniger, etwas poröser Magnetit, an welchem der in Folge der Einwirkung von *O* entstandene Hämatit in den Poren deutlich wahrzunehmen ist. Sein specifisches Gewicht beträgt 4,537 und es enthält nach der Analyse des Hrn. Prof. Franz Koch 3,1455 Proc. unlösbare Stoffe — grösstentheils Kieselsäure — und 17,527 Proc. Eisen. Die mit II bezeichneten Stücke sind aus einem dichten, feinkörnigen, von gelben Adern durchzogenen Magnetit geformt, an welchem eingesprengte Chalkopyritkörnchen wahrnehmbar sind, die grösstentheils in Malachit umgewandelt wurden, auch eine feine Limonitschicht war zu erkennen. Die Adern bestehen aus durch Eisenrost gefärbten feinkörnigen Quarz. Das specifische Gewicht dieses Magnetit ist 4,656, seine chemische Zusammensetzung 14,0489 Proc. in Salzsäure unlösliche Theile und 61,4206 Proc. Eisen. Das Exemplar II enthält also bedeutend mehr Eisen als das mit I bezeichnete.

Sämmtliche Magnetitprismen sind frei von Rissen, Sprüngen und Brüchen, und ihre Dimensionen folgende:

	Länge	Breite	Dicke	Volum
I	9,17 cm	2,5 cm	1,67 cm	31,4135 cm³
II	8,46	2,4	1,91	38,7806

Die zur Magnetisirung verwendete Spirale bestand aus 2 mm starkem, mit Seide umsponnenem Kupferdraht, hatte eine Länge von 20 cm, mehrere Lagen und 441 Windungen. Die Grösse des Magnetismus wurde mittelst eines empfindlichen Spiegelgalvanometers, Scala und Fernrohr gemessen. Die Spirale befand sich in der I. Hauptlage nach Gauss, die Entfernung ihres Mittelpunktes vom Magneten des Galvanometers betrug 116,42 cm, jene des Magnetspiegels von der Scala 209,95 cm. Die Einführung der Magnetit- und Stahlprismen geschah mittelst einer eignen Vorrichtung, welche es möglich machte, dieselben in die Mitte der Spirale zu legen. Die Intensität des magnetisirenden Stromes wurde durch den Scalenausschlag gemessen, welcher bei leerer Spirale beobachtet wurde. Das relative Maass des Magnetismus wurde ebenfalls in Scalentheilen ausgedrückt. Zur leichteren Erreichung des Maximums des Magnetismus bei jeweiliger Stromstärke wurde der Strom öfters, etwa einmal in der Secunde unterbrochen. Zur Erreichung dieses Maximums waren zwei Minuten hinreicheud, während dieser Zeit fanden mehr als 100 Unterbrechungen des Stromes statt.

Die Resultate der Messungen, welche ich bei steigender Stromintensität von 2 bis 14 Bunsen-Elementen erhielt, sind in den folgenden vier Tabellen (I_1, I_2, II_1, II_2) enthalten, in welchen J die Stromintensität, Sm den Totalmagnetismus des Magnetits und der Spirale, Pm den permanenten und Tm den verschwindenden Magnetismus bedeutet. Sa_1, Pa_1 und Ta_1 bezeichnen dieselben Grössen für den blauangelassenen, Sa_2, Pa_2 und Ta_2 jene für den glasharten Stahl. Zuerst wurde der Strom durch die leere Spirale geleitet und die Intensität J gemessen, dann wurde der Magnetit oder der Stahl in die Spirale geschoben und Sm respective Sa, schliesslich nach Oeffnung des Stromes Pm oder Pa beobachtet. Der Magnetismus, den diese Körper vor der Einwirkung des Stromes besassen, ist in den ersten Zeilen der Tabellen angegeben. Die Messungen wurden am 16. 17. 19. 20. 21. 22. und 24. Januar, am 8. 11. 17. und 22. Februar und am 2. 7. März 1891 angestellt.

I_1.

Feinkörniger, poröser Magnetit von schwarzer Farbe. Spec. Gew. 4,537.

J	Sm	Pm	Tm	Sa_1	Pa_1	Ta_1	Sa_2	Pa_2	Ta_2
—	—	0	—	—	0	—	—	0	—
37,5	48,0	1,5	9,0	83,0	0,8	44,7	80,0	1,8	40,7
51,2	64,3	2,8	10,3	111,0	1,0	58,0	109,0	2,3	55,5
64,0	78,0	4,0	10,0	136,0	1,3	70,7	133,3	2,6	66,7
71,5	87,3	4,5	11,3	152,5	1,7	79,3	150,0	3,0	75,5
79,0	93,5	5,0	9,5	162,5	1,6	81,9	161,0	3,2	78,8
95,5	120,0	7,0	17,5	200,0	1,8	102,7	198,0	4,0	98,5
	$Pm+Tm$			Pa_1+Ta_1			Pa_2+Ta_2		
99,5	27.75	7,3	20,45	122,5	1,9	120,6	118,5	4,0	114,5
—	—	7,0	—	—	2,65	—	—	5,0	—

I_2.

Magnetit von derselben Beschaffenheit und denselben Dimensionen wie I_1, der aber schon am 17. October 1889 mit Strom von 2 und dann von 4 Bunsen-Elementen magnetisirt wurde.

J	Sm	Pm	Tm	Sa_1	Pa_1	Ta_1	Sa_2	Pa_2	Ta_2
—	—	3,3	—	—	1,3	—	—	4,0	—
32,5	42,2	3,2	6,5	72,0	1,3	38,2	60,5	4,0	24,0
56,0	69,5	3,2	10,3	122,0	2,0	64,0	114,0	5,6	52,4
63,0	74,5	3,8	7,7	131,5	2,2	66,3	123,0	6,0	54,0
71,2	82,7	4,0	7,5	147,0	2,4	73,1	137,5	6,5	59,5
79,0	86,2	4,4	2,8	153,0	2,7	71,3	143,0	7,0	57,0
95,5	118,0	6,5	16,0	200,0	3,25	101,25	190,0	9,5	85,0
	$Pm+Tm$			Pa_1+Ta_1			Pa_2+Ta_2		
99,0	26,5	6,8	19,7	119,5	3,6	115,9	105,5	9,8	95,7
—	—	6,6	—	—	4,8	—	—	10,0	—

II_1.

Dichter Magnetit mit gelben Adern. Spec. Gew. 4,656.

J	Sm	Pm	Tm	Sa_1	Pa_1	Ta_1	Sa_2	Pa_2	Ta_2
—	—	0	—	—	0	—	—	0	—
38,5	54,0	3,0	12.5	81,0	0,6	41,9	80,5	1,5	40,5
50,5	73,5	4,7	18,3	117,0	1,0	65,5	109,5	1,8	57,2
65,8	92,5	6,0	20,7	142,0	1,4	74,8	141,5	2,2	73,5
72,2	102,0	6,9	22,9	157,0	1,6	83,2	150,0	2,6	75,2
82,0	109,8	7,2	20,6	173,0	1,7	89,3	172,0	2,8	87,2
94,0	135,75	8,2	33,55	206,0	2,0	110,0	204,0	3,65	106,35
	$Pm+Tm$			Pa_1+Ta_1			Pa_2+Ta_2		
98,5	36,0	8,5	27,5	118,0	2,0	116,0	116,5	3,8	112,7
—	—	8,5	—	—	3,0	—	—	4,5	—

II_2.

Magnetit von derselben Beschaffenheit und denselben Dimensionen, wie der vorige (II_1).

J	Sm	Pm	Tm	Sa_1	Pa_1	Ta_1	Sa_2	Pa_2	Ta_2
—	—	5,0	—	—	0	—	—	0	—
32,5	50,0	5,0	12,5	71,0	0,3	38,2	70,5	1,8	36,2
56,3	81,5	5,8	19,4	122,5	0,8	65,4	121,0	2,2	62,5
65,0	91,0	6,4	19,6	138,5	1,0	72,5	137,0	2,7	69,3
71,8	101,0	7,0	22,2	154,5	1,3	81,4	151,5	2,9	76,8
80,0	109,5	7,6	21,9	167,3	1,4	85,9	165,0	3,0	82,0
95,5	139,0	9,8	33,7	203,0	2,0	105,5	200,0	3,7	100,8
	$Pm + Tm$			$Pa_1 + Ta_1$			$Pa_2 + Ta_2$		
99,0	40,0	10,0	30,0	115,5	2,1	113,4	112,0	4,0	108,0
—	—	9,3	—	—	2,1	—	—	4,5	—

Die in der vorletzten Zeile dieser Tabellen angeführten Stromstärken waren so bedeutend, dass Sm und Sa nicht gemessen werden konnten. Statt dessen wurde $Pm + Tm$ und $Pa + Ta$ gemessen, nachdem früher der Strom J bei leerer Spirale durch den einer zweiten auf der entgegengesetzten Seite des Galvanometers aufgestellten Spirale compensirt wurde. Die in der letzten Zeile der Tabellen angegebenen Resultate wurden nach Berührung der Magnetite und der Stahle mit einem starken Electromagnet beobachtet.

Aus diesen Resultaten folgt: 1. Dass der Magnetismus des Magnetits mit der Intensität des magnetisirenden Stromes zunimmt, wie bei Stahl, und dass der permanente Magnetismus desselben, namentlich der von II, jenen des Stahls bei jeder Stromintensität übertrifft. Ich habe für I_1 und II_1 die Verhältnisse der permanenten Magnetismen bei jeder Stromintensität berechnet und in den folgenden mit I_1 und II_1 bezeichneten Tabellen zusammengestellt.

2. Der grössere permanente Magnetismus des Magnetits im Vergleiche zu Stahl wird noch augenscheinlicher, wenn man die bei gleichem Volumen erhaltenen Magnetismen mit dem specifischen Gewichte der Körper dividirt. Die so bestimmten specifischen Magnetismen sind bei dem Magnetit I 1,609, und bei dem zugehörigen Stahl, dessen specifisches Gewicht zu 7,8 gerechnet, 0,512; das Verhältniss von beiden 3,14. Bei dem mit II bezeichneten Magnetit ist der specifische Magnetismus 1,825, jener des Stahls 0,487 und das Verhältniss von

beiden 3,74. Es ist also der specifische Magnetismus des Magnetits I 3,14 mal, der von II 3,74 mal grösser als der des Stahls. Das Ueberwiegen von II gegen I verursacht hauptsächlich der bedeutende Eisengehalt.

3. Die auf die Volumeneinheit (1 cm³) umgerechneten permanenten Magnetismen dieser zwei Magnetitexemplare sind bei I 0,232, bei II 0,219; daher die auf die Volumeneinheit bezogenen specifischen Magnetismen bei I 0,051, bei II 0,048, deren Verhältniss 1,06.

I_1.

J	$\frac{Pm}{Pa_1}$	$\frac{Pm}{Pa_2}$	$\frac{Tm}{Ta_1}$	$\frac{Tm}{Ta_2}$
37,5	1,88	0,84	0,20	0,22
51,2	1,55	1,22	0,17	0,18
64,0	3,07	1,54	0,14	0,15
71,5	2,65	1,50	0,14	0,15
79,0	3,12	1,56	0,11	0,12
95,5	3,88	1,75	0,17	0,18
99,5	3,88	1,82	0,17	0,18

II_1.

J	$\frac{Pm}{Pa_1}$	$\frac{Pm}{Pa_2}$	$\frac{Tm}{Ta_1}$	$\frac{Tm}{Ta_2}$
38,5	5,00	2,00	0,30	0,31
50,5	4,70	2,61	0,28	0,32
65,8	4,29	2,73	0,27	0,28
72,2	4,31	2,65	0,27	0,30
82,0	4,24	2,57	0,23	0,23
94,0	4,10	2,24	0,31	0,31
98,5	4,25	2,21	0,24	0,24

Daraus ergibt sich: 1. Dass der permanente Magnetismus des Exemplars I_1 von der zwischen 37,5 und 51,2 liegenden Stromintensität, nach den magnetischen Curven (Fig. 1) von 43,2 angefangen, selbst jenen des glasharten Stahls überwiegt, und dass das Verhältniss beider mit der Stromintensität bis 1,82 wächst. Im Vergleich zu dem blau angelassenen Stahl beträgt dieses Verhältniss 3,88, also beinahe 4.

2. Bei dem Magnetit II_1 und den entsprechenden Stahlexemplaren sind die Verhältnisszahlen noch grösser und bei dem glasharten Stahl anfangs zunehmend, dann abnehmend, im Mittel 2,43. Es ist also bei diesen Stromintensitäten der permanente Magnetismus dieses Magnetitexemplars nahe 2,5 mal grösser als der des glasharten Stahls, im Vergleich zu dem des blau angelaufenen Stahls im Mittel 4,41 mal grösser. Die entsprechenden magnetischen Curven (Fig. 2) haben über die Stromintensität 38,5 hinaus keinen Schnittpunkt; möglicherweise existirt ein solcher für kleinere Stromintensitäten.

3. Der verschwindende (temporäre) Magnetismus des Magnetits ist bedeutend kleiner als der des Stahls. Bei I_1 ist das Verhältniss bei steigender Stromintensität anfangs ab-

nehmend, dann zunehmend und bei der Stromintensität für den blauen Stahl 0,11, für den weissen 0,12; es ist dah der verschwindende Magnetismus des blauen Stahls 9,1 m der des weissen 8,3 mal grösser als der des Magnetits Der Mittelwerth des Verhältnisses beträgt für den blau Stahl 0,16, für den weissen 0,19. Auch der verschwinden Magnetismus von II_1 übersteigt den von I_1; der mittle Werth des Verhältnisses ist für den blauen Stahl 0,29, für d weissen 0,28, also für beide Stahlsorten der verschwinden Magnetismus nahe $3^1/_2$ mal grösser, als der des Magnetits I

4. Das Verhältniss des verschwindenden zum permanent Magnetismus ist bei dem Magnetit I_1 im Durchschnitt 2 bei dem glasharten Stahl 25, bei dem Magnetit II_1 3,6 u bei dem entsprechenden Stahl 30.

5. Durch die Berührung mit dem Electromagneten wur der permanente Magnetismus des Magnetits nicht gesteige wohl aber der des Stahls, wie dies aus den letzten Zeilen d vier ersten Tabellen ersichtlich ist. Der Magnetit hatte al im magnetischen Felde der Spirale den Sättigungspunkt reicht, oder war demselben sehr nahe, während bei dem Sta dies nicht der Fall war. In Folge dessen nahm das Ve hältniss $Pm : Pa_2$ ab und zwar bei I_1 von 1,82 bis 1,40, II_1 von 2,43 bis 1,88, und würde wahrscheinlich bei Anwe dung stärkerer Electromagnete, die mir nicht zur Verfügu standen, noch mehr abgenommen haben, wie dies bei d Versuchen von Holz der Fall war, wo das Verhältniss d permanenten Magnetismen des Magnetits und Stahls bei A wendung starker Electromagnete sich der Einheit näherte.

6. Dass der Magnetit den permanenten Magnetism dauernd behält beweist nachstende Tabelle, in welcher je Magnetismen zusammengestellt sind, welche nach unterbroch nen Messungen vor der Fortsetzung derselben beobacht wurden.

		I_1			II_1		
		Pm	Pa_2	Pa_1	Pm	Pa_2	Pa_1
Januar	16.	0	0	0	0	0	0
„	16.	1,5	1,8	0,8	3	1,5	0,6
„	17.	1,5	1,7	0,7	3	1,3	0,6
„	17.	2,8	2,3	1,0	4,7	1,8	1,0
„	21.	2,8	2,3	1,0	4,8	1,7	1,0
„	21.	4,0	2,6	1,3	6,0	2,2	1,4

		I_1			II_1		
		Pm	Pa_2	Pa_1	*Pm*	Pa_2	Pa_1
Januar	22.	4,0	2,6	1,3	6,1	2,3	1,4
„	22.	4,5	3,0	1,7	6,9	2,6	1,6
„	24.	4,6	3,0	1,5	6,7	2,5	1,6
„	24.	5,0	3,2	1,6	7,2	2,8	1,7
Februar	11.	5,0	3,2	1,5	7,4	2,6	1,6
„	17.	5,0	3,2	1,5	7,5	2,6	1,6
März	2.	5,2	3,1	1,5	7,3	2,6	1,5
„	2.	7,3	4,0	1,9	8,5	3,8	2,0
„	7.	7,0	4,0	1,9	8,5	3,2	1,8

II.

Zu den magnetischen Eigenschaften eines Körpers gehört auch das Verhalten bei seiner Entmagnetisirung und dem Wechsel seiner Polarität. Ich habe die Magnetite aus Moravicza und die entsprechenden Stahlkörper auch in dieser Richtung untersucht. Diese Messungen wurden in derselben Weise und mit denselben Instrumenten ausgeführt, wie die bei der Magnetisirung dieser Körper mit dem Unterschiede, dass die Steigerung der Intensität des entmagnetisirenden Stromes allmählich von 5 Scalentheilen stattfand, was den Vorzug hat, dass die Aenderungen des Magnetismus gleichförmiger und übersichtlicher sind, als bei schnellem Anwachsen des Stromes. Die erhaltenen Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, in welcher I und II wieder die beiden Magnetitexemplare, *Pm*, Pa_2 und Pa_1 den permanenten Magnetismus des Magnetits, resp. des glasharten und des blau angelassenen Stahls bedeuten, und die Zahlen der ersten Zeile jenen Magnetismus darstellen, welchen diese Körper vor der Entmagnetisirung besassen.

$-J$	I			II		
	Pm	Pa_2	Pa_1	*Pm*	Pa_2	Pa_1
0	6,4	9,8	4,3	9,2	4,5	1,8
5	6,2	9,4	4,0	8,2	4,0	1,5
10	6,0	8,0	3,0	7,2	3,4	1,2
15	5,0	6,8	2,5	5,5	2,2	0,8
20	4,3	5,7	2,1	4,1	1,6	0,5
25	3,5	4,3	1,6	3,0	1,0	0,2
30	2,2	3,4	1,3	2,0	0,5	0,15
36	0,25	0,0	0,7	— 1,4	0,0	0,0
40	0,0	— 1,0	0,3	— 2,0	— 0,5	— 0,2
50	— 1,5	— 1,8	0,0	— 3,5	— 1,0	— 0,34
60,5	— 3,2	— 3,0	—	— 4,6	— 1,5	— 0,5
72	— 5,0	— 4,2	—	— 6,4	— 2,4	— 0,8
78	— 5,25	— 4,8	—	— 6,9	— 2,6	— 0,95

Aus diesen Resultaten, namentlich aus denen, die sich auf den Magnetit II beziehen, bei dem Pm, Pa_2 und Pa_1 vor der Magnetisirung Null waren, ergiebt sich: 1. dass das magnetische Verhalten des Magnetits im magnetischen Felde der Spirale ein ganz anderes ist, als das des Eisens und des Stahls, indem Magnetit von dem durch positiven Strom erhaltenen Magnetismus mehr behält, als Stahl, während bei Umkehrung des Stromes, also beim Entmagnetisiren, der Magnetismus des Magnetits schneller abnimmt und seine Polarität früher wechselt, als bei Stahl. Es sind daher die zur Erklärung der magnetischen Eigenschaften des Eisens und Stahls aufgestellten Hypothesen von der Coërcitivkraft oder von der Drehung der Molecularmagnete auf den Magnetit nicht anwendbar, wie dies schon Holz durch seine obenerwähnten Versuche dargethan hat.

2. Die Polarität des Magnetits wechselte bei einer zwischen 30 und 36 liegenden Stromintensität, bei welcher die Abnahme des Magnetismus am grössten war. Sein ganzer, bei einer Stromintensität von 95,5 angenommener Magnetismus, wurde bei einer Intensität von nur 34 des negativen Stromes vernichtet. Bei dem Stahl fand der Polwechsel bei der Stromintensität von 36 statt, und die Abnahme seines Magnetismus war auch hier eine gleichmässige. Das Verhältniss der permanenten Magnetismen des Magnetits II und des glasharten Stahls bei den verschiedenen Stromintensitäten habe ich in folgender kleinen Tabelle zusammengestellt.

J	0	5	10	15	20	25	30
$\frac{Pm}{Pa_2}$	2,04	2,05	2,12	2,50	2,56	3,00	4,00
J	36	40	50	60,5	72	78	—
$\frac{Pm}{Pa_2}$	—	4,00	3,50	3,06	2,66	2,65	—

Mit abnehmendem Magnetismus wächst also das Verhältniss und erreicht seinen grössten Werth in der Nähe des Polwechsels, von hier an wird dasselbe bei ansteigendem Magnetismus immer kleiner.

3. Die Abnahme des Magnetismus beim Ansteigen des entmagnetisirenden Stromes zeigen die aus den Beobachtungsresultaten construirten magnetischen Curven (Fig. 3). Die

Curve des Magnetits zeigt bei der Stromintensität von 30 ein plötzliches Sinken, durchschneidet die des glasharten Stahls bei der Intensität von 34,1, wo beiden Körpern der Magnetismus 0,15 zukommt. Die Curven des Magnetits und des blauangelassenen Stahls durchschneiden sich bei der Intensität von 34,15, wo beide Körper den Magnetismus 0,07 haben. Der Schnittpunkt der Curve des Magnetits mit der Abscissenachse entspricht der Intensität 34,1; hier wechseln die Pole des Magnetits.

Aus allen diesen Beobachtungsresultaten, welche mit den Holz'schen im wesentlichen übereinstimmen und von diesen nur quantitativ verschieden sind, folgt:

a) *Dass der permanente Magnetismus des Magnetits den des glasharten Stahls übertrifft.*

b) *Dass Magnetit den grössten specifischen Magnetismus hat unter allen bekannten magnetischen Körpern,* und dass der specifische Magnetismus des Moraviczaer Magnetits grösser ist, als der, welchen Holz bei dem von ihm untersuchten Magnetit fand.

c) Der permanente Magnetismus des Magnetits nimmt bei Anwendung gleicher entmagnetisirender Kräfte in grösserem Maasse ab, als der des Stahls.

d) Der nach Aufhebung der magnetisirenden Kraft verschwindende Magnetismus ist im Magnetit kleiner als im Stahl.

III.

Ausser diesen prismatisch geformten Magnetitexemplaren von verschiedener chemischer Zusammensetzung und verschiedener Structur habe ich noch acht Magnetitexemplare aus Moravicza von verschiedener Zusammensetzung und Structur, ein Haematit- und ein Trachytexemplar auf ihr magnetisches Verhalten untersucht. Sämmtliche hatten eine viereckige Form, wie solche bei geognostischen Sammlungsstücken gebräuchlich ist. Gewichte und Dimensionen, erstere in Grammen (G), letztere in Centimetern (C) ausgedrückt, sind in folgender Tabelle zusammengestellt. Die Zahlen bezeichnen die einzelnen Magnetitstücke; aus den fehlenden 5 und 7 wurden die früher beschriebenen Prismen geschliffen.

	1	2	3	4	6	8	9	10	Hämatit	Trachyt
Gewicht in *G*	1153,5	1006	738	805,5	1047,5	1130	1012	1082,5	434,5	341
Länge „ *C*	10,5	10	9,7	10	9,5	9,7	10,3	9,5	8,8	9
Breite „ „	8,4	7	7,3	7	7,5	7	6,6	6,5	5,0	5
Dicke „ „	2,7	4	2,2	2,8	3,5	4,5	3,3	3,8	2,7	3,2

Die zur Magnetisirung dieser Körper verwendete Spirale bestand aus 2,5 mm dickem Kupferdraht und 144 Windungen; die Länge derselben betrug 12,7 cm, der Durchmesser 10 cm. Zur Messung der Stromstärke und des Magnetismus wurde wieder dasselbe Spiegelgalvanometer benutzt, nur wurde die Stromstärke *J* aus einer grösseren, hingegen der permanente Magnetismus *M* aus einer kleineren — 52,42 cm — Entfernung gemessen, als bei den oben erwähnten Beobachtungen. Die Resultate dieser Messungen sind in folgender Tabelle enthalten.

J	Datum	*M*									
		1	2	3	4	6	8	9	10	Hämatit	Trachyt
0	9. Febr.	1,6	0,7	1,7	0,5	0,2	0,6	0,5	0,5	0,5	0,7
5,1	10. „	7,5	2,8	12,0	4,5	22,5	22,7	19,9	37,6	2,5	—
—	15. „	6,9	2,5	11,9	4,0	21,0	21,5	19,0	36,8	2,5	—
—	22. „	6,9	2,6	11,6	4,0	20,2	21,5	19,0	35,2	2,5	—
7,0	22. „	30,6	6,7	16,0	7,8	37,5	35,0	32,5	48,0	4,0	1,0
—	2. März	30,0	6,5	15,0	7,0	36,2	33,9	30,0	47,5	3,5	1,0
8,0	2. „	55,0	11,5	40,5	15,0	60,0	55,0	67,0	101,0	14,0	1,0
—	7. „	53,3	11,5	37,0	15,0	56,5	53,5	65,5	98,0	13,5	1,0

Auch aus diesen Resultaten ist ersichtlich, dass Magnetit bedeutenden permanenten Magnetismus annimmt, der jedoch selbst bei Exemplaren gleichen Gewichtes und von demselben Fundorte, je nach seiner Zusammensetzung und Structur sehr verschieden ist. Der Hämatit ist aus Dognacska (Ungarn), der Trachyt aus Tusnád.

Ausser diesen untersuchte ich noch drei Exemplare von Limonit aus Tamásfalva, M. Hermány und Taucz (Arader Comitat), einen Hämatit aus Gyala, einen Sphärosiderit aus Bibarczfalva, einen Chromit aus dem Krivaja Thale in Bosnien und einen Chalybit aus Macskamczö, die jedoch im magnetischen Felde der Spirale keinen messbaren Magnetismus annahmen.

VIII. *Ueber die Constitution des flüssigen Wassers; von W. C. Röntgen.*

Die Thatsache, dass das Volumen des Wassers durch Abkühlung zunimmt, wenn die Anfangstemperatur nicht über ca. 4° C. liegt, ist bereits seit längerer Zeit bekannt. In den letzten Jahren sind nun zu dieser noch weitere Anomalien im physikalischen Verhalten des Wassers gefunden worden, von denen ich die drei folgenden hervorheben möchte.

1. Aus den Versuchen von Grassi, Pagliano und Vicentini, Röntgen und Schneider folgt, dass die Compressibilität des Wassers in dem Temperaturintervall von 0 bis 50° mit *zunehmender* Temperatur *kleiner* wird, während die der übrigen untersuchten einfachen Flüssigkeiten mit zunehmender Temperatur wächst.

2. Die schönen Untersuchungen von Amagat über die Aenderung des thermischen Ausdehnungscoefficienten mit dem Druck führen zu dem Resultate, dass der mittlere Ausdehnungscoefficient des Wassers zwischen 0 und 10°, 0 und 30°, 0 und 50° bis zu Drucken von 2500—3000 Atmosphären fortwährend mit dem Druck *zunimmt* und zwar umso stärker, je niedriger die Temperatur und je kleiner der Druck ist. Aether, Schwefelkohlenstoff und Alkohol dagegen zeigen das entgegengesetzte Verhalten insoweit, als der Ausdehnungscoefficient dieser Flüssigkeiten mit zunehmendem Druck stets *kleiner* wird.

3. Beobachtungen vom Verfasser, sowie von Warburg und Sachs haben ergeben, dass die Viscosität von Wasser von ca. 18° durch Druck *vermindert* wird. Benzol, Aether und flüssige Kohlensäure verhalten sich nach Warburg und Sachs umgekehrt und es ist wahrscheinlich, dass nicht nur diese, sondern die Mehrzahl der Flüssigkeiten durch Druck zähflüssiger werden.

Es ist nun begreiflich, dass man nach einer Erklärung dieser auffälligen Erscheinungen sucht, und eine solche dürfte, nach meiner Ansicht in der Annahme gefunden sein, dass das

flüssige Wasser aus einem Aggregat von zwei Arten verschieden constituirter Molecüle besteht. Die Molecüle erster Art, welche wir auch Eismolecüle nennen wollen, da wir ihnen gewisse Eigenschaften des Eises beilegen werden, gehen durch Wärmezufuhr in Molecüle zweiter Art über; wird dagegen dem Wasser Wärme entzogen, so wird ein entsprechender Theil Eismolecüle wieder zurückgebildet. Wir halten das nicht unterkältete Wasser für eine bei jeder Temperatur gerade gesättigte Lösung von Eismolecülen, welche um so concentrirter ist, je niedriger ihre Temperatur ist.

Wir nehmen weiter entsprechend dem, was wir beim Schmelzen des Eises beobachten, an, dass die Verwandlung von Molecülen erster Art in solche zweiter Art eine Volumenverminderung der Mischung zur Folge hat.

Die Erklärung der Existenz eines Dichtemaximums bei einer über dem Gefrierpunkt gelegenen Temperatur ergibt sich dann, indem wir beachten, dass die durch eine Temperaturänderung erzeugte, gesammte Volumenänderung des Wassers aus zwei Theilen besteht, aus einer Contraction und einer gleichzeitig stattfindenden Dilatation. Bei Temperaturen unterhalb 4° wird die durch Wärmezufuhr erzeugte Verwandlung von Eismolecülen eine Contraction zur Folge haben, welche die Dilatation an Grösse übertrifft; bei Temperaturen von 4° aufwärts wird dagegen die Dilatation überwiegen.

Die hier gegebene Erklärung des Dichtemaximums des Wassers ist nun keineswegs neu; wir finden dieselbe, wenn auch manchmal in etwas anderer Form, an vielen Stellen der Litteratur. Wer sie zuerst gefunden hat, ist mir nicht bekannt geworden. Eine ältere Form, nach welcher die Bildung von Eismolecülen bei 4° beginnen sollte, enthält offenbar eine nicht nothwendige und wenig wahrscheinliche Beschränkung.

Wir wollen jetzt untersuchen, welchen Einfluss der Druck auf Wasser, welches die von uns angenommene Constitution besitzt, ausüben kann.

Von den echten gesättigten Lösungen wissen wir durch die Versuche von Möller, Sorby und Braun, dass sie entweder in Folge des gesteigerten Druckes im Stande sind noch mehr von dem gelösten Körper aufzunehmen, oder dass ein Theil des gelösten Körpers durch Druck aus ihnen ausge-

schieden wird; Braun hat auf theoretischem Wege die Bedingungen für das Eintreffen des einen oder des anderen Falles aufgestellt. Mit diesen Bedingungen durchaus verträglich ist es nun, wenn wir unserer gesättigten Lösung von Eismolecülen die Eigenschaft beilegen, dass ihre Lösungsfähigkeit durch Druck vermindert wird. Lassen wir somit auf das Wasser einen Druck wirken, so muss dasselbe ärmer werden an Eismolecülen und zwar, wenn die über dem Gefrierpunkt liegende Temperatur constant erhalten wird, auf dem einzig möglichen Wege durch Verwandlung in Molecüle zweiter Art.

Diese Verwandlung ist aber von einer Volumenverminderung begleitet, welche für dieselbe Drucksteigerung um so grösser ist, je tiefer die Temperatur ist; denn die relative Menge der Eismolecüle ist bei tieferen Temperaturen grösser als bei höheren, folglich wird auch wohl durch denselben Druck im ersten Fall eine grössere Anzahl dieser Molecüle verwandelt werden, als im zweiten Falle. Die direct sich aus der Beobachtung ergebende, durch Druck erzeugte Volumenverminderung des Wassers ist also aus zwei Theilen zusammengesetzt: aus der eigentlichen Compression und aus der Contraction, welche eine Folge ist der besprochenen Verwandlung. Der erste Theil, die Compression, ist vielleicht bei tieferen Temperaturen kleiner als bei höheren, für den zweiten Theil gilt aber, wie wir sahen, das Umgekehrte; folglich *kann* es bei einer über dem Gefrierpunkt des Wassers liegenden Temperatur ein Minimum der Compressibilität geben, das aber keineswegs mit dem Maximum der Dichte zusammenzufallen braucht. Wenn somit, wie eingangs erwähnt, Versuche die Existenz eines solchen Minimums in der Nähe von 50° ergeben haben, so dürfen wir diese Thatsache als durch unsere Annahme erklärt betrachten.

Was nun die dritte Anomalie anbetrifft, dass nämlich der thermische Ausdehnungscoefficient des Wassers im Gegensatz zu dem der anderen Flüssigkeiten bis zu Drucken von etwa 3000 Atmosphären mit zunehmendem Druck *zunimmt*, so ergibt sich dafür mit Hülfe unserer Annahme eine Erklärung auf folgendem Wege.

Eine Temperaturerhöhung wirkt, wie wir oben sahen, in zweifacher Richtung auf das Volumen des Wassers. Wie die

Volumenvergrösserung pro Grad Temperatur eines Aggregates, das blos aus Molecülen zweiter Art bestehen würde, vom Druck beeinflusst wird, wissen wir nicht; dieselbe ist vielleicht, wie bei den Gasen, vom Druck nur wenig abhängig. Dagegen können wir mit ziemlicher Sicherheit angeben, dass die entsprechende Volumenverkleinerung desto grösser sein muss, je niedriger der Druck ist; denn diese wird durch Verwandlung von Molecülen erster Art in solche zweiter Art hervorgebracht, und die Zahl der Molecüle erster Art ist bei kleineren Drucken grösser als bei höheren. — Folglich *kann* die Differenz der beiden durch 1° Temperaturerhöhung erzeugten Volumenänderungen, der beobachtete Ausdehnungscoefficient, mit zunehmendem Druck *grösser* werden; und mehr brauchen wir nicht nachzuweisen.

Dass die in Rede stehende Anomalie, wie Amagat fand, bei steigendem Druck in stets geringerem Maasse bemerkbar wird, erklärt sich wiederum daraus, dass die Anzahl der Eismolecüle in der Lösung desto kleiner wird, je höher der Druck steigt. Aus einem ganz ähnlichen Grunde muss die Anomalie desto weniger hervortreten, je höher die Temperatur gewählt wird; ein Resultat, das ebenfalls, wie erwähnt, von Amagat gefunden wurde.

Um die folgenden Bemerkungen einzuschieben, dürfte hier die geeignete Stelle sein. Wenn wir daran festhalten, dass durch Druck die Zahl der Eismolecüle im Wasser vermindert wird, so können wir begreifen, weshalb, wie Amagat und andere fanden, das Maximum der Dichte des Wassers durch Druck nach niedrigeren Temperaturen hin verschoben wird, und weshalb der Gefrierpunkt des Wassers durch Druck erniedrigt wird Auch sehen wir ein, dass innerhalb eines gewissen Temperaturintervalles (dessen Grenzen experimentell festzustellen einer wiederholten Prüfung mir werth zu sein scheint) das Wasser durch Druckzunahme eine Abkühlung erfahren kann, wenn wir daran denken, dass zur Verwandlung von Eismolecülen in Molecüle der zweiten Modification Wärme verbraucht wird.

Wir kommen nun zu der vierten Anomalie, welche darin besteht, dass das Wasser bei hohem Druck leichtflüssiger ist, als bei dem Druck einer Atmosphäre. Die Erklärung für dieses Verhalten des Wassers finden wir wie-

der in unserer Annahme, sobald wir noch die weitere hinzufügen, dass die Reibung des Wassers desto grösser ist, je mehr Eismolecüle darin gelöst sind. Für diese zweite Annahme bildet die Thatsache eine Stütze, dass die Reibung des Wassers in einer überwiegenden Mehrzahl von Fällen durch Zusatz von anderen Körpern vergrössert wird, und zwar ist dann, wenigstens bis zu gewissen Concentrationen, die Reibung desto grösser, je concentrirter die Flüssigkeit ist. Ich glaube, dass diese zweite Annahme durchaus plausibel ist, und auf alle Fälle wird durch dieselbe dem Wasser eine uns sonst unbekannte oder auch nur selten beobachtete Eigenschaft nicht beigelegt.

Lassen wir also auch diese Annahme gelten, so ergibt sich die Erklärung nach dem, was oben wiederholt gesagt wurde, von selbst.

Bemerkenswerth ist es, dass die nicht nur beim Wasser, sondern auch bei den anderen Flüssigkeiten beobachtete Abnahme der Zähflüssigkeit mit zunehmender Temperatur durchaus im Einklang ist mit den gemachten Annahmen. Ueberhaupt steht keine als normal bezeichnete Eigenschaft des Wassers in Widerspruch mit unseren Hypothesen.

Falls unsere Betrachtungen der Wirklichkeit entsprechen, müssen Versuche ergeben, dass die Viscosität des Wassers bei hohen Drucken durch eine gewisse Druckvermehrung weniger vermindert wird, als bei niedrigen Drucken; dass mit anderen Worten auch die Anomalie, von der wir augenblicklich sprechen, ebenso wie die anderen immer mehr und mehr verschwindet, je höher der Druck ist, unter dem das Wasser steht. Ebenso lässt sich mit ziemlicher Gewissheit erwarten, dass der genannte Einfluss bei gleichen Drucken desto grösser gefunden wird, je tiefer die Temperatur des Wassers ist. Die Frage aber, ob die Viscosität bereits bei endlichen Drucken einen kleinsten Werth erreicht, lässt sich von vornherein nicht beantworten, da wir gar nichts darüber wissen, wie der Druck auf die Viscosität des von Eismolecülen befreiten Wassers wirkt; indessen halte ich die Existenz eines solchen Minimums für wahrscheinlich.

Wie mir scheint, ist es uns in befriedigender Weise gelungen die erwähnten Anomalien des Wassers zu erklären, d. h. die Eigenthümlichkeiten, welche das Verhalten des Wassers zeigt, ungezwungen in den Rahmen der bei anderen Flüssigkeiten beobachteten und als normal bezeichneten Thatsachen einzufügen. Man wird mir aber entgegenhalten, dass dem Wasser dadurch wieder eine Ausnahmestellung unter den Flüssigkeiten eingeräumt wurde, dass wir über seine Constitution eine ganz besondere Annahme machen mussten. Dieser Einwand würde berechtigt sein, und ich müsste zugeben, dass wir das Ziel nur unvollständig erreicht hätten, wenn wir durch irgend einen Umstand genöthigt wären, diese Annahme auf das Wasser zu beschränken. Letzteres ist aber, wie ich glaube, nicht der Fall; nichts dürfte im Wege stehen, wenn wir den Bereich unserer Hypothese auf die übrigen Flüssigkeiten ausdehnen wollen und annehmen, dass im Allgemeinen alle Flüssigkeiten aus einem Gemisch von mindestens zwei Arten von verschieden constituirten Molecülen bestehen, deren Mengenverhältniss in der Mischung von Druck und Temperatur abhängig ist; und zwar in der Weise, dass die Molecüle der einen Art durch Wärmezufuhr bei *allen* Flüssigkeiten, durch Druckerhöhung dagegen nur bei *den* Flüssigkeiten, welche beim Erstarren sich ausdehnen, in solche der zweiten Art verwandelt werden, und dass bei Flüssigkeiten, die sich beim Erstarren zusammenziehen, der Druck die umgekehrte Verwandlung erzeugt.

Soweit ich die Consequenzen dieser Anschauung habe verfolgen können, bin ich nirgends auf einen entschiedenen Widerspruch mit den Thatsachen gestossen, ich fand im Gegentheil, dass diese Vorstellung nicht nur bei den Anomalien des Wassers, sondern auch in manchen anderen Fällen zu einem besseren Verständniss der beobachteten Erscheinungen führt. Ich möchte aber die Mittheilung dieser weitergehenden Ueberlegungen vorläufig unterlassen und nur noch erwähnen, dass die Beobachtungen von Haga über den Thomson-Effect in Quecksilber, sowie von Braun über die Thermoelectricität geschmolzener Metalle mir besonders dazu geeignet erscheinen, um die obige Annahme zu unterstützen; denn auch diese Versuche führen zu der Ansicht, dass in einfachen Flüssigkeiten

durch Temperaturänderungen moleculare Umwandlungen erzeugt werden können. —

Es liegt nahe, dass man versucht, die angestellten Betrachtungen auch auf den festen und den gasförmigen Zustand auszudehnen, und dass man sich die Frage vorlegt, ob es nicht zweckmässig sei, sich vorzustellen, dass im Allgemeinen die Körper sowohl im festen als im flüssigen und gasförmigen Zustand aus einem Aggregat von mindestens zwei durch Zufuhr resp. Entziehung von Wärme in einander verwandelbaren Arten von Molecülen bestehen, und dass der Unterschied in den drei Zuständen bei gleicher Temperatur hauptsächlich durch die Verschiedenheit der relativen Mengen beider Molecülarten bedingt sei. Ich habe mich mit dieser Frage wohl beschäftigt, möchte jedoch auch in diesem Falle die Antwort schuldig bleiben, weil vorläufig noch zu wenig Beobachtungen vorliegen, durch welche man eine solche Vorstellung genügend begründen könnte.

Ich erinnere noch daran, dass ähnliche Gedanken über den festen Zustand bereits von Maxwell und Pfaundler geäussert wurden.

Würzburg, Physik. Institut, September 1891.

IX. *Kurze Mittheilung von Versuchen über den Einfluss des Druckes auf einige physikalische Erscheinungen; von W. C. Röntgen.*

1. Seitdem ich in Uebereinstimmung mit Warburg und Sachs fand, dass das Wasser durch Druckerhöhung leichtflüssiger wird, habe ich hin und wieder eine sich darbietende Gelegenheit benutzt, um zu erfahren, ob die genannte auffällige Eigenschaft des Wassers sich noch bei irgend welchen anderen Erscheinungen bemerkbar macht.

2. So habe ich z. B. seiner Zeit Hrn. Fink veranlasst den Einfluss des Druckes auf das electrische Leitungsvermögen von wässerigen Lösungen zu untersuchen.[1] Die Resultate dieser Arbeit stehen im Allgemeinen im Einklang mit der Annahme, dass die Beweglichkeit der Ionen in den verdünnteren Lösungen durch Druck in Folge der verminderten Reibung vergrössert wird. Eine ausführliche Untersuchung über denselben Gegenstand, die im vorigen Jahre im hiesigen Institut gemacht wurde, brachte ausser einer Bestätigung der Fink'schen Versuche einige neue Resultate; leider ist diese Arbeit wegen nicht genügender Zuverlässigkeit der Resultate nicht zur Publikation geeignet.

Die Annahme, dass die durch Druck erzeugte Vergrösserung der Leitungsfähigkeit eine Folge sei einer vermehrten Dissociation der gelösten Substanzen ist zwar unwahrscheinlich, um dieselbe aber nicht ohne Weiteres von der Hand weisen zu müssen, habe ich, mit Rücksicht auf die Untersuchungen von Arrhenius über den Zusammenhang von electrischer Leitungsfähigkeit und Reactionsgeschwindigkeit von Electrolyten, einige Versuche über den Einfluss des Druckes auf die Inversion von Rohrzucker durch Salzsäure angestellt. Wenn der Dissociationsgrad durch Druck erhöht würde, so müsste nach den Vorstellungen des Hrn. Arrhenius die Reactionsgeschwindigkeit sich bei höheren Drucken grösser ergeben als bei kleineren.

1) Fink, Wied. Ann. **26.** p. 481. 1885.

Zu diesen Versuchen benutzte ich wässerige Rohrzuckerlösungen, welche auf 100 ccm Lösung ca. 10 g Zucker (siehe unten) enthielten; zum Invertiren setze ich zu je 100 ccm Lösung ca. 4 ccm concentrirte reine Salzsäure zu. Jede Portion wurde sofort nach dem Hinzufügen der Salzsäure in zwei Hälften (Lösung I und Lösung II) getheilt, von denen die eine während mehrerer Stunden im Cailletet'schen Apparat einem Druck von 500 Atmosphären ausgesetzt wurde. Beide Lösungen wurden in jeder anderen Beziehung möglichst gleich behandelt, und namentlich wurde dafür gesorgt, dass ihre Temperatur niemals merklich verschieden war. Nach dieser Zeit bestimmte ich von beiden Lösungen mit einem grossen Lippich-Landolt'schen Apparat die Drehung der Polarisationsebene von Natriumlicht; und da während dieser Beobachtung die Reaction fortschritt, verfuhr ich in der Weise, dass zuerst die Lösung I, dann die Lösung II, darauf wieder I, nun II und schliesslich wieder I untersucht wurde. Im Folgenden sind die Mittel der am Apparat abgelesenen Einstellungen mitgetheilt.

Die Lösungen blieben nach dieser Beobachtung beide unter Atmosphärendruck stehen und ihre Drehung wurde an den folgenden Tagen noch einige Male bestimmt.

Der Nullpunkt des 400theiligen Theilkreises lag bei 399°,00.

Erster Versuch.

104 ccm Lösung enthielten 10,11 g Zucker und 4 ccm HCl. Einstellung am Polarisationsapparat nachdem Lösung I 11 Stunden unter einem Druck von 510 Atm. gestanden hatte:

bei Lösung	I (Druck = 510 Atm.)	Mittel	379°,66
„ „	II („ = 1 „	„	380°,14
		Differenz	0°,48

Einstellung ca. 12 Stunden später, während welcher Zeit beide Lösungen unter Atmosphärendruck standen:

bei Lösung	I	390°,87
„ „	II	391°,24
Differenz		0°,37

Einstellung 4 Tage nach der letzten Beobachtung; Druck wie oben:

bei Lösung	I	8°,46	
„ „	II	8°,49	
	Differenz	0°,03	

Die Temperatur der Lösungen lag etwas über 16°,0.

Zweiter Versuch.

104 ccm Lösung enthielten 10,14 g Zucker und 4 ccm HCl. Einstellung am Polarisationsapparat, nachdem Lösung I 36 Stunden unter einem Druck von 500 Atm. gestanden hatte:

bei Lösung	I (Druck 500 Atm.)	Mittel	396°,70
„ „	II („ 1 „)	„	397°,59
		Differenz	0°,89

Einstellung 12 Stunden später, während welcher Zeit beide Lösungen unter Atmosphärendruck standen:

bei Lösung	I	0°,74
„ „	II	1°,32
	Differenz	0°,58

Einstellung 2 Tage nach der letzten Beobachtung; Druck wie oben:

bei Lösung	I	5°,37
„ „	II	5°,68
	Differenz	0°,31

Einstellung 3 Tage nach der letzten Beobachtung; Druck wie oben:

bei Lösung	I	8°,71
„ „	II	8°,84
	Differenz	0°,13

Einstellung 4 Tage nach der letzten Beobachtung; Druck wie oben

bei Lösung	I	9°,15
„ „	II	9°,16
	Differenz	0°,01

Die Temperatur der Lösungen war stets nur wenige Zehntelgrade von 16°,0 verschieden.

Die übrigen hier nicht mitgetheilten Versuche lieferten in qualitativer Beziehung dasselbe Resultat, alle deuten darauf hin, *dass die Reactionsgeschwindigkeit durch Druck vermindert wird*, dass somit nach Arrhenius'scher Anschauung der

Dissociationsgrad wenigstens in unserem Fall durch Druck verringert wird.

Nicht unerwähnt darf die Bemerkung bleiben, dass dieser Schluss erst dann mit Sicherheit aus den Beobachtungen gezogen werden könnte, wenn nachgewiesen wäre, dass die Producte der Inversion in beiden Fällen, beim Druck einer und beim Druck von 500 Atmosphären in chemischer Beziehung dieselben sind. Eine solche chemische Untersuchung habe ich nicht vornehmen können, und muss an Stelle derselben das sich aus den obigen Versuchsdaten ergebende Resultat setzen, dass im Laufe der Zeit die Differenz der Drehungen in beiden Lösungen verschwindet.

Verschiedene Controlversuche, deren Mittheilung der Kürze halber unterbleiben soll, dienten dazu, um das oben ausgesprochene Resultat gegen andere mögliche Einwände zu schützen.

3. Ein anderes Mal habe ich versucht, ob die Diffusion von Salzen in Wasser durch Druck merklich beeinflusst wird. Versuche über sogenannte freie Diffusion scheiterten an der Schwierigkeit, eine genügend genaue Methode für den vorliegenden Zweck ausfindig zu machen; dagegen gelangen Versuche über Diffusion durch Membrane (Osmose) sehr gut, und einige davon möchte ich hier mittheilen.

Die benutzte Lösung war Zinksulfatlösung von der Dichte 1,135 bei 13°;5. Als Diffusionsgefässe nahm ich zwei circa 6 ccm haltende Gläschen (I und II), welche die Form von enghalsigen, dickbäuchigen Flaschen hatten. Der Boden bestand aus einem absichtlich nicht straff gespannten, aber gut schliessenden Stück Fischblase (Hausenblase). Beim Füllen der Fläschchen mit der Lösung wurde die schlaffe Membran mit dem Finger etwas gehoben, damit das beim Versuch durch Osmose eindringende Wasser den Druck im Innern nicht merklich erhöhte. Die Fläschchen wurden ganz mit Flüssigkeit gefüllt und dann mit einigen Tropfen Marineleim verschlossen.

Nachdem die beiden Gläschen gewogen waren, wurde das eine mittelst einer um den Hals geschlungenen Schnur in dem grossen, mit Regenwasser gefüllten Compressionscylinder eines Cailletet'schen Apparates und das andere gleichzeitig in derselben Weise in einem mit Wasser gefüllten Glascylinder

von derselben Weite und derselben Länge wie der Stahlcylinder aufgehängt. Beide Cylinder standen dicht neben einander in einem grossen mit Wasser gefüllten Fass, um die Temperatur beider Diffusionsapparate constant und gleich zu erhalten. Sodann wurde im Stahlcylinder der Druck auf 500 Atmosphären gebracht; darauf blieb der Apparat während einer Stunde und 45 Minuten unberührt. — Nach Verlauf dieser Zeit holte ich beide Fläschchen aus dem Wasser heraus, trocknete sie rasch oberflächlich ab und brachte sie wieder auf die Wage.

In dieser Weise habe ich folgende Resultate erhalten.

Erster Versuch. Controlversuch.

I im Stahlcylinder, Druck = 1 Atm.; II im Glasrohr, Druck = 1 Atm.

I wog vor der Diffusion	11,48 g	II wog vor der Diffusion	11,435 g
I „ nach „ „	11,88 g	II „ nach „ „	11,99 g
Zunahme	0,40 g	Zunahme	0,555 g

Der Unterschied in der Zunahme des Gewichts rührt von der verschiedenen Beschaffenheit der Membranen und der verschiedenen Weite der Gläschen und nicht davon her, dass das eine Gläschen im Stahlcylinder, das andere im Glasrohr aufgehängt war; das beweist der folgende Versuch, bei welchem beide Diffusionsgefässe in demselben mit Wasser gefüllten, grossen Becherglas hingen.

Zweiter Versuch.

I und II im Becherglas; Druck = 1 Atm.

I wog vor der Diffusion	11,47 g	II wog vor der Diffusion	11,28 g
I „ nach „ „	11,91 g	II „ nach „ „	11,87 g
Zunahme	0,44 g	Zunahme	0,59 g

Die im ganzen etwas grössere Zunahme findet ihre Erklärung darin, dass in dem grossen Becherglas die Circulation des Wassers eine bessere ist, als in den engen Cylindern; die Differenz der Zunahme aber ist ebenso gross, wie beim ersten Versuch.

Dritter Versuch.

I im Stahlcylinder, Druck = 500 Atm.; II im Glascylinder Druck = 1 Atm.

I wog vor der Diffusion	11,53 g	II wog vor der Diffusion	11,50 g
I „ nach „ „	12,05 g	II „ nach „ „	12,06 g
Zunahme	0,25 g	Zunahme	0,56 g

Vierter Versuch.

I im Stahlcylinder, Druck = 500 Atm.; II im Glascylinder, Druck = 1 Atm.

I wog	vor der Diffusion	11,55 g		II wog	vor der Diffusion	11,51 g
I „	nach „ „	12,03 g		II „	nach „ „	12,07 g
	Zunahme	0,48 g			Zunahme	0,56 g

Fünfter Versuch.

I im Glasrohr, Druck = 1 Atm.; II im Stahlcylinder Druck = 500 Atm.

I wog	vor der Diffusion	11,48 g		II wog	vor der Diffusion	11,55 g
I „	nach „ „	11,87 g		II „	nach „ „	12,21 g
	Zunahme	0,39 g			Zunahme	0,66 g

Die Temperatur des Bades betrug 13—14°.

Dass zwischen je zwei Versuchen die Fläschchen jedesmal mit frischer Lösung gefüllt wurden, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

Aus den oben mitgetheilten Daten ergibt sich nun, dass *bei 500 Atmosphären ungefähr 20 Proc. mehr Wasser durch die Membran gegangen ist, als bei einer Atmosphäre.* Da keine Analyse der Lösung nach der Diffusion gemacht wurde, bleibt die Frage, wie sich das Salz in Bezug auf Diffusionsgeschwindigkeit verhalten hat, unbeantwortet. Ebenso ist es unentschieden, ob die Vermehrung der hindurchgegangenen Wassermenge eine Folge ist von einem Einfluss, den der Druck auf die sich innerhalb der Membran abspielenden Vorgänge ausübt, oder davon, dass die Salztheilchen sich ausserhalb der Membran in dem durch Druck leichtflüssiger gewordenen Wasser leichter bewegen und dadurch das Concentrationsgefälle bei 500 Atmosphären ein grösseres ist, als bei einer Atmosphäre.

Selbstverständlich habe ich dafür gesorgt, dass kein Wasser durch die Drucksteigerung auf 500 Atmosphären auf directem Wege in das betreffende Diffusionsgefäss hineingepresst wurde.

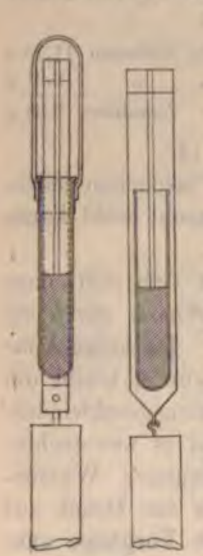
Bei einer anderen Versuchsreihe mit denselben Gläschen und denselben Membranen, die aber in diesem Fall vorher mit Natronlauge behandelt waren, um sie möglichst von allem Fett zu befreien, ergab sich ziemlich dasselbe Verhältniss zwischen den durch die Membran diffundirten Wassermengen,

wiewohl in beiden Apparaten mehr Wasser in derselben Zeit eingedrungen war.

Auch eine dritte Versuchsreihe mit Goldschlägerhaut führte in qualitativer Beziehung zu demselben Resultat.

Da der behandelte Gegenstand sowohl von physikalischem als vielleicht auch von biologischem Interesse ist, dürfte sich eine ausführlichere Untersuchung desselben wohl empfehlen.

4. Von Warburg und Sachs ist nachgewiesen, dass die Viscosität von Aether, Benzol und flüssiger Kohlensäure mit zunehmendem Druck zunimmt; es schien mir von Interesse zu sein, auch das Verhalten eines festen Körpers in dieser Hinsicht zu untersuchen. Als solchen wählte ich Marineleim (Glu marine).


Fig. 1. Fig. 2.

Derselbe gehört zu denjenigen interessanten Körpern, welche sich einer kleinen aber während längerer Zeit wirkenden Kraft gegenüber wie eine zähe Flüssigkeit, einer grossen, kurze Zeit wirkenden Kraft dagegen wie ein spröder Körper verhalten. Bei einer Temperatur von 17° z. B. breitet sich ein Stück Marineleim durch sein eigenes Gewicht auf einer festen Unterlage im Laufe der Zeit immer mehr und mehr aus. Ein kräftiger Schlag mit einem eisernen Hammer dagegen erzeugt keinen nennenswerthen bleibenden Eindruck; die Platte zerspringt aber in viele Stücke, wie ein sehr spröder Körper.

Mit dieser Substanz wurden im Wasserbad bei 100° zwei 10 cm hohe, 1,6 cm weite cylindrische Gläschen bis etwas über die Hälfte gefüllt. Nach dem Erkalten und Erstarren der zusammengeschmolzenen Masse wurden beide in je einem mit Bügel versehenen Ring gestellt. (Fig. 1 und 2 [1]).) Auf die Masse wurde dann je ein 0,3 dicker, am unteren Ende eben abgefeilter Messingstab vertical aufgesetzt, welcher in einer aus der Figur leicht ersichtlichen Weise durch ein an-

1) In Fig. 2 ist der Deutlichkeit halber der Ring mit Bügel weggelassen.

gehängtes ca. 1200 g schweres Bleigewicht belastet werden konnte. Beide Belastungen wurden möglichst gleichzeitig angebracht und kurze Zeit nachher von beiden Stäbchen bestimmt, wie weit sie noch aus den Gläschen herausragten. Darauf kam der eine Apparat in den Cailletet'schen Compressionscylinder, der andere in das Wasserbad dicht neben dem Cylinder, und der Druck wurde im Cylinder auf 500 Atmosphären gebracht. Nach Verlauf einiger Zeit (siehe unten) nahm ich beide Apparate aus dem Wasser heraus, um die Strecke zu bestimmen, um welche die Messingstäbe in den Marineleim eingedrungen waren, setzte dann die Apparate wieder in den Cylinder resp. das Bad ein und wiederholte dieselben Operationen einige Male. — Beim nächsten Versuche wurden die Apparate mit einander vertauscht, d. h. derjenige der vorher unter hohem Druck gestanden hatte, kam jetzt ins Bad und umgekehrt.

Auch hier beschränke ich mich auf die Mittheilung einer Versuchsreihe.

In den folgenden Tabellen bedeuten die Zahlen unter „*h*" die Strecke, um welche die Messingstäbchen bei jeder Messung aus den Gläschen herausragten.

A. I im Stahlcylinder, Druck = 500 Atm.; II im Bad Druck = 1 Atm.

h in I	*h* in II	Zeit	Bemerkungen
		$10^h\ 15^m$	belastet
4,8 cm	5,0 cm	$10^h\ 20^m$	eingesetzt
4,45 „	4,0 „	$11^h\ 0^m$	heraus, gemessen und wieder eingesetzt
3,9 „	3,1 „	$12^h\ 20^m$	heraus, gemessen und wieder eingesetzt
3,7 „	2,3 „	$1^h\ 55^m$	definitiv heraus
Ganze Senkung: 1,1 cm	resp. 2,7 cm	in $3^h\ 35^m$	

B. I im Bad, Druck = 1 Atm.; II im Stahlcylinder, Druck = 500 Atm.

h in I	*h* in II	Zeit	Bemerkungen
		5^h 40^m	belastet
4,6 cm	4,6 cm	5^h 45^m	eingesetzt
3,65 „	4,3 „	6^h 25^m	heraus, gemessen und wieder eingesetzt
2,7 „	3,85 „	7^h 45^m	heraus, gemessen und wieder eingesetzt
1,75 „	3,3 „	9^h 15^m	definitiv heraus
Ganze Senkung: 2,85 cm resp. 1,3 cm		in 3^h 30^m	

Die Temperatur des Bades betrug ungefähr 16°.

Nach diesen Versuchen, und die übrigen ergaben im Wesentlichen die gleichen Resultate, besteht kein Zweifel darüber, *dass der Marineleim bei 500 Atmosphären bedeutend härter ist als bei gewöhnlichem Druck.*

Man könnte vielleicht geneigt sein, zu glauben, dass der Marineleim durch Druck dauernd gehärtet worden wäre; dem ist aber nicht so, wie ein Controlversuch zeigte, bei welchem das eine der beiden Gläschen *bevor* die Messingstäbchen aufgesetzt wurden, ca. 3 Stunden lang unter einem Druck von 500 Atmosphären gestanden hatte. Auch zeigte sich in der Dichte keine Aenderung, nachdem der Druck längere Zeit gewirkt hatte. —

Man darf deshalb wohl mit Sicherheit annehmen, dass es sich bei den obigen Versuchen *um eine durch Druck erzeugte, vorübergehende Vermehrung der inneren Reibung handelte.* Dieses Resultat steht dann aber im Einklang mit den Vorstellungen, die wir uns über die Constitution der Körper machten (vgl. die vorhergehende Mittheilung); denn nach diesen müsste in dem vorliegenden Fall durch Erhöhung des Druckes die Anzahl derjenigen Molecüle, welche dem Körper den Charakter des festen Zustandes geben, vermehrt werden, was dann ein Härterwerden des Körpers zur Folge haben würde.

Die mitgetheilte Versuchsanordnung wurde noch in verschiedener Weise modificirt; so habe ich z. B. in der Masse eingeschmolzene Messingstäbchen durch angehängte Gewichte aus derselben herausgezogen, beim einen Apparat unter Atmosphärendruck, beim anderen unter einem Druck von 500 Atmo-

sphären. Alle diese und ähnliche Versuche ergaben qualitativ dasselbe Resultat.

Ich unterlasse es, aus diesen Beobachtungen Schlüsse auf das Verhalten fester Körper bei Deformationen derselben zu ziehen und möchte nur noch bemerken, dass die ausgezeichnete Verwendbarkeit des Marineleims zum Kitten und Dichten von Apparatentheilen, die hohe Drucke auszuhalten haben, ohne Zweifel mit der gefundenen Eigenschaft zusammenhängt. Es würde gewiss von praktischer Bedeutung sein, wenn untersucht würde, wie sich auch andere Körper in dieser Hinsicht verhalten.

Aehnliche Versuche mit Wismuth und Blei haben mir keine positiven Resultate geliefert.

Würzburg, Physik. Institut, Sept. 1891.

X. *Die Geometrie der Lage in ihrer Anwendung auf die Krystallographie*[1]*; von* ***Eug. Blasius.***

In der letzten Arbeit[2]) über diesen Gegenstand wurde darauf hingewiesen, dass die Möbius'schen Netze zwar den Ausgangspunkt für die so wichtige Lehre von der collinearen Verwandtschaft bildeten, dass aber die Theorie der Netze später nicht so weit durchgeführt wurde wie viele andere Gebiete der Geometrie, namentlich die Lehre von der Collineation selbst. Aus diesem Grunde wurden bei der Anwendung der Geometrie der Lage zuerst[3]) diejenigen krystallographischen Probleme in Angriff genommen, welche sich ohne Bezugnahme auf die Netze behandeln liessen. Nebenbei wurde aber auch an einer Reihe von Beispielen bewiesen, dass man bei der Untersuchung der Netze von den Methoden der neueren Geometrie ebenfalls mit Vortheil Gebrauch machen kann. Dieser Nachweis soll im Folgenden weiter geführt und durch Angabe neuer Resultate gestützt werden.

Das Möbius'sche Netz in der Ebene wird bestimmt durch vier Geraden, von denen keine drei durch einen Punkt gehen. Verbindet man die Schnittpunkte derselben durch neue Geraden, sucht deren Schnitte mit den gegebenen und unter sich, verbindet auch diese Schnittpunkte wieder und setzt die Operationen ins Unbegrenzte fort, so erhält man die sämmtlichen Punkte und Geraden des Netzes. Das Möbius'sche Netz im Raum ist durch fünf Ebenen gegeben und wird ebenso wie das Netz in der Ebene durch Schnitt und Verbindungen

1) Wenngleich der Inhalt der vorliegenden Abhandlung eigentlich etwas ausserhalb des Gebietes der Annalen liegt, so hat die Redaction sie doch aufnehmen zu dürfen geglaubt, da der Hr. Verf. weitere physikalische Folgerungen daran zu knüpfen beabsichtigt. D. Red.

2) Eug. Blasius, Beitrag zur geometrischen Krystallographie. Wied. Ann. **41**. p. 538—564. 1890.

3) Eug. Blasius, Die Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme. Wied. Ann. **22** p. 528—549. 1884 und Zeitschr. f. Kryst. **11**. p. 140 bis 146. 1885, sowie der citirte Aufsatz.

r Elemente construirt. Ist eine der fünf Geraden die unidlich ferne, so nennen wir das ebene Netz ein krystalloaphisches, ist eine der fünf Ebenen die unendlich ferne, so nnen wir das räumliche Netz ein krystallographisches. Die lgemeinen Möbius'schen Netze im Raum haben noch keine rystallographische Anwendung gefunden; wir wollen uns daer nicht mit ihnen beschäftigen. Dagegen entsteht ein allemeines ebenes Netz immer als Schnitt eines räumlichen rystallographischen Netzes mit einer demselben nicht angeörenden Ebene. Die Centralprojectionen des krystallographihen räumlichen Netzes aus einem Systempunkt auf andere ls Systemebenen sind auch nicht krystallographische, sonern allgemeine Netze. Die letzteren sind also krystallograhisch von Bedeutung und sollen demgemäss im Folgenden ehandelt werden. Wir wenden uns zunächst im I. Theile zu en ebenen Netzen, den allgemeinen sowohl wie den krystalloraphischen und behandeln in diesem Zusammenhange auch ie einförmigen Grundgebilde: Strahlenbüschel, Punktreihe nd Ebenenbüschel. Im II. Theile gehen wir zur Lehre von en krystallographischen Bündeln über, für welche wir von ielen Sätzen des I. Theiles Gebrauch machen können.

I. Netze in der Ebene und einförmige Grundgebilde.

Sind S_1 und S_2 zwei beliebige Netz- oder Systempunkte ines ebenen krystallographischen Netzes, so schneidet jeder urch S_1 gehende Systemstrahl die unendlich ferne Systemrade in einem Systempunkte. Ein durch den Punkt S_2 zu r Geraden parallel gelegter Strahl verbindet also zwei Systemınkte und ist daher auch eine Systemgerade. Ebenso ergibt h zu jedem Systemstrahl des Büschels S_2 ein solcher des ischels S_1.

1. Das krystallographische Netz enthält lauter congruente rahlenbüschel, deren entsprechende Strahlen parallel sind.

Drei im Endlichen gelegene Geraden, welche ein Dreieck den, bestimmen ein krystallographisches Netz. Der Systemahlenbüschel enthält drei zu den Geraden parallele Strahlen d alle daraus durch Construction der vierten harmonischen leitbaren. Es werden sich also besondere Symmetrieeigenaften des Dreiecks auf den Strahlenbüschel übertragen.

Zugleich mit den ausgezeichneten Arten der Strahlenbüschel ergeben sich auf diese Weise auch diejenigen der Ebenenbüschel oder krystallographischen Zonen. Denn der Strahlenbüschel kann immer als ein zur Axe senkrechter Schnitt durch eine Zone aufgefasst werden. Wichtig sind folgende Fälle:

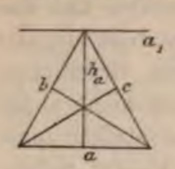


Fig. 1.

1) *Das gleichseitige Dreieck.* (Fig. 1.) Legt man durch eine Ecke eine Parallele a_1 zur gegenüberliegenden Seite a, so ist die aus dieser Ecke gefällte Höhe h_a ein Strahl, der zum System gehört, denn sie wird durch die Seiten b und c von a_1 harmonisch getrennt. In dem zugehörigen Strahlenbüschel gibt es also drei Paare aufeinander senkrechter Strahlen. Wenn aber nur zwei solcher Paare vorhanden sind, so steht auf jedem Systemstrahl des Büschels ein anderer senkrecht. Der Büschel ist folglich ein orthogonaler mit dem Winkel 60°, wie er in der Hauptsymmetrieebene des hexagonalen Systemes und der Oktaëderfläche des regulären vorkommt. Senkrecht zu diesen Flächen liegen die Axen von Zonen derselben Art.

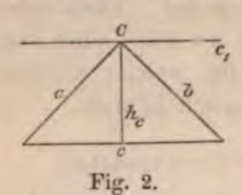


Fig. 2.

2) *Das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck.* (Fig. 2.) Ein Strahl c_1, welcher durch den Scheitel C des rechten Winkels geht und parallel zur Hypothenuse c ist, wird von der Höhe h_c durch die Katheten a und b harmonisch getrennt. Die Höhe ist daher eine Gerade des Systems. Der Büschel besitzt zwei Paare aufeinander senkrechter Strahlen, nämlich h_c und c_1, a und b und ist in Folge dessen ein orthogonaler. Solche orthogonale Büschel mit dem Winkel 45°, enthält die Hauptsymmetrieebene des tetragonalen, und die Würfelfläche des regulären Systems. Die Zonen, deren Axen auf den genannten Flächen senkrecht stehen, sind gleichfalls Zonen von dieser Art.

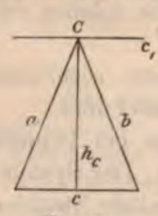


Fig. 3.

3) *Das gleichschenklige Dreieck.* (Fig. 3.) Sind a und b die gleichen Seiten, so wird, wie im vorigen Falle die durch C gelegte Parallele zu c durch a und b von h_c harmonisch getrennt und h_c ist demnach ein Systemstrahl. Es ist also wieder ein

Paar von senkrechten Systemstrahlen vorhanden; wenn aber der Winkel (ab) nicht besondere Werthe annimmt, braucht kein zweites derartiges Paar vorzukommen. Der Büschel ist zu den beiden aufeinander senkrechten Strahlen symmetrisch.[1]) Solche Büschel kommen in allen Ebenen des rhombischen Systems vor, die eine Axe enthalten, in allen ausser den Hauptsymmetrieebenen des hexagonalen und tetragonalen Systems u. s. w.; wir wollen sie kurz rhombische Büschel nennen und ihre aufeinander senkrechten Strahlen *ausgezeichnete Strahlen* oder *Axen.*

4) *Das rechtwinklige Dreieck.* Wenn die spitzen Winkel des Dreiecks nicht besondere Werthe annehmen, so haben wir es mit einem Büschel zu thun, welcher nur zwei aufeinander senkrechte Systemstrahlen besitzt, also mit einem Büschel von gleicher Art, wie im vorigen Falle.

5) *Das schiefwinklige Dreieck.* Wenn die Winkel keine besonderen Werthe annehmen, so ist der Büschel ein solcher ohne Merkmale. Derartige Büschel kommen im triklinen System und auf schräg gegen die Axe liegenden Ebenen des monosymmetrischen und rhombischen Systems vor.

Damit haben wir ohne Rechnung die Haupttypen der krystallographischen Strahlenbüschel und Zonen kennen gelernt. Im Verlaufe der weiteren Untersuchung wird sich dann noch manches über dieselben ergeben.

Ein orthogonaler Büschel ist zu jedem seiner Systemstrahlen s symmetrisch; denn auf s steht ein anderer Systemstrahl s_1 senkrecht und jeder weitere Systemstrahl p wird durch s und s_1 von dem ihm bezüglich s und s_1 symmetrischen harmonisch getrennt. Zu sämmtlichen Systemstrahlen p sind bezüglich s symmetrische Systemstrahlen vorhanden. Wir wollen einen orthogonalen Büschel S mit den Systemstrahlen $abc \ldots m \ldots$ festhalten, während ein ihm congruenter concentrischer und beweglicher Büschel S_1 mit den Strahlen $a_1 b_1 c_1 \ldots m_1 \ldots$, welche Anfangs bezw. mit $abc \ldots m \ldots$ zusammenfallen um den gemeinsamen Mittelpunkt gedreht wird, bis der Systemstrahl a_1 von S_1 auf den beliebigen Systemstrahl m von S fällt. In dieser Lage deckt sich auch der

1) Eug. Blasius, Beitrag z. geom. Kryst., Wied. Ann. **41**. p. 552. 1890.

auf a_1 senkrechte Systemstrahl von S_1 mit dem zu m normalen Systemstrahl von S. Endlich fällt auf den Strahl a von S ein Strahl von S_1, welcher zu m_1 symmetrisch bezüglich a_1 liegt und daher auch Systemstrahl von S_1 ist. Von den Büscheln S_1 und S_2 kommen demnach drei und folglich alle Strahlen zur Deckung. Also:

2. *Jeder orthogonale Strahlenbüschel kommt wieder vollständig mit sich zur Deckung, wenn er um seinen Mittelpunkt derart herumgedreht wird, dass ein einziger Systemstrahl auf den früheren Ort eines anderen Systemstrahles fällt.*

2a. *Kommt in einem orthogonalen krystallographischen Strahlenbüschel irgend ein Winkel zwischen zwei Systemstrahlen vor, so sind auch zu jedem anderen Systemstrahl zwei solche vorhanden, die diesen Winkel mit ihm einschliessen und in Bezug auf ihn symmetrisch liegen.*

3. *Jeder orthogonale Ebenenbüschel oder jede orthogonale Zone kommt wieder vollständig mit sich zur Deckung, wenn sie um ihre Axe so herumgedreht wird, dass eine einzige krystallographische Ebene derselben in die frühere Lage einer anderen fällt.*

3a. *Kommt in einem orthogonalen krystallographischen Ebenenbüschel irgend ein Winkel zwischen zwei Systemebenen vor, so sind zu jeder Systemebene zwei solche vorhanden, die unter diesem Winkel gegen sie geneigt sind und in Bezug auf sie symmetrisch liegen.*

Die Bestimmungsstücke des ebenen Netzes sind vier Punkte, oder ein Punkt und drei Strahlen, oder vier Strahlen, oder endlich ein Strahl und drei Punkte. Häufig werden wir Gebrauch machen von einer Bestimmungsweise die sich nur durch die Bezeichnung von diesen unterscheidet, indem wir als Fundamentalstücke zwei krystallographische Strahlenbüschel geben, welche nicht mit einander in Widerspruch sind. Es ist nicht möglich von zwei beliebigen und beliebig gelegenen Strahlenbüscheln auszugehen. Die einzige Bedingung aber, die erfüllt werden muss ist die, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte in beiden Büscheln ein Systemstrahl ist. Zur Bestimmung der beiden Büschel sind in jedem noch zwei Strahlen nothwendig, und wenn wir diese Strahlenpaare als Seiten eines Vierseits auffassen, erkennen wir, dass die neue Bestimmungsweise thatsächlich auf eine der früheren herauskommt.

Die Mittelpunkte der Büschel sind zwei Gegenecken, ihre Verbindungslinie eine Diagonale des Vierseits. Ebenso kann die Bestimmung des Netzes auch auf die Angabe von zwei Systempunktreihen gegründet werden, welche nicht mit einander in Widerspruch sind, d. h. deren gemeinschaftlicher Punkt in beiden Punktreihen ein Systempunkt ist. Man sieht nämlich, dass auf jeder Seite des Vierseits, durch die Schnitte mit den drei übrigen, drei Systempunkte gegeben sind, so dass man die weiteren Systempunkte durch fortgesetzte Construction der vierten harmonischen finden kann.

Durch die neuen Bestimmungsmethoden des Netzes werden wir gleich auf einige Folgerungen geführt, welche im Laufe der Untersuchung von Wichtigkeit sein werden. Wir wollen die beiden Strahlenbüschel, durch welche das Netz gegeben sein soll, derart auf einander projectivisch beziehen, dass drei Systemstrahlen des einen $a\,b\,c$, drei Systemstrahlen $a_1\,b_1\,c_1$ des anderen entsprechen. Dann ist auch jedem Systemstrahl p des ersten Büschels ein Systemstrahl p_1 des zweiten zugeordnet. Denn ist p durch fortgesetzte Construction des vierten harmonischen aus den Strahlen $a\,b\,c$ abgeleitet, so führt dieselbe Constructionsfolge, auf die Strahlen $a_1\,b_1\,c_1$ angewandt, auf den entsprechenden Strahl des zweiten Büschels. Die entsprechenden Systemstrahlen schneiden sich in Systempunkten, und da die beiden projectivischen Büschel im allgemeinen eine Curve II. Ordnung erzeugen, so folgt:

4. *In dem Möbius'schen Netz sind Curven II. Ordnung vorhanden, auf denen unendlich viele Systempunkte liegen.*

Die beiden Strahlenbüschel, von denen wir ausgegangen sind, spielen in dem Möbius'schen Netze keine bevorzugte Rolle. Statt ihrer können wir irgend zwei beliebige andere Systembüschel des Netzes wählen und diese noch in unendlich vielen verschiedenen Weisen aufeinander projectivisch beziehen, so dass Systemstrahlen Systemstrahlen entsprechen. Wir erhalten folglich eine unbegrenzte Anzahl von Curven II. Ordnung, von denen jede durch unendlich viele Systempunkte geht. Wenn wir beachten, dass auch die Netzgerade unendlich viele Netzpunkte enthält, so werden wir die Curven wohl als *Netzcurven* oder *Systemcurven* bezeichnen und zunächst untersuchen, inwieweit ihr Verhalten mit demjenigen der Netz-

geraden übereinstimmt. Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, zwei Systempunkte eine Systemgerade, fünf Punkte bestimmen eine Curve II. Ordnung.. Es liegt nahe zu vermuthen, dass wenn die fünf Punkte Systempunkte sind, die Curve eine Systemcurve ist, und das ist in der That der Fall. Seien die Punkte $ABCDE$. Man bezieht nun, um die Curve zu construiren die Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten D und und E so aufeinander, dass die Strahlen $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ bezw. den Strahlen $\overline{EA}$, $\overline{EB}$, $\overline{EC}$ entsprechen. Der Schnitt dieser projectivischen Strahlenbüschel ist die gesuchte Curve II. Ordnung. Da, wie wir oben gesehen haben, bei der Beziehung die Systemstrahlen des einen Büschels den Systemstrahlen des anderen entsprechen, so liegen auf der Curve unendlich viele Systempunkte.

5. *Eine Curve II. Ordnung, welche durch fünf Netzpunkte bestimmt wird, besitzt unendlich viele Netzpunkte und ist also eine Netzcurve II. Ordnung.*

Die Curve kann in derselben Weise auch erzeugt werden durch den Strahlenbüschel D und irgend einen anderen Strahlenbüschel des Systems, der einen beliebigen Systempunkt der Curve zum Mittelpunkt hat. Auch dann schneiden sich entsprechende Systemstrahlen der beiden Büschel in Systempunkten der Curve. Geht also irgend eine Systemgerade g durch einen Systempunkt der Curve, so ist dieselbe eine Systemgerade des Büschels, deren Mittelpunkt dieser Punkt ist. Ihr zweiter Schnittpunkt mit der Curve muss gleichfalls ein Systempunkt sein, als Schnittpunkt von g mit der entsprechenden Geraden irgend eines anderen Systembüschels, dessen Centrum ein Systempunkt der Curve ist.

6. *Legt man durch einen Systempunkt einer Systemcurve II. Ordnung einen Systemstrahl, so schneidet er die Curve noch in einem zweiten Systempunkt,* oder:

Jeder Systemstrahl schneidet jede Systemcurve II. Ordnung in zwei Systempunkten, wenn er sie in einem Systempunkt schneidet, oder auch:

Durch einen nicht auf einer Systemcurve II. Ordnung liegenden Systempunkt als Involutionscentrum werden die Punkte der Curve einander derart zugeordnet, dass Systempunkte Systempunkten entsprechen.

Sind P und Q zwei beliebige Systempunkte einer Systemcurve II. Ordnung, so entspricht in dem Strahlenbüschel P die Tangente an die Curve dem Strahle $\overline{QP}$ des Büschels Q. Die Tangente im Punkte P muss also eine Systemgerade sein.

7. *Die Tangente an eine Systemcurve II. Ordnung in einem Systempunkt ist eine Systemgerade.*

Die Systemcurve II. Ordnung auf der unendlich viele Systempunkte liegen, ist zugleich eine Systemcurve II. Classe, die von unendlich vielen Systemgeraden umhüllt wird.

Sind auf einer Geraden drei Systempunkte gegeben, so findet man die übrigen durch fortgesetzte Construction der vierten harmonischen. Das gleiche gilt für die Systemcurve II. Ordnung; denn sind auf einer solchen drei Systempunkte ABC gegeben, und legt man, durch irgend zwei andere Systempunkte QP derselben ABC Strahlen nach, so ist der Schnittpunkt der in den Büscheln P und Q zu den nach ABC gehenden Strahlen in derselben Weise construirten, vierten harmonischen Strahlen der auf der Curve liegende vierte harharmonische Punkt zu den drei Punkten ABC u. s. w.

8. *Auf einer Systemcurve II. Ordnung ist die Gesammtheit der Systempunkte durch drei von ihnen gegeben. Die Uebrigen werden durch fortgesetzte Construction der vierten harmonischen gefunden.*

Da auf diese Weise durch drei auf einem Kegelschnitt gelegene Systempunkte mit Hülfe des Kegelschnitts ein vierter Systempunkt construirbar ist, der mit keinen zwei der ersten auf einer Geraden liegt, so ist durch Angabe dreier Systempunkte und eines durch sie gehenden Systemkegelschnittes das ganze System bestimmt.

9. *Durch drei Systempunkte und einen durch sie gelegten Systemkegelschnitt ist das Netz bestimmt.*

Legt man durch einen beliebigen nicht auf einer Systemcurve II. Ordnung c gelegenen Systempunkt A zwei Secanten nach zwei Systempunkten P und Q der Curve, so schneiden diese die Curve in zwei weiteren Systempunkten P' und Q' (Satz 6). Auch die Punkte, welche von A durch P und P_1, bezw. durch Q und Q' harmonisch getrennt sind, müssen Systempunkte sein, weil die Construction der vierten harmonischen in Punktreihe und Strahlenbüschel überhaupt das Funda-

ment der Netzconstruction ist. Die Polare des Punktes A ist also, als Verbindungslinie dieser beiden Systempunkte, eine Systemgerade.

10. *Die Polare eines Systempunktes bezüglich einer Systemcurve II. Ordnung ist eine Systemgerade.*

Construirt man daher die Polaren von zwei beliebigen auf einer Systemgeraden g liegenden Systempunkten, bezüglich der Systemcurve, so ist ihr Schnitt, der Pol der Geraden g, als Schnitt von Systemgeraden ein Systempunkt.

11. *Der Pol einer Systemgeraden bezüglich einer Systemcurve II. Ordnung ist ein Systempunkt.*

Berührt eine Systemgerade g eine Systemcurve II. Ordnung, und construirt man die Polare eines in ersterer liegenden Systempunktes, so ist diese (nach Satz 10) eine Systemgerade, und da sie eine Systemgerade g in deren Berührungspunkt schneidet, so ist der Berührungspunkt ein Systempunkt. Der Satz kann auch als besonderer Fall des vorigen aufgefasst werden.

12. *Berührt eine Systemgerade eine Systemcurve II. Ordnung, so ist der Berührungspunkt ein Systempunkt.*

Werden von einem nicht auf einer Systemcurve II. Ordnung gelegenen Systempunkt A die Tangenten an die Systemcurve gelegt, und ist die eine derselben eine Systemgerade, so ist ihr Berührungspunkt ein Systempunkt. Da die Polare von A eine Systemgerade ist, und sowohl durch diesen Berührungspunkt, wie durch denjenigen der zweiten Tangente geht, so ist (nach Satz 6) auch der zweite Berührungspunkt ein Systempunkt, folglich auch die zweite Tangente eine Systemgerade.

13. *Die Tangenten von einem nicht auf der Systemcurve II. Ordnung liegenden Systempunkt sind entweder beide Systemgeraden, oder keine von beiden ist es.*

Der Satz 6 spielt bei dem Beweise von mehreren der eben gegebenen Sätze eine Rolle, und derselbe ist auch maassgebend für die Systemstücke der anderen Aufgaben II. Grades im Möbius'schen Netz. Eine derartige Aufgabe ist z. B. folgende. Zwei Systemstrahlenbüschel liegen concentrisch und besitzen dieselben Systemgeraden; es sollen die entsprechend gemeinen Strahlen derselben gefunden werden. Seien abc

drei Systemstrahlen des einen Büschels S und $a_1 b_1 c_1$ die entsprechenden des Büschels S_1. Wir construiren ein ebenes Netz, in welchem der Büschel $S(a\,b\,c)$, also auch der Büschel $S_1(a_1 b_1 c_1)$ Systembüschel sind, indem wir drei Systempunkte $A\,B\,C$ bezw. auf den Strahlen $a\,b\,c$ wählen. Dann legen wir[1]) durch $S\,A\,B\,C$ und einen weiteren Punkt des Systems eine Curve II. Ordnung. Dieselbe schneide die Strahlen $a_1 b_1 c_1$ bezw. in den Punkten $A_1 B_1 C_1$, welches Systempunkte sein müssen. Verbindet man nun A und B_1, B mit A_1 und ebenso A mit C_1 und C mit A_1 und nennt die Schnittpunkte der beiden ersteren Geraden N, den der letzteren M, so ist die Verbindungslinie u der Punkte M und N als Verbindungslinie von Systempunkten eine Systemgerade. Die Gerade u schneidet die Curve in Punkten $U\,V$, welche mit S verbunden, die entsprechend gemeinen Strahlen der beiden Strahlenbüschel ergeben. Ist einer von den Punkten $U\,V$ ein Systempunkt, so muss es auch der andere sein, das gleiche gilt daher auch für die entprechend gemeinen Strahlen u und v.

14. *Liegen zwei Systemstrahlenbüschel concentrisch, und besitzen sie dieselben Systemstrahlen, so sind entweder ihre beiden entsprechend gemeinen Strahlen Systemstrahlen, oder keiner von beiden ist ein solcher.*

Der Fall, dass beide entsprechend gemeinen Strahlen Systemgeraden sind, ist leicht zu verwirklichen. Wir brauchen nur drei Strahlen $a\,b\,c$ in dem einen Büschel anzunehmen und resp. drei Strahlen $a\,b\,c_1$ zuzuordnen, wovon c_1 sich durch fortgesetzte Construction der vierten harmonischen aus $a\,b\,c$ ableitet.

Im Folgenden werden öfters involutorische Elementargebilde eine Rolle spielen und da die Aufgabe in solchen die Ordnungselemente zu finden, gleichfalls eine Aufgabe II. Grades, mit der eben (Satz 14) behandelten nahe verwandt ist, so wollen wir uns jetzt zu den involutorischen Gebilden im Netze wenden. Eine involutorische Punktreihe ist gegeben durch zwei Paare zugeordneter Punkte $A\,A_1$ und $B\,B_1$. Für uns ist der Fall von besonderem Interesse, dass die vier Punkte demselben System angehören, d. h. dass der vierte durch

---

1) Vgl. Reye I. p. 140. 1882.

fortgesetzte Construction der vierten harmonischen aus den drei anderen gefunden werden kann. Unter diesen Umständen wird auch jedem weiteren Systempunkt P der Punktreihe ein Systempunkt P_1 entsprechen. Denn ist P aus den drei Punkten $A B A_1$ durch fortgesetzte Construction der vierten harmonischen construirbar, so ist es P_1 durch Anwendung der gleichen Constructionsfolge auf $A_1 B_1 A$. Der Satz gilt sowohl für den Strahlenbüschel und den Ebenenbüschel, wie für die Punktreihe.

15. *Gehören in einer involutorischen Punktreihe, einem involutorischen Strahlen- oder Ebenenbüschel zwei Paare zugeordneter Elemente zu einem System, so ist das zugeordnete Element jedes weiteren Systemelementes gleichfalls ein Systemelement.*

Um in einem involutorischen Strahlenbüschel S, in welchem zwei Paare einander zugeordneter Strahlen $a a_1$ und $b b_1$ Systemstrahlen sind, die Ordnungselemente zu finden, ergänzt man den Büschel zu einem Netz und legt durch S und Systempunkte $A A_1$ $B B_1$, welche bezw. auf den Strahlen $a a_1$ $b b_1$ liegen. eine Curve II. Ordnung. Den Schnittpunkt von $\overline{A B_1}$ mit $\overline{A_1 B}$ verbindet man durch eine Gerade w mit dem Schnittpunkt von $\overline{A B}$ und $\overline{A_1 B_1}$. Die Strahlen u und v des Büschels S, welche durch die Schnittpunkte der Geraden w mit der Curve gehen, sind die gesuchten Ordnungsstrahlen. Entweder beide müssen Systemstrahlen sein oder keiner von beiden ist es.

16. *In einer involutorischen Punktreihe, einem involutorischen Strahlen- oder Ebenenbüschel, in welchem zwei Paare von zugeordneten Elementen zu demselben System gehören, sind entweder beide Ordnungselemente Systemelemente oder keines von beiden ist ein solches.*

Der Fall, dass in einem involutorischen Gebilde I. Ordnung, in welchem unendlich viele einander zugeordnete Elemente desselben Systemes vorkommen, auch die Ordnungselemente zum System gehören, ist leicht zu verwirklichen. Man braucht nur das System in dem Gebilde I. Ordnung durch die beiden Ordnungselemente und ein weiteres Element, oder durch ein Ordnungselement und zwei einander zugeordnete Elemente zu bestimmen.

Es ist nicht nothwendig, dass eine Systemgerade eine

Systemcurve II. Ordnung in zwei Systempunkten schneidet, aber die Schnittpunkte bilden die Ordnungspunkte einer involutorischen Punktreihe, in der Systempunkte Systempunkten zugeordnet sind, und die wir kurz als *involutorische Systempunktreihe* bezeichnen wollen. Dies macht es begreiflich, dass, wenn man eine Curve II. Ordnung durch drei Systempunkte und die Ordnungspunkte einer involutorischen Systempunktreihe giebt, die Curve auch eine Systemcurve ist. Seien $A B C$ die drei Systempunkte, $D D_1$ und $E E_1$ zwei Paare zugeordneter Systempunkte der involutorischen Systempunktreihe p [1]). Wir bestimmen zunächst einen weiteren Punkt A_1 des Kegelschnittes k, so dass $\overline{A A_1}$ durch den Pol von p geht. Schneiden $\overline{B A}$ und $\overline{C A}$ die Punktreihe p bezw. in F und G und sind die diesen Punkten in der involutorischen Punktreihe zugeordneten F' und G', so sind diese (nach Satz 15) Systempunkte. Der Punkt A' ist der Schnitt der Geraden $B F'$ und $C G'$ und daher auch ein Systempunkt. Strahlen, welche von A und A_1 nach zugeordneten Systempunkten von p gehen, schneiden sich auf der Curve, die folglich eine Systemcurve ist. Der Fall gewinnt dadurch an Interesse, dass die Construction und somit der Satz auch dann gelten, wenn die Involution $D D' \; E E'$ eine gleichlaufende ist, die Ordnungspunkte also conjugirt imaginäre Punkte sind. Wir werden dadurch in der einfachsten Weise zur Einführung imaginärer Elemente in die krystallographische Betrachtung geführt.

17. *Eine Curve II. Ordnung, welche durch drei Systempunkte und die Ordnungspunkte einer involutorischen Systempunktreihe gegeben ist, ist auch, wenn die letzteren conjugirt imaginär werden, eine Systemcurve.*

18. *Ein Kegelschnitt, welcher bestimmt ist durch drei Tangenten, die Systemgeraden, und zwei andere, welche Ordnungsstrahlen eines involutorischen Systemstrahlenbüschels sind, ist eine Systemcurve.*

Wir haben die Systemcurven II. Ordnung definirt als solche, auf denen unendlich viele Systempunkte liegen, und sahen, dass die Strahlenbüschel, welche sie umhüllen, unend-

1) **Wiener**, Lehrbuch der darstellenden Geometrie Aufg. 351. p. 279.

lich viele Systemgeraden enthalten. Ferner wurde bewiesen, dass eine durch fünf Systempunkte bestimmte Curve II. Ordnung eine Systemcurve ist. Man könnte geneigt sein zu vermuthen, dass alle Curven II. Ordnung, welche durch fünf Stücke des Systems bestimmt werden, Systemcurven sind. Der Beweis dieses Satzes lässt sich aber auf Grund des Vorstehenden nicht allgemein führen, und es bleibt uns nichts anderes übrig, als die einzelnen Fälle besonders zu untersuchen.

Es sei ein Kegelschnitt durch fünf Tangenten bestimmt, die zum System gehören. Ist derselbe ein Systemkegelschnitt? Der Fall ist besonders einfach, weil er dem ersten direct reciprok ist. Der Weg des Beweises ist daher gegeben. Drei der gegebenen Geraden bestimmen auf den beiden übrigen projectivische Systempunktreihen. Die Verbindungsgeraden entsprechender Systempunkte derselben sind Systemgeraden und zugleich Tangenten der gesuchten Curve. Der Kegelschnitt wird also von unendlich vielen Systemgeraden berührt. Der Beweis, dass auch hier die Berührungspunkte der Systemgeraden Systempunkte sind, ist genau reciprok zu führen, wie oben der Beweis, dass die Tangenten in Systempunkten Systemgeraden sind.

19. *Wird eine Curve II. Ordnung durch fünf Tangenten bestimmt, welche Systemgeraden sind, so ist die Curve eine Systemcurve; auf ihr liegen unendlich viele Systempunkte und der sie umhüllende Strahlenbüschel enthält unendlich viele Systemgeraden.*

Man sieht, dass zwischen der Art der Curven II. Ordnung, welche durch fünf Tangenten, und denjenigen, welche durch Punkte des Systems gegeben werden, gar kein Unterschied besteht. Wir wenden uns zu den übrigen Arten einen Kegelschnitt durch fünf Stücke zu bestimmen. Es werden zunächst gegeben vier Systempunkte und eine Systemgerade als Tangente. Auf der letzteren wird durch die Schnittpunkte zweier Paare von Gegenseiten, des durch die ersteren bestimmten vollständigen Vierecks eine involutorische Punktreihe bestimmt. Die Ordnungspunkte derselben sind die Berührungspunkte der beiden Curven, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen. Die Ordnungspunkte sind entweder beide Systempunkte, dann gehen die Curven II. Ordnung durch fünf

Systempunkte und sind Systemcurven, oder keiner von beiden Ordnungspunkten ist ein Systempunkt.

Die Curven berühren dann eine Systemgerade in einem nicht zum System gehörigen Punkt, können daher keine Systemcurven sein.

20. *Es gibt im Allgemeinen zwei Curven II. Ordnung, welche durch vier gegebene Systempunkte gehen und eine gegebene Systemgerade berühren. Entweder beide sind Systemcurven oder keine von beiden ist es.*

Ebenso gilt der reciproke Satz:

21. *Es gibt im Allgemeinen zwei Curven II. Ordnung, welche vier gegebene Systemgeraden berühren und durch einen gegebenen Systempunkt gehen. Entweder beide sind Systemcurven oder keine von beiden ist es.*

Wenn die Curve II. Ordnung durch drei Punkte und zwei Tangenten oder durch zwei Punkte und drei Tangenten gegeben ist, so spielen mehrere Paare von Ordnungspunkten involutorischer Systempunktreihen bei der Construction eine Rolle. Es lässt sich also darüber, ob die Curve eine Systemcurve ist, oder nicht, im Allgemeinen noch weniger sagen, wie in den beiden vorhergehenden Fällen.

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Untersuchung, wenn die fünf Bestimmungsstücke der Curve II. Ordnung nicht vollkommen willkürlich gewählt werden.

Es seien gegeben vier Systempunkte $ABCD$ und eine Systemgerade a, welche die Curve in einem derselben, A berühren soll. Dann ist die projectivische Beziehung der Strahlenbüschel A und D gegeben, indem die Strahlen $\overline{DA}$ $\overline{DB}$ $\overline{DC}$ von D den Strahlen a $\overline{AB}$ $\overline{AC}$ von A entsprechen. Auch alle anderen Systemstrahlen des einen Büschels entsprechen solchen des anderen, und die Curve ist eine Systemcurve. Ganz analog ist auch der Beweis zu führen, dass eine Curve II. Ordnung, die durch vier Tangenten und den Berührungspunkt in einer derselben bestimmt ist, eine Systemcurve ist, wenn die Stücke zum System gehören.

22. *Wird eine Curve II. Ordnung bestimmt durch vier Punkte und die Tangente in einem derselben, und gehören diese Stücke zum System, so ist die Curve eine Systemcurve.*

23. *Wird eine Curve II. Ordnung bestimmt durch vier zum System gehörige Tangenten und einen Systempunkt auf einer derselben als Berührungspunkt, so ist die Curve eine Systemcurve.*

Soll eine Curve II. Ordnung durch drei Systempunkte ABC gelegt werden und in den beiden ersten die Systemgeraden a und b berühren, so ist die projectivische Beziehung zwischen den Strahlenbüscheln A und B dadurch vollständig bestimmt, dass den Strahlen a $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ von A bezw. die Strahlen $\overline{BA}$ b und $\overline{BC}$ von B entsprechen. Im übrigen entsprechen danach den Systemgeraden des einen Büschels solche des anderen und die Curve ist eine Systemcurve. Ein analoger Beweis gilt für den reciproken Satz.

24. *Eine Curve II. Ordnung, welche durch drei Systempunkte gelegt wird und in zweien derselben Systemgeraden berührt, ist eine Systemcurve.*

25. *Eine Curve II. Ordnung, welche drei Systemgeraden und zwei davon in Systempunkten berührt, ist eine Systemcurve.*

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich allgemein, dass die Curven II. Ordnung dann mit Sicherheit Systemcurven sind, wenn man zu ihrer Construction aus den gegebenen Systemstücken Aufgaben ersten Grades zu lösen hat, dass sie aber auch, wenn Aufgaben zweiten Grades herangezogen werden müssen, Systemcurven sein *können.*

Der Schnitt zweier Systemgeraden ist ein Systempunkt. Die Schnittpunkte einer Systemgeraden mit einer Systemcurve II. Ordnung können auch solche sein und spielen auf jeden Fall in dem System eine besondere Rolle. Unsere nächste Aufgabe ist es, die Schnittpunkte zweier Curven II. Ordnung zu untersuchen.

Wir wollen zuerst annehmen, drei der Schnittpunkte ABC seien Systempunkte. Der eine Kegelschnitt k gehe noch durch die Systempunkte DE, der andere k_1 durch die Systempunkte $D_1 E_1$. Zur Construction des vierten Schnittpunktes hat man folgendermaassen [1]) zu verfahren. Man verbindet D mit D_1 und sucht auf der Verbindungslinie die beiden übrigen Schnittpunkte Δ und Δ_1 der Kegelschnitte k und k_1. Die Punkte Δ

1) Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie bearbeitet von Schröter, I. Aufl. p. 240. 1867.

ıd Δ_1 sind (nach Satz 6) Systempunkte. Die Punkte $D\,\Delta$ $_1\,\Delta_1$ bestimmen eine involutorische Systempunktreihe. Trifft C diese Systempunktreihe in Ξ so ist der conjugirte Punkt esselben X ein Systempunkt, $A\,X$ eine gemeinschaftliche ecante der Kegelschnitte. Trifft $C\,A$ die Punktreihe in H, ı ist der diesem Punkt conjugirte Y ebenfalls ein Systemunkt, $B\,Y$ eine gemeinschaftliche Secante. Der Schnittpunkt on $A\,X$ und $B\,Y$, also ein Systempunkt, ist der gesuchte ierte Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte. In ähnlicher Veise lässt sich auch der reciproke Satz beweisen.

26. *Schneiden sich zwei Systemcurven II. Ordnung in drei ystempunkten, so ist auch ihr vierter Schnittpunkt ein Systemunkt.*

27. *Sind drei von den gemeinschaftlichen Tangenten zweier ystemcurven II. Ordnung Systemgeraden, so ist auch die vierte ine solche.*

Wir wollen nun annehmen, dass nur zwei von den Schnittunkten $A\,B$ zweier Systemcurven II. Ordnung k und k_1 ystempunkte sind. Die eine Curve k gehe noch durch die ystempunkte $C\,D\,E$, die andere k_1 durch die Systempunkte $_1\,D_1\,E_1$. Man verbindet [1]) C mit C_1 und bestimmt auf der Verbindungsgeraden die weiteren Schnittpunkte $\Gamma\,\Gamma_1$ derselben nit k und k_1. Die Punkte $C\,\Gamma$ $C_1\,\Gamma_1$ bestimmen eine involuorische Systempunktreihe. Ebenso sucht man die Schnittunkte $\Delta\,\Delta_1$ der Kegelschnitte mit $\overline{D\,D_1}$: auch $D\,\Delta$ $D_1\,\Delta_1$ betimmen eine involutorische Systempunktreihe. Schneidet die Gerade $A\,B$ die beiden Punktreihen in den Punkten Ξ bezw. H, nd sind die dazu conjugirten Punkte X und Y, so ist $\overline{X\,Y}$ ine gemeinschaftliche Secante und zugleich eine Systemgerade. hre Schnittpunkte, mit k und k_1 sind (nach Satz 6) entweder eide Systempunkte, oder keiner von beiden ist es: jedenfalls nd sie, ob sie reell oder imaginär sind, von der Art, dass der durch sie und drei andere Systempunkte gelegte Kegelchnitt ein Systemkegelschnitt ist.

28. *Sind zwei von den Schnittpunkten zweier Systemkegelchnitte Systempunkte, so liegen die anderen jedenfalls auf einer*

1) Steiner-Schröter, Vorlesungen über synthetische Geometrie. Aufl. p. 241. 1867.

Systemgeraden und sind als Ordnungspunkte einer involutorischen Systempunktreihe entweder beide Systempunkte, oder keiner von beiden ist es. Auch in letzterem Falle, und selbst wenn sie conjugirt imaginär werden, sind sie von der Art, dass jeder durch sie und drei andere Systempunkte gelegte Kegelschnitt ein Systemkegelschnitt ist.

In ähnlicher Weise lässt sich auch der reciproke Satz beweisen.

29. *Sind zwei von den gemeinschaftlichen Tangenten zweier Systemkegelschnitte Systemgeraden, so schneiden sich die beiden übrigen in einem Systempunkt. Sie sind die Ordnungselemente eines involutorischen Systemstrahlenbüschels, also entweder beide sind Systemstrahlen, oder keiner von beiden ist es. In letzterem Falle sind sie, auch wenn sie conjugirt imaginär werden, von der Art, dass jeder von ihnen und drei Systemgeraden berührte Kegelschnitt ein Systemkegelschnitt ist.*

Wir gehen nun zu der Theorie der Curven III. Ordnung über, und wollen annehmen, dass neun Systempunkte $OPQRABCDE$ zur Bestimmung einer solchen gegeben sind. Man verfährt zur Construction der Curve folgendermaassen.[1] Durch vier der gegebenen Punkte $OPQR$ legt man einen Kegelschnittbüschel und bezeichnet mit $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ die Kegelschnitte dieses Büschels, welche bezw. durch $ABCDE$ gehen. Man bezieht den Kegelschnittbüschel projectivisch auf den Strahlenbüschel, dessen Centrum D ist, so dass die Strahlen $\overline{DA}$ $\overline{DB}$ $\overline{DC}$ den Kegelschnitten $\alpha\beta\gamma$ entsprechen. Nun sucht man die Strahlen von D auf, welche den Kegelschnitten δ und ε entsprechen, es seien dies $\overline{DD_1}$ $\overline{DE_1}$, und legt durch die Punkte $ABCD$ einen Kegelschnitt $\varkappa$, der in D den Strahl $\overline{DD_1}$ berührt. Dieser Kegelschnitt $\varkappa$ werde von $\overline{DE_1}$ im Punkte E_1 geschnitten. Er ($\varkappa$) ist derart projectivisch auf den Kegelschnittbüschel bezogen, dass die Punkte $ABCDE_1$ von $\varkappa$ den Kegelschnitten $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ entsprechen. Jeder Strahlenbüschel S, der zum Kegelschnitt $\varkappa$ perspectivisch ist, erzeugt mit dem Kegelschnittbüschel eine Curve III. Ordnung, welche durch die acht Punkte $OPQRABCD$ geht. Soll die Curve

1) Reye, Geometrie der Lage. II. Aufl. II. p. 210. 1882.

ch noch den Punkt E enthalten, so muss der Strahl $\overline{SE_1}$ rch E gehen. Da E und E_1 gegeben sind, erhält man mnach S als Schnittpunkt der Geraden $\overline{EE_1}$ mit dem Kegel-hnitt $\varkappa$. Die sämmtlichen Curven III. Ordnung, welche rch die acht Punkte $OPQRABCD$ gehen, haben einen ınkt gemein, nämlich den sechsten Schnittpunkt T der ırve $\varkappa$ mit einer derselben, denn der Punkt T liegt ebenso e die Punkte $ABCD$ auf dem ihm entsprechenden Kegel-hnitt des Büschels $OPQR$.

Wir untersuchen nun, welcher Art die verschiedenen, bei r Construction benutzten Stücke sind, wenn man von neun stempunkten $OPQRABCDE$ ausgeht. Die Kegelschnitte $\beta\gamma\delta\varepsilon$ sind (nach Satz 5) Systemcurven und $\alpha\beta\gamma$ entsprechen ei Systemstrahlen von D. Bei der projectivischen Beziehung ıes Kegelschnittbüschels auf einen Strahlenbüschel ist auch r Strahlenbüschel, der von den Tangenten der Kegelschnitte einem Mittelpunkt des Büschels gebildet wird, zum Strahlen-ıschel projectivisch. Die Tangenten der Kegelschnitte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ einem der Mittelpunkte des Kegelschnittbüschels, etwa O, ıd (nach Satz 7) Systemstrahlen. Die Tangenten an $\alpha\beta\gamma$ tsprechen den Systemstrahlen $\overline{DA}$ $\overline{DB}$ $\overline{DC}$ des Strahlen-ıschels D, folglich entsprechen auch die Tangenten an die Kegel-hnitte δ und ε Systemstrahlen von D, d. h. DE_1 und DD_1 ıd Systemstrahlen, und jedem Systemstrahl des Büschels D ein Systemkegelschnitt des Kegelschnittbüschels $(OPQR)$ geordnet. Der Kegelschnitt $\varkappa$ ist durch vier Systempunkte ıd eine Systemgerade, die denselben in einem der vier Punkte rührt, bestimmt also (nach Satz 22) eine Systemcurve. Der ınkt E_1 ist als zweiter Schnittpunkt einer Systemgeraden, elche die Curve in einem Systempunkt schneidet, ein System-ınkt. Aus demselben Grunde ist es auch der Punkt S. ie Punkte der Curve III. Ordnung, welche auf den System-rahlen des Büschels S liegen, sind die Schnittpunkte dieser stemstrahlen mit den entsprechenden Systemcurven des egelschnittbüschels. Je zwei solcher Punkte sind aber ent-eder beide Systempunkte, oder doch von der Art, dass jeder ırch sie und drei Systempunkte gelegte Kegelschnitt eine stemcurve ist.

Geht ein Systemstrahl von S durch einen zweiten Systempunkt der Curve III. Ordnung, etwa A, so ist auch der zweite Punkt A_1, den dieser Strahl mit dem Kegelschnitt α gemein hat, also der dritte Schnittpunkt mit der Curve III. Ordnung, und der sechste des Kegelschnitts α mit derselben ein Systempunkt. Es ist also allgemein, wenn eine Curve III. Ordnung durch neun Systempunkte geht und ein Kegelschnitt durch fünf derselben gelegt wird, auch der sechste Schnittpunkt der Curven ein Systempunkt.

„Der Kegelschnittbüschel $(OPQR)$ enthält auch die drei Paare Gegenseiten des Vierecks $OPQR$. Suchen wir zu einem derselben, etwa zu $\overline{OP}$, $\overline{QR}$ den entsprechenden Strahl des Büschels S, so lösen wir die Aufgabe:

Auf einer Geraden $\overline{OP}$, welche zwei von den gegebenen neun Punkten verbindet, den dritten Schnittpunkt mit der Curve C_3 dritter Ordnung zu construiren.“ [1])

Das Paar Gegenseiten $\overline{OP}$, $\overline{QR}$ ist als Systemkegelschnitt aufzufassen, der entsprechende Strahl von S ist ein Systemstrahl und der Schnittpunkt des letzteren mit $\overline{OP}$ ein Systempunkt. Geht also eine Curve III. Ordnung durch neun Systempunkte, so ist der dritte Punkt der Curve auf der Verbindungslinie je zweier von den neun Punkten ein Systempunkt. Aus diesem Satz ergiebt sich die Thatsache, dass eine Curve III. Ordnung, welche durch neun Punkte bestimmt ist, unendlich viele Systempunkte enthält und deshalb als Systemcurve aufzufassen ist. Sind nämlich A, B und O drei der gegebenen Systempunkte, so verbindet man O mit A und sucht auf der Verbindungslinie den dritten Punkt O_1 der Curve, verbindet O_1 mit B und construirt auf $\overline{O_1 B}$ den dritten Punkt O_2, sucht dann den dritten Punkt O_3 auf $\overline{O_2 A}$, den dritten Punkt auf $O_3 B$ u. s. w.

Wir können unsere Resultate bezüglich der Curven III. Ordnung folgendermaassen zusammenfassen.

30. *Wird eine Curve III. Ordnung durch neun Systempunkte bestimmt, so enthält dieselbe unendlich viele weitere Punkte, und soll daher als Systemcurve bezeichnet werden.*

1) Reye. Geometrie der Lage II. p. 211. 1882.

31. *Schneidet eine Systemgerade eine Systemcurve III. Ord- ng in einem Systempunkt, so sind die beiden übrigen Schnitt- nkte entweder gleichfalls beide Systempunkte, oder, und das lbst für den Fall, dass sie conjugirt imaginär sind, von der rt, dass jeder durch sie und drei Systempunkte gelegte Kegel- hnitt eine Systemcurve ist.*

32. *Wenn eine Systemgerade eine Systemcurve III. Ord- ung in zwei Systempunkten schneidet, so ist auch der dritte chnittpunkt ein Systempunkt.*

33. *Wenn eine Systemcurve II. Ordnung eine Systemcurve II. Ordnung in fünf Systempunkten schneidet, so ist auch der echste Schnittpunkt ein Systempunkt.*

34. *Alle Systemcurven III. Ordnung, welche durch dieselben cht Systempunkte gehen, schneiden sich in einem und demselben eunten Systempunkt.*

Um die Tangenten der Curve III. Ordnung in dem unkt O zu bestimmen, braucht man nur denjenigen Kegelschnitt es Büschels $(OPQR)$ zu construiren, welcher dem Strahl $S'O$ ntspricht. Die Tangente des Kegelschnittes in O ist die ge- chte. Wie wir oben gesehen haben, ist, wenn die Punkte $PQRABCDE$ Systempunkte sind, auch S' ein solcher. er dem Strahl $S'O$ entsprechende Kegelschnitt des Büschels t ein Systemkegelschnitt, die Tangente in O also (nach Satz 7) ne Systemgerade.

35. *Die Systemcurve III. Ordnung besitzt unendlich viele ngenten, welche Systemgeraden sind. Die Tangente in jedem ystempunkte der Curve ist eine solche.*

Man erkennt in den angegebenen Sätzen über die System- rven III .Ordnung Analogien mit denjenigen über die System- rven II. Ordnung, und sie würden sich, indem man den ngeschlagenen Weg verfolgt, um zahlreiche andere vermehren ssen. Wir wollen jedoch die Untersuchung der Curven hier bbrechen und zur Theorie einiger besonders interessanter etze übergehen.

Das ebene Möbius'sche Netz, dessen unendlich ferne erade Netz- oder Systemgerade ist, wurde als krystallo- raphisches Netz bezeichnet. Sind in einem Möbius'schen etz vier Netzpunkte in den Ecken eines Parallelogrammes elegen, so sind die beiden unendlich fernen Gegenseiten des

Parallelogrammes Netzpunkte, die unendlich ferne Gerade eine Netzgerade, das Netz ein krystallographisches.

36. *Liegen in einem Möbius'schen Netz vier Netzpunkte in den Ecken eines Parallelogrammes, so ist das Netz ein krystallographisches.*

Der Mittelpunkt einer Curve II. Ordnung ist der Pol der unendlich fernen Geraden. Im krystallographischen Netz sind daher die Mittelpunkte von Systemcurven (nach Satz 11) Netzpunkte.

37. *Der Mittelpunkt jeder Systemcurve II. Ordnung im krystallographischen Netz ist ein Systempunkt.*

Ist umgekehrt in einem Möbius'schen Netz der Mittelpunkt M einer einzigen Systemcurve ein Systempunkt, so ist die unendlich ferne Gerade als dessen Polare (nach Satz 11) eine Systemgerade, das Netz ein krystallographisches.

38. *Ist der Mittelpunkt einer Systemcurve ein Systempunkt, so ist das Netz ein krystallographisches.*

Auf der unendlich fernen Geraden eines krystallographischen Netzes, bilden, wie auf jeder anderen Systemgeraden, die bezüglich einer Systemcurve II. Ordnung conjugirten Punkte eine involutorische Systempunktreihe. Daraus und weil der Mittelpunkt ein Systempunkt ist, folgt der Satz:

39. *Ist einer von zwei conjugirten Durchmessern einer Systemcurve II. Ordnung im krystallographischen Netz eine Systemgerade, so ist es auch der andere.*

Soll in einem Möbius'schen Netz ein Systemkreis vorkommen, und sind P_1 P_2 zwei beliebige Systempunkte desselben, so sind die von P_1 nach den Systempunkten $A\,B\,C\,D\ldots$ auf dem Kreis gerichteten Strahlen ebenso gegeneinander gelegen, wie die von P_2 nach diesen Punkten gezogenen Strahlen.

40. *Kommt in einem Möbius'schen Netz ein Systemkreis vor, so sind die sämmtlichen Systemstrahlenbüschel, deren Centra Systempunkte des Kreises sind, untereinander gleich.*

Soll speciell in einem krystallographischen Netz ein Systemkreis möglich sein, so liegt jeder Systempunkt A einem anderen A_1 diametral gegenüber, denn der Mittelpunkt ist ein Systempunkt, und der durch A gehende Durchmesser muss als Systemstrahl (nach Satz 7) den Kreis noch in einem zweiten Systempunkt schneiden. Die von einem beliebigen System-

punkt P des Kreises nach Punktenpaaren $A A_1$, $B B_1$ u. s. w. gelegten Strahlen sind Strahlen, die paarweise aufeinander senkrecht stehen, und da im Büschel P mehr als ein solches Paar vorkommt, so ist der Büschel ein orthogonaler.

41. *Ist in einem krystallographischen Netz ein Systemkreis vorhanden, so muss der Systemstrahlenbüschel, welcher das Netz charakterisirt, ein orthogonaler sein.*

Ein Systemkreis des krystallographischen Netzes schneidet die unendlich ferne Gerade in den beiden imaginären Kreispunkten, durch welche alle Kreise der Ebene gehen. In unserem Falle müssen die Punkte als Schnitte einer Systemcurve II. Ordnung mit einer Systemgeraden die Eigenschaft besitzen, dass jeder durch sie und drei Systempunkte gelegte Kegelschnitt eine Systemcurve ist, d. h. also jeder durch drei Systempunkte des Netzes gelegte Kreis ist ein Systemkreis.

42. *Ist in euem krystallographischen ebenen Netz ein Systemkreis möglich, so sind alle Kreise, welche durch drei Systempunkte gelegt werden, Systemkreise.*

Wenn ein krystallographisches Netz enen Systemkreis besitzt, so ist der Systemstrahlenbüschel, welcher für das Netz charakteristisch ist, ein orthogonaler. Enthält umgekehrt ein krystallographisches Netz einen orthogonalen Büschel, und ordnet man jedem Systemstrahl des letzteren den dazu senkrechten zu, so erhalten wir einen involutorischen Systemstrahlenbüschel. Dieser schneidet die unendlich ferne Gerade in derjenigen involutorischen Systempunktreihe, deren Ordnungspunkte die imaginären Kreispunkte sind. Legt man durch drei Systempunkte und diese beiden Punkte eine Curve II. Ordnung, d. h. legt man durch drei Systempunkte einen Kreis, so ist derselbe ein Systemkreis.

43. *Ist der Strahlenbüschel, welcher einem krystallographischen Netz zu Grunde liegt, ein orthogonaler, so ist jeder durch drei Punkte des Netzes gelegte Kreis ein Systemkreis.*

Gehen zwei Systemkreise eines Möbius'schen Netzes durch dieselben zwei Systempunkte, so liegen (nach Satz 28) ihre beiden übrigen Schnittpunkte, die beiden imaginären Kreispunkte, auf einer Systemgeraden. Die unendlich ferne Gerade ist also eine Systemgerade, das Netz ein krystallo-

graphisches, und (nach Satz 42) ein solches, dem ein orth gonaler Büschel zu Grunde liegt.

44. *Gehen durch zwei Systempunkte eines Möbius'sch Netzes zwei Systemkreise, so ist das Netz ein krystallographisch der ihm zu Grunde liegende Büschel ein orthogonaler.*

Ist ein Möbius'sches Netz in Bezug auf eine Gerade symmetrisch, so schneiden sich die zu g symmetrisch liegend Systemgeraden auf g, und g ist daher eine Systemgera Zwei Systemgeraden a und b und die zu ihnen symmetrisch a_1 und b_1 bilden ein Vierseit, von dem g eine Diagonale i während die beiden anderen auf g senkrecht stehen. Letzt sind ebenfalls Systemgeraden, ihr unendlich ferner Punkt e Systempunkt. Es folgt daher:

45. *Ist ein ebenes Möbius'sches Netz symmetrisch in Bez auf eine Gerade g, so ist dieselbe eine Systemgerade, und auf d zu ihr senkrechten Richtung liegt ein Systempunkt im Unendlich*

Die sämmtlichen Systemstrahlenbüschel, deren Centra au liegen, besitzen zwei aufeinander senkrechte Systemstrahle sind also rhombische Büschel.

Soll ein ebenes Möbius'sches Netz in Bezug auf zw Geraden g_1 und g_2 symmetrisch sein, so sind diese entwed parallel, und dann ist ihr Schnittpunkt im Unendlichen eben wie der unendlich ferne Punkt auf der zu ihnen senkrecht Richtung ein Systempunkt — oder die beiden Geraden und g_2 sind gegeneinander geneigt, dann liegen auf den beid zu ihnen senkrechten Richtungen Systempunkte im Unen lichen. In beiden Fällen ist das Netz ein krystallographische

46. *Ist ein Möbius'sches Netz symmetrisch zu zwei ve schiedenen Geraden, so ist dasselbe ein krystallographisches.*

Ist ein krystallographisches Netz symmetrisch in Bez auf eine Gerade g, so ist es auch symmetrisch in Bezug a jede zu g parallele Systemgerade g_1. Denn verbindet man eine beliebigen Systempunkt P mit dem unendlich fernen Punkt a der zu g und g_1 senkrechten Richtung, und schneidet die Ve bindungsgerade die Gerade g_1 im Punkte Q, so ist der Punkt welcher von P durch Q und den unendlich fernen Punkt ha monisch getrennt wird, ein Systempunkt, und die Punkte und P_1 liegen symmetrisch zu g_1. Das Netz ist auch sy metrisch in Bezug auf die Systemstrahlen, welche auf g sen

recht sind, denn auf der zu ihnen senkrechten Richtung, nämlich g, liegt ein unendlich ferner Systempunkt.

47. *Ist ein krystallographisches Netz symmetrisch in Bezug auf eine Gerade g, so ist der Systemstrahlenbüschel des Netzes ein rhombischer und das Netz symmetrisch, sowohl in Bezug auf alle Systemstrahlen, welche g parallel laufen, wie auch auf diejenigen, welche dazu senkrecht stehen.*

Neben den Symmetrieeigenschaften der ebenen Systeme sind besonders bemerkenswerth die aufeinander senkrechten Systemstrahlen und die dadurch bestimmten rhombischen Systemstrahlenbüschel. Sind in einem Möbius'schen Netz zwei rhombische Systemstrahlenbüschel in allgemeinster Lage vorhanden, d. h. so, dass keiner von den ausgezeichneten Strahlen der Büschel in die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte fällt, so muss noch ein dritter rhombischer Büschel im Netz vorkommen. Man kann nämlich die ausgezeichneten Strahlen der gegebenen Büschel als Gegenseiten eines vollständigen Vierecks auffassen, und es gilt der Satz[1]): „Wenn zwei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks sich rechtwinklich schneiden, so sind auch die letzten beiden Gegenseiten aufeinander normal.“ Durch diesen Satz ist zugleich die Construction des dritten rhombischen Büschels gegeben.

48. *Kommen in einem Möbius'schen Netz zwei rhombische Systemstrahlenbüschel in allgemeinster Lage vor, so besitzt dasselbe auch noch einen dritten solchen Büschel. Die drei Paare von ausgezeichneten Strahlen bilden die Gegenseiten eines vollständigen Vierecks.*

Es können im Möbius'schen Netz auch zwei orthogonale Systemstrahlenbüschel vorkommen. Derartige Netze lassen sich ja direct bestimmen, indem man zwei orthogonale Büschel wählt und so legt, dass die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte in beiden Büscheln Systemstrahl ist. Da die beiden Büschel zu der Verbindungslinie ihrer Centra symmetrisch sind, so ist auch das ganze Netz zu dieser Geraden symmetrisch, und auf der zu ihr senkrechten Richtung liegt ein Systempunkt im Unendlichen.

49. *Enthält ein Netz zwei orthogonale Strahlenbüschel, so*

1) Reye, p. 182.

ist dasselbe zur Verbindungslinie von deren Mittelpunkten symmetrisch.

Sind die beiden orthogonalen Büschel gleich, und besitzt das eine einen Systemstrahl s_1, so muss in dem anderen ein Systemstrahl s_2 vorhanden sein, der unter demselben Winkel gegen die Verbindungslinie der Mittelpunkte geneigt ist, wie s_1, und zu s_1 parallel ist (nach Satz 2a). Der Strahl s_1 und demnach jeder andere Systemstrahl des ersten Büschels enthält also einen unendlich fernen Systempunkt. Das Netz ist ein krystallographisches.

50. *Enthält ein Netz zwei gleiche orthogonale Systemstrahlenbüschel, so ist es ein krystallographisches Netz.*

Wir wollen nun näher auf den Fall eingehen, dass ein Netz zwei ungleiche orthogonale Systemstrahlenbüschel S_1 und S_2 enthält und zunächst untersuchen, ob in demselben ausserhalb der Verbindungslinie $\overline{S_1 S_2}$ noch der Mittelpunkt eines weiteren orthogonalen Büschels vorhanden sein kann. Sei P der Mittelpunkt eines orthogonalen Büschels, dann geht durch P ein Systemstrahl p, welcher zu $\overline{S_1 S_2}$ senkrecht steht. Dies folgt aus den Sätzen 49 und 45. Senkrecht zu p, also parallel $\overline{S_1 S_2}$ muss ein Systemstrahl von P liegen, weil P Centrum eines orthogonalen Büschel ist. Es liegt also auf $\overline{S_1 S_2}$ ein unendlich ferner Systempunkt, und da, wie wir wissen, in der zu $\overline{S_1 S_2}$ senkrechten Richtung ein zweiter liegt, so müsste das System ein krystallographisches sein und die Büschel S_1 und S_2 wären gleich, was der Voraussetzung widerspricht. Es kann also ausserhalb der Verbindungslinie $\overline{S_1 S_2}$ kein Centrum eines orthogonalen Büschels im allgemeinen **Möbius**'schen Netz vorhanden sein.

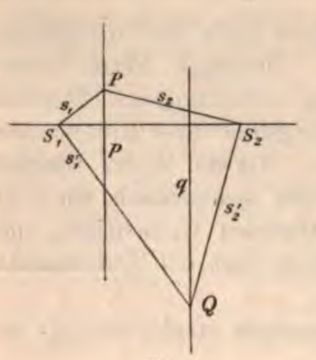


Fig. 4.

Ist P (Fig. 4) ein Systempunkt des besonderen **Möbius**'schen Netzes, so kann man durch denselben, wie wir gesehen haben, einen Systemstrahl p legen, welcher auf $\overline{S_1 S_2}$ senkrecht steht.

Durch P möge der Strahl s_1 des Büschels S_1 und der Strahl s_2 des Büschels S_2 gehen. Der zu s_1 senkrechte Strahl des Büschels S_1 heisse s'_1, der zu s_2 senkrechte Strahl von S_2 heisse s'_2, und s'_1 schneide s'_2 in dem Punkt Q. Lässt man nun P die Punktreihe p durchlaufen, so beschreiben die beiden Strahlen s_1 und s_2 zwei perspectivische Strahlenbüschel. Da die hierbei von s'_1 und s'_2 beschriebenen Strahlenbüschel bezw. den von s_1 und s_2 durchlaufenen gleich sind, so sind auch die ersteren projectivisch. Rückt der Punkt P auf p ins Unendliche, so sind die Strahlen s_1 und s_2 parallel, während die einander entsprechenden Strahlen s'_1 und s'_2 in die Verbindungslinie $\overline{S_1 S_2}$ fallen. Die von den Strahlen s'_1 und s'_2 beschriebenen Strahlenbüschel sind daher perspectivisch und erzeugen als Schnitt entsprechender Strahlen eine gerade Punktreihe q. Fällt P in die Verbindungsgerade $\overline{S_1 S_2}$, d. h. in deren Schnittpunkt mit p, so stehen die Strahlen s'_1 und s'_2 auf $\overline{S_1 S_2}$ senkrecht, und da q durch diesen Schnittpunkt geht, so ist auch q zu $\overline{S_1 S_2}$ normal. Dies hätten wir auch aus Gründen der Symmetrie schliessen können. Die Winkel $P S_1 Q$ und $P S_2 Q$ sind Rechte, daher liegen die vier Systempunkte $P Q S_1 S_2$ auf einem Kreis k, dessen Durchmesser $\overline{PQ}$ ist. Fällt man von dem Mittelpunkt M des Kreises (Fig. 5) ein Loth $\overline{M M_1}$ auf $\overline{S S_1}$, so halbirt dessen Fusspunkt M_1 einerseits die Strecke $S_1 S_2$, andererseits die orthogonale Projection der Strecke $\overline{P Q_1}$ oder den Abstand von p und q. Es folgt, dass der Abstand des Punktes S_1 von der Geraden p oder ihrem Schnitt P_1 mit $\overline{S_1 S_2}$ gleich dem Abstand des Punktes S_2 von q oder Q, deren Schnitt mit $\overline{S_1 S_2}$, ist.

51. *Wenn sich in dem Möbius'schen Netz mit zwei orthogonalen Strahlenbüscheln S_1 und S_2 ein Punkt P auf einer zu $\overline{S_1 S_2}$ normalen Geraden p befindet, und man verbindet ihn durch Strahlen s_1 und s_2 mit den Punkten S_1 und S_2, so liegt Q, der Schnittpunkt der Strahlen s'_1 und s'_2, welche bez. in den Büscheln S_1 und S_2 auf den Strahlen s_1 und s_2 senkrecht stehen, auf einer zu $\overline{S_1 S_2}$ senkrechten Geraden q, die von S_2 denselben Abstand hat, wie p von S_1.*

Jeder Systempunkt P liegt seinem zugeordneten Q diametral

gegenüber auf einem Kreis (Fig. 5), der noch durch S_1 und S_2 geht. Abgesehen von dem Fall, dass der Kreis in die Gerade $\overline{S_1 S_2}$ übergeht, kann kein Kreis, der durch $S_1 S_2$ und einem Systempunkt P gelegt wird, weitere Systempunkte enthalten, denn sonst müssten die Systemstrahlenbüschel S_1 und S_2 gleich sein, was unserer Voraussetzung widerspricht.

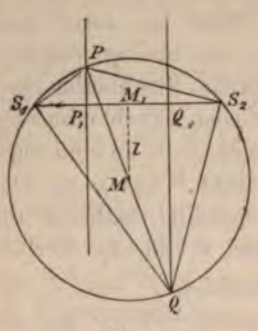


Fig. 5.

Jeder Systempunkt der Geraden $\overline{S_1 S_2}$ kann als Schnittpunkt von $\overline{S_1 S_2}$ mit einer zu ihr senkrechten Systemgeraden aufgefasst werden. Es ist also zu jedem Systempunkt P_1 der Geraden $\overline{S_1 S_2}$ ein anderer Q_1 vorhanden, welcher den gleichen Abstand von M_1 dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{S_1 S_2}$ besitzt. Die Systempunktreihe $\overline{S_1 S_2}$ ist folglich symmetrisch zum Punkt M_1. Dies ist besonders deshalb bemerkenswerth, weil M_1 nicht Systempunkt sein kann, sonst müsste nämlich wegen des gleichen Abstandes von Systempunkten beiderseits von M_1 auch der unendlich ferne Punkt von $\overline{S_1 S_2}$ ein Systempunkt und das Netz ein krystallographisches sein. Wir lernen also in der Systempunktreihe $\overline{S_1 S_2}$ eine solche kennen, die in Bezug auf einen nicht zum System gehörigen Punkt symmetrisch ist. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf alle Strahlenbüschel, die man durch Projection einer solchen Punktreihe aus beliebigen Punkten des in dem Mittelpunkte M_1 errichteten Lothes l erhält. Derartige Strahlenbüschel besitzen eine Art von rhombischer Symmetrie, da dieselben nicht nur in Bezug auf den Strahl l, sondern auch den dazu senkrechten Strahl symmetrisch sind. Der letztere kann gleichfalls nicht ein Systemstrahl sein. Es herrscht also keine vollkommene Analogie zwischen der Symmetrie in der Systempunktreihe, dem Systemstrahlen- und dem Systemebenenbüschel einerseits und dem ebenen Netze und dem Systemstrahlenbündel andererseits. In den letzteren sind Symmetriegeraden bez. Symmetrieebenen immer Systemgeraden und Ebenen.

52. *Systempunktreihen können einen nicht zum System gehörigen Mittelpunkt, oder Symmetriemittelpunkt besitzen, Systemstrahlen- und Ebenenbüschel in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Strahlen, bez. Ebenen symmetrisch sein, welche nicht zum System gehören.*

53. *In dem ebenen Netz mit zwei orthogonalen Büscheln S_1 und S_2 ist die Verbindungslinie der Punkte S_1 und S_2 eine symmetrische Systempunktreihe, deren Mittelpunkt in dem nicht zum System gehörigen Mittelpunkt der Strecke $S_1 S_2$ liegt.*

Wenn auf der Geraden $\overline{S_1 S_2}$ noch ein weiteres Centrum C_3 eines orthogonalen Systembüschels liegen sollte, so müsste nach dem vorigen Satz die Punktreihe symmetrisch sein zu den drei Mittelpunkten M_{12}, M_{23}, M_{31} der Strecken $\overline{S_1 S_2}$, $\overline{S_2 S_3}$, $\overline{S_3 S_1}$. Ist also irgend ein Systempunkt P_1 (Fig. 6) in

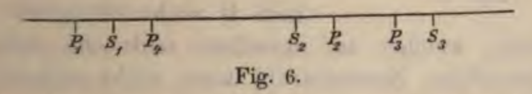


Fig. 6.

der Entfernung a von S_1 vorhanden, so ist der bezüglich M_{12} dazu symmetrische P_2, welcher in der Entfernung a von P_2 und auf der entgegengesetzten Seite, wie P_1 von S_1 liegt, auch ein Systempunkt. Der zu P_2 bezüglich M_{23} symmetrische Systempunkt P_3 liegt in der Entfernung a von S_3 und auf derselben Seite davon wie P_1 von S_1, endlich der zu P_3 bezüglich M_{31} symmetrische Punkt im Abstand a von S_3 aber auf der entgegengesetzten Seite wie P_1. Das heisst, die Systempunktreihe besitzt Systempunkte P_1 und P_4, welche gleich weit von einem Systempunkte S_1 und auf verschiedenen Seiten desselben liegen, und folglich einen Systempunkt im Unendlichen. Da in der zu $\overline{S_1 S_2}$ senkrechten Richtung auch ein Systempunkt im Unendlichen liegt, so müsste das Netz der Voraussetzung entgegen ein krystallographisches sein. Wir haben oben gesehen, dass ausserhalb der Geraden $\overline{S_1 S_2}$ gleichfalls nicht das Centrum eines orthogonalen Systemstrahlenbüschels möglich ist, wenn das Netz nicht ein krystallographisches ist, können also jetzt allgemein behaupten.

54. *Sind in einem Netz mehr als zwei orthogonale Strahlenbüschel vorhanden, so ist dasselbe ein krystallographisches.*

Wir wenden uns jetzt wieder zu den zusammengehörigen Systempunkten P und Q, und verlängern (Fig. 7) die durch sie gehenden Strahlen s_1 und s'_1 des Büschels S_1, s_2 und s'_2 des Büschels S_2 bis sich s'_1 und s_2 in M, s_1 und s'_2 in N schneiden. Das Viereck $MPNQ$ ist dann ein solches, in dem zwei Paare normaler Gegenseiten vorhanden sind, die dritten Seiten $\overline{MN}$ und $\overline{PQ}$ stehen daher auch auf einander senkrecht, und ihr Schnittpunkt R ist der Mittelpunkt eines rhombischen Systembüschels. Zu jeder Geraden, welche zwei zusammengehörige Punkte P und Q verbindet, giebt es einen Systemstrahl, welcher auf derselben senkrecht steht. Mehr als ein derartiger Normalstrahl kann nicht vorhanden sein. Denn wären zwei vorhanden, so schnitten sie sich in einem unendlich fernen Systempunkt, das Netz besitzt aber, wenn es kein krystallographisches ist, nur den unendlich fernen Systempunkt der zu $\overline{S_1 S_2}$ senkrechten Richtung. Soll also dies der Schnittpunkt der beiden zu $\overline{PQ}$ normalen sein, so muss $\overline{PQ}$ der Geraden $\overline{S_1 S_2}$ parallel sein, was nach der Construction von Q aus P unmöglich ist.

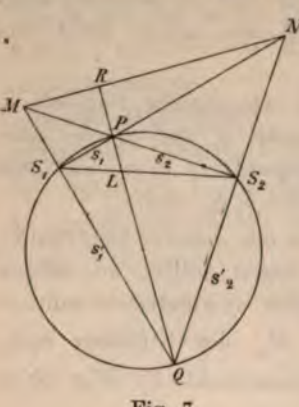


Fig. 7.

Die Lage der Centra rhombischer Büschel auf den Geraden $\overline{PQ}$ wollen wir etwas genauer untersuchen. Lässt man P die auf $\overline{S_1 S_2}$ senkrechte Gerade p durchlaufen, so beschreibt Q die Gerade q. Die von S_1 nach zusammengehörigen Punkten gezogenen Strahlen schliessen immer einen rechten Winkel ein, wie auch die von S_2 durch dieselben Punkte gelegten Strahlen. Nun gilt der Satz [1]), „dreht sich ein Winkel von unveränderlicher Grösse um seinen festen Scheitel F und begegnen die Schenkel $x x_1$ zwei festen Geraden $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ bez. in den Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, so hüllt die Verbindungslinie $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ einen

1) **Steiner's** Vorlesungen über synthetische Geometrie, II. Theil, herausgegeben von **Schröter**, 1. Aufl. p. 211. 1867.

Kegelschnitt ein, welcher die beiden Geraden $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ berührt und den Punkt F zu einem seiner Brennpunkte hat.“ Wenden wir diesen Satz auf unseren Fall an, indem wir für F entweder S_1 oder S_2, für die Geraden $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ die Geraden $p\,q$ und als Winkel von unveränderlicher Grösse den Rechten wählen, so erkennen wir, dass S_1 und S_2 die Brennpunkte des von den Geraden $\overline{PQ}$ eingehüllten Kegelschnittes sind. Das Centrum des rhombischen Büschels, welches auf $\overline{PQ}$ liegt, ist (vgl. Fig. 7) ein Punkt R, der durch die Punkte P und Q von dem Schnittpunkt L der Geraden $\overline{PQ}$ und $\overline{S_1\,S_2}$ harmonisch getrennt ist. Aus Symmetriegründen ist $\overline{S_1\,S_2}$ die Axe des von $\overline{PQ}$ umhüllten Kegelschnittes k. Die Polare des Punktes L in Bezug auf den Kegelschnitt k (Fig. 8) steht auf der Axe $\overline{S_1\,S_2}$ senkrecht, weil L auf der Axe liegt. Nennen wir ihren Schnittpunkt mit $\overline{S_1\,S_2}$ R_1, so ist R_1 von L durch P_1 und Q_1, die Scheitelpunkte des Kegelschnitts, harmonisch getrennt. Projiciren wir die vier harmonischen Punkte senkrecht zu $\overline{S_1\,S_2}$ auf die Punktreihe $\overline{PQ}$, so erhalten wir $L\,P\,R\,Q$ und R ist von L durch P und Q harmonisch getrennt. Da $\overline{R\,R'_1}$ die Polare von L bezüglich des Kegelschnitts ist, $\overline{LP}$ die Tangente aus L an denselben, so ist ihr Schnittpunkt R der Berührungspunkt der Geraden $\overline{PQ}$. Wie wir andererseits gesehen haben, ist dieser Punkt das Centrum des rhombischen Büschels.

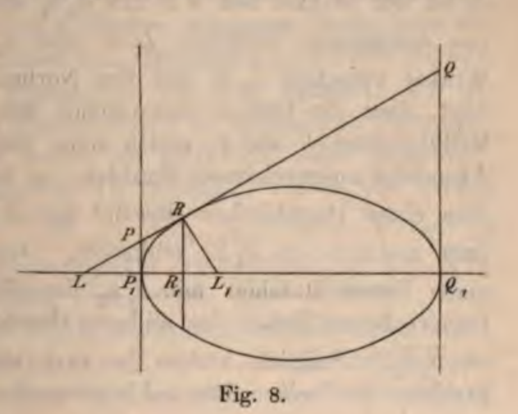


Fig. 8.

55. *Lässt man einen Systempunkt P alle möglichen Lagen auf einer zu $\overline{S_1\,S_2}$ senkrechten Systemgeraden p einnehmen, und verbindet ihn mit dem zugehörigen Punkte Q durch eine Gerade, so umhüllt letztere einen Kegelschnitt, dessen Brennpunkte die Centra S_1 und S_2 der orthogonalen Büschel sind. Die Berüh-*

rungspunkte der Geraden $\overline{PQ}$ sind Mittelpunkte rhombischer Systemstrahlenbüschel.

In den von den Geraden $\overline{PQ}$ umhüllten Kegelschnitten lernen wir Systemcurven kennen, bei denen nicht nur die Tangenten, sondern auch die Normalen in Systempunkten Systemgeraden sind. Die Punkte L und L_1, in welchen die Axe $\overline{S_1 S_2}$ des Kegelschnittes von den Tangenten und den zugehörigen Normalen desselben geschnitten werden, sind einander zugeordnete Punkte einer involutorischen Punktreihe, deren Ordnungspunkte die Brennpunkte bilden. Dass L und L_1 durch S_1 und S_2 harmonisch getrennt werden, kann man auch durch eine geeignete Ergänzung von Fig. 7 [1]) sehen. Da $\overline{LR}$ auf $\overline{L_1 R}$ senkrecht steht, so ist der Winkel den $\overline{LR}$ mit $\overline{S_1 S_2}$ bildet, das Complement von demjenigen zwischen $\overline{L_1 R}$ und $\overline{S_1 S_2}$ oder gleich dem Winkel zwischen $\overline{L_1 R}$ und der Normalen zu $\overline{S_1 S_2}$. Daraus folgt, dass die beiden rhombischen Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten L und L_1 gleich sind. Sie haben auch parallele Axen oder ausgezeichnete Strahlen, nur liegt die Axe, welche in dem einen rhombischen Büschel mit $\overline{S_1 S_2}$ zusammenfällt, in dem anderen zu $\overline{S_1 S_2}$ senkrecht. Jeder Systemstrahl des einen Büschels bildet mit $\overline{S_1 S_2}$ denselben Winkel, wie der entsprechende Strahl des anderen Büschels mit der Normalen zu $\overline{S_1 S_2}$. Folglich stehen je zwei einander entsprechende Strahlen der beiden Büschel aufeinander senkrecht, und ihre Schnittpunkte liegen auf einem Systemkreis, der $\overline{LL_1}$ zum Durchmesser hat. Sämmtliche Systempunkte des Kreises sind (nach Satz 40) Centra von Büscheln, die unter sich und mit den Büscheln L und L_1 congruent sind.

56. *Schneidet die Verbindungslinie zweier zusammengehöriger Punkte P und Q die Gerade $\overline{S_1 S_2}$ in einem Punkte L, so ist der von L durch S_1 und S_2 harmonisch getrennte Punkt L_1 Centrum eines dem Büschel L congruenten, aber gegen jenen um 90^0 gedrehten Büschels. Der über $\overline{LL_1}$ als Durchmesser beschriebene Kreis ist ein Systemkreis, und enthält als Systempunkte lauter Centra von Büscheln die mit L congruent sind.*

1) Indem $\overline{MN}$ und $\overline{S_1 S_2}$ bis zu ihrem Schnittpunkte L_1 verlängert werden.

Von diesen Kreisen dürfen sich (nach Satz 44) keine zwei in Systempunkten schneiden.

Es sei hier nur noch kurz darauf hingewiesen, dass man es bei der Beziehung zwischen allen Punkten P der Ebene und den zugehörigen Punkten Q mit einer eigenthümlichen involutorischen Verwandtschaft zweiten Grades zu thun hat. Es entsprechen den Geraden bei dieser besonderen Verwandtschaft nur Geraden oder Parabeln. Liegt nämlich ein Punkt P im Unendlichen, so sind die nach ihm gerichteten Strahlen s_1 und s_2 der Büschel S_1 und S_2 parallel; dann und nur dann sind die nach Q gerichteten Strahlen s'_1 und s'_2 parallel, so dass auch Q im Unendlichen liegt. Dem unendlich fernen Punkt einer Geraden entspricht also ein einziger Punkt im Unendlichen, und keinem im Endlichen gelegenen Punkt kann ein unendlich ferner zugeordnet sein. Beschreibt also P eine Gerade, so bewegt sich Q im allgemeinen auf einer Parabel. Auf die übrigen merkwürdigen Eigenschaften der besonderen Verwandtschaft zweiten Grades wollen wir hier nicht näher eingehen.

Auf den Systemcurven II. Ordnung, welche die Gerade $\overline{PQ}$ umhüllt, wenn P die zu $\overline{S_1 S_2}$ senkrechte Gerade p durchläuft, sind die Systempunkte symmetrisch zur Axe $\overline{S_1 S_2}$, nicht aber zu der dazu senkrechten Axe vertheilt. Denn wären sie letzteres, so müsste der Systemstrahlenbüschel von S_1 zu demjenigen von S_2 symmetrisch, also die beiden orthogonalen Büschel gleich sein. Dies ist aber gegen die Voraussetzung.

57. *Die Vertheilung der Systempunkte auf einer Systemcurve II. Ordnung braucht nicht dieselbe Symmetrie wie die Curve zu besitzen.*

„Wird ein eigentlicher Brennpunkt einer Curve II. Ordnung verbunden mit den Berührungspunkten, sowie mit dem Schnittpunkte von zwei Tangenten, so bildet die letztere Verbindungslinie gleiche Winkel mit den beiden ersteren." [1]) Wenden wir diesen Satz an auf eine Systemcurve eines Möbius'schen Netzes und setzen voraus, dass ein Brennpunkt S_1 derselben ein Systempunkt sei, so ist der Systemstrahl s, welcher von S_1, nach dem Schnittpunkte zweier Systemtangenten a und b der Curve geht, gleich geneigt gegen

1) Reye, Geometrie der Lage, p. 134. 1882.

die Systemstrahlen a_1 und b_1, welche S_1 mit den Berührungspunkten von a und b verbinden. In dem Strahlenbüschel S_1 ist auch ein Systemstrahl vorhanden, welcher auf s senkrecht steht, nämlich derjenige, welcher von s durch a und b harmonisch getrennt wird. Solcher senkrechter Systemstrahlenpaare müssen aber im Büschel S_1 unendlich viele vorhanden sein, denn man kann von unendlich vielen Systemtangentenpaaren $a\,b$ ausgehen, welche unendlich viele verschiedene Strahlen s bestimmen. Der Systembüschel S_1 ist folglich ein orthogonaler. Die zum Brennpunkt gehörige Directrix ist dessen Polare, also in unserem Falle eine Systemgerade.

58. *Soll in einem Möbius'schen Netze ein eigentlicher Brennpunkt einer Systemcurve II. Ordnung Systempunkt sein, so muss derselbe Centrum eines orthogonalen Systemstrahlenbüschels sein.*

Die zum Brennpunkt gehörige Directrix ist eine Systemgerade.

II. Der Systemstrahlenbündel.

Viele von den Sätzen, die im I. Theile für das ebene System abgeleitet worden sind, übertragen sich auch auf den Strahlenbündel und zwar entweder, indem man von der projectivischen Beziehung von Strahlenbündeln auf ebene Systeme Gebrauch macht, oder, was im Grunde genommen auf dasselbe herauskommt, indem man die Beweise für die Ebene einfach in der Weise verändert, dass für die Punkte und Geraden der Ebene Strahlen und Ebenen des Bündels gesetzt werden. Andere Sätze, namentlich solche, bei denen die unendlich fernen Elemente der Ebene, oder solche, bei denen Winkelverhältnisse eine Rolle spielen, sind nicht ohne weiteres, zum Theil überhaupt nicht, auf den Bündel anwendbar. Von der ersteren Gruppe seien folgende erwähnt, indem wegen der Beweise nur auf die analogen Sätze im ebenen Netz verwiesen wird.

59. *Die Bestimmung eines Systembündels durch ein Vierflach oder Vierkant kann man auch so auffassen, als ob als Fundamentalstücke zwei nicht miteinander in Widerspruch stehende Systemebenenbüschel oder zwei nicht miteinander in Widerspruch stehende Systemstrahlenbüschel gegeben seien* (vergl. p. 112—113).

Dass die Systemebenenbüschel oder Strahlenbüschel nicht miteinander in Widerspruch stehen, soll heissen, dass ihre

gemeinschaftlichen Elemente Systemstücke der beiden Systemebenen, bezw. Strahlenbüschel sein müssen.

60. *Durch einen Systemebenenbüschel und einen Systemstrahlenbüschel ist ein Systembündel nicht bestimmt.*

61. *In dem Systemstrahlenbündel sind Kegelflächen II. Ordnung vorhanden, auf denen unendlich viele Systemstrahlen des Bündels liegen* (Satz 4).

62. *Eine Kegelfläche II. Ordnung, welche durch fünf Systemstrahlen bestimmt ist, besitzt unendlich viele Systemstrahlen als Seiten und ist also eine Systemkegelfläche II. Ordnung* (Satz 5).

63. *Jede Systemebene schneidet jede Systemkegelfläche II. Ordnung in einem zweiten Systemstrahle, wenn sie dieselbe in einem Systemstrahl trifft* (Satz 6).

64. *Jede Ebene, welche eine Systemkegelfläche in einem Systemstrahl berührt, ist Systemebene* (Satz 7).

Die Systemkegelfläche II. Ordnung, auf der unendlich viele Systemstrahlen liegen, wird umhüllt von einem Ebenenbüschel II. Ordnung, welches unendlich viele Systemebenen enthält (Satz 7).

65. *Auf einer Systemkegelfläche II. Ordnung ist die Gesammtheit der Systemstrahlen durch drei derselben gegeben. Die Uebrigen werden aus den dreien durch fortgesetzte Construction der vierten harmonischen gefunden* (Satz 8).

66. *Durch drei Systemstrahlen und eine durch sie gehende Systemkegelfläche II. Ordnung ist ein Systembündel völlig bestimmt* (Satz 9).

67. *Die Polarebene eines Systemstrahles bezüglich einer Systemkegelfläche II. Ordnung ist eine Systemebene des Bündels* (Satz 10).

68. *Der Polstrahl einer Systemebene bezüglich einer Systemkegelfläche II. Ordnung ist ein Systemstrahl des Bündels* (Satz 11).

69. *Berührt eine Systemebene eine Systemkegelfläche II. Ordnung, so ist ihr Berührungsstrahl ein Systemstrahl* (Satz 12).

70. *Die Tangentialebenen durch einen nicht auf der Systemkegelfläche II. Ordnung liegenden Systemstrahl sind entweder beide Systemebenen oder keine von beiden ist es* (Satz 13).

71. *Besitzen zwei projectivische Systemebenenbüschel dieselbe Axe und dieselben Systemebenen, so sind die beiden Ebenen, welche sie entsprechend gemein haben, entweder beide Systemebenen, oder keine von beiden ist eine solche* (Satz 14).

72. *Wird eine Kegelfläche II. Ordnung durch fünf Tangentialebenen bestimmt, welche Systemebenen sind, so ist die Kegelfläche eine Systemkegelfläche, d. h. unendlich viele ihrer Seiten sind Systemstrahlen und der sie umhüllende Ebenenbüschel II. Ordnung enthält unendlich viele Systemebenen* (Satz 19).

73. *Eine Kegelfläche, welche gegeben ist durch drei Systemstrahlen und zwei weitere Strahlen, die Ordnungsstrahlen eines ebenen involutorischen Systemstrahlenbüschels sind, ist eine Systemkegelfläche II. Ordnung, auch wenn die Ordnungsstrahlen nicht reell sondern conjugirt imaginär sind* (Satz 17).

74. *Eine Kegelfläche II. Ordnung, welche durch fünf Berührungsebenen gegeben ist, von denen drei Systemebenen, die beiden anderen Ordnungselemente eines involutorischen Systemstrahlenbüschels sind, ist eine Systemkegelfläche auch im Falle, dass die besagten Ordnungselemente nicht reell sondern conjugirt imaginär sind* (Satz 18).

75. *Ist eine Kegelfläche II. Ordnung zu construiren, welche durch vier Systemstrahlen geht, und eine Systemebene berührt oder vier Systemebenen berührt und durch einen Systemstrahl geht, so erhält man jedesmal zwei Kegelflächen, und entweder beide sind Systemkegelflächen, oder keine von beiden ist es* (Satz 20, 21).

76. *Eine Kegelfläche II. Ordnung, welche durch vier Systemstrahlen geht und in einem derselben eine Systemebene berührt, ist eine Systemkegelfläche* (Satz 22).

77. *Eine Kegelfläche II. Ordnung, welche vier Systemebenen und eine von ihnen in einem Systemstrahle berührt, ist eine Systemkegelfläche* (Satz 23).

78. *Eine Kegelfläche II. Ordnung, welche durch drei Systemstrahlen geht und in zweien derselben Systemebenen berührt, ist eine Systemkegelfläche* (Satz 24).

79. *Eine Systemkegelfläche II. Ordnung, welche drei Systemebenen, zwei davon in Systemgeraden berührt, ist eine Systemkegelfläche* (Satz 25).

80. *Sind drei von den Schnittstrahlen zweier Systemkegelflächen II. Ordnung Systemstrahlen, so ist auch der vierte ein solcher* (Satz 26).

81. *Sind drei von den gemeinschaftlichen Berührungsebenen zweier Systemkegelflächen II. Ordnung Systemebenen, so ist auch die vierte eine solche* (Satz 27).

82. *Sind zwei von den gemeinschaftlichen Seiten zweier Systemkegelflächen II. Ordnung Systemstrahlen, so liegen die beiden übrigen auf einer Systemebene und sind als Ordnungselemente eines involutorischen Systemstrahlenbüschels entweder beide Systemstrahlen, oder keiner von beiden ist ein solcher. Auch in letzterem Falle, und selbst wenn sie imaginär sind, haben sie die Eigenschaft, dass Kegelflächen II. Ordnung, welche durch sie und drei Systemstrahlen gehen, Systemkegelflächen sind* (Satz 28).

83. *Sind zwei von den gemeinschaftlichen Berührungsebenen zweier Systemkegelflächen II. Ordnung Systemebenen, so schneiden sich die beiden übrigen in einem Systemstrahl und sind als Ordnungselemente eines involutorischen Systemebenenbüschels entweder beide Systemebenen, oder keine von beiden ist eine solche. Auch in letzterem Falle, und selbst wenn sie imaginär sind, haben sie die Eigenschaft, dass Kegelflächen II. Ordnung, welche sie und drei Systemebenen berühren, Systemkegelflächen sind* (Satz 29).

84. *Eine Systemkegelfläche III. Ordnung, welche durch neun Systemstrahlen bestimmt ist, enthält noch unendlich viele weitere Systemstrahlen und kann als Systemkegelfläche III. Ordnung bezeichnet werden* (Satz 30).

85. *Eine Systemebene, welche eine Systemkegelfläche III. Ordnung in einem Systemstrahl schneidet, enthält zwei weitere Systemstrahlen derselben, von der Eigenschaft, dass jede durch sie und drei beliebige Systemstrahlen gelegte Kegelfläche II. Ordnung eine Systemkegelfläche ist* (Satz 31).

86. *Schneidet eine Systemebene eine Systemkegelfläche III. Ordnung in zwei Systemstrahlen, so ist auch der dritte gemeinschaftliche Strahl ein Systemstrahl* (Satz 32).

87. *Wenn eine Systemkegelfläche II. Ordnung eine Systemkegelfläche III. Ordnung in fünf Systempunkten schneidet, so ist auch ihr sechster gemeinschaftlicher Strahl ein Systemstrahl* (Satz 33).

88. *Alle Systemkegelflächen III. Ordnung, welche durch dieselben acht Systemstrahlen gelegt werden können, schneiden sich in einem und demselben neunten Systemstrahl* (Satz 34).

Die vorangehenden Sätze sind solche, welche wir unmittelbar durch Uebertragung von Sätzen über das ebene System erhalten können. Als Gesammtheit genommen, sollen sie dazu dienen, zu zeigen, dass das Zonengesetz der Krystallographie einer wesentlichen Erweiterung fähig ist. Der Zone oder dem

krystallographischen Ebenenbüschel I. Ordnung, welcher bisher allein berücksichtigt wurde, gesellen sich in einfacher und naturgemässer Weise die Systemebenenbüschel zweiter und höherer Ordnung zu, die wir als *Zonen zweiter und höherer Ordnung* bezeichnen können.

Von den nun zu behandelnden Sätzen, die für den Strahlenbündel besonders abgeleitet werden müssen, besitzen viele immerhin noch grosse Aehnlichkeiten mit Sätzen über ebene Systeme und manche würden sich, wenn auch nicht direct, wie die obigen, auf solche zurückführen lassen.

Ist der Systemstrahlenbündel symmetrisch in Bezug auf eine Ebene ε, so bilden zwei Systemebenen α und β mit den zu ihnen bezüglich ε symmetrisch liegenden Ebenen ein Vierseit, dessen drei Diagonalebenen Systemebenen sind. Die Ebene ε ist eine von den Diagonalebenen, die beiden anderen stehen auf ε senkrecht und schneiden sich in einem zu ε normalen Systemstrahl.

89. *Ist ein Systemstrahlenbündel in Bezug auf eine Ebene ε symmetrisch, so ist dieselbe eine Systemebene und ihre Normale ein Systemstrahl.*

Wir wenden uns zu specielleren Formen des Bündels und zwar zuerst zu dem orthogonalen Bündel. Jede Systemebene eines orthogonalen Bündels ist eine Symmetrieebene desselben.[1] Daraus folgt:

90. *Zu irgend einer beliebigen Zone des orthogonalen Bündels müssen unendlich viele andere von gleicher Art existiren, nämlich die zur ersten symmetrischen Zonen bezüglich sämmtlicher Systemebenen des Bündels.*

Hierbei und im Folgenden nennen wir Zonen von gleicher Art solche, deren sämmtliche Systemebenen gleichzeitig zur Deckung gebracht werden können, ohne Rücksicht darauf ob im regulären Krystallsystem, für welches der orthogonale Bündel massgebend ist, die Zonen denselben Namen tragen oder nicht.

Sind a und a_1 die Axen zweier gleichen Zonen im orthogonalen Bündel und η eine Systemebene des Büschels a, so existirt im Büschel a_1 (nach Satz 3a) eine Systemebene η_1,

---

1) E. Blasius, Beitrag z. geom. Krystallographie, p. 553. 1890.

welche die gleiche Neigung zur Ebene $\overline{a a_1}$ besitzt wie η und auch auf derselben Seite der Ebene $\overline{a a_1}$ liegt. Die Ebene, welche durch die Schnittgerade von η und η_1 und die Normale zu $\overline{a a_1}$ gelegt wird, ist eine Systemebene, welche auf $\overline{a a_1}$ senkrecht steht und den Winkel zwischen a und a_1 halbirt. Die zur Halbirungeraden des Winkels $(a a_1)$ normale Ebene halbirt den Nebenwinkel und ist ebenfalls eine Systemebene.

91. *Diejenigen beiden Ebenen, welche im orthogonalen Bündel auf der Ebene zweier Axen $a a_1$ von gleichen Zonen senkrecht stehen und die von a und a_1 gebildeten Winkel halbiren, sind Systemebenen des Bündels.*

Daraus folgt:

Zwei Zonen im orthogonalen Bündel sind dann und nur dann gleich, wenn die Halbirungslinie des Winkels zwischen ihren Axen ein Systemstrahl ist. Da dem regulären System ein orthogonaler Bündel zu Grunde liegt ergibt sich demnach:

Sind im regulären System zwei Flächen (und folglich die dazu normalen Zonen) von gleicher Art, so sind die geraden Abstumpfungen ihrer Kanten krystallographisch möglich und umgekehrt.

Construirt man die symmetrischen Axen zu einer gegebenen a bezüglich sämmtlicher Systemebenen eines Systemebenenbüschels I. Ordnung mit der Axe b, so liegen diese alle auf einer Rotationskegelfläche, deren Axe b ist.

92. *Von den Axen von Zonen gleicher Art mit einer Zone a liegen unendlich viele auf Rotationskegeln, welche a als Seite enthalten und deren Axe jeder beliebige andere Systemstrahl sein kann.*

Sind drei Axen $a_1 a_2 a_3$ von Zonen gleicher Art gegeben, so sind die Ebenen, welche auf den Verbindungsebenen je zweier unter ihnen senkrecht stehen und den Winkel zwischen ihnen halbiren nach Satz 91 Systemebenen. Dieselben schneiden sich in einem Systemstrahl k und die zu $a_1 a_2 a_3$ symmetrischen, bezüglich aller Systemebenen des Büschels k, liegen auf einem durch $a_1 a_2 a_3$ bestimmten Rotationskegel und sind alle von gleicher Art, wie $a_1 a_2 a_3$.

93. *Durch drei Axen von Zonen gleicher Art ist im orthogonalen Bündel ein Rotationskegel des Systems bestimmt, auf dem noch unendlich viele andere Axen von Zonen derselben Art liegen.*

Wird ein solcher Rotationskegel entweder durch drei Axen a_1 a_2 a_3 von gleicher Art oder durch einen krystallographischen Strahl k als Kegelaxe und eine einzige Axe a_1 als Seite bestimmt, und liegt auf demselben ein beliebiger anderer Systemstrahl b_1, so ist die Ebene, welche durch die Normale n zur Ebene $\overline{a_1 b_1}$ und die Axe k des Kegels gelegt wird, eine Systemebene, weil k und n Systemstrahlen sind, und halbirt den Winkel zwischen a_1 und b_1. Es folgt nach dem Zusatz zu 91, dass b_1 Axe einer Zone von gleicher Art wie a_1 ist.

94. *Ist ein Rotationskegel des Systems entweder durch drei Axen a_1 a_2 a_3 von Zonen derselben Art, oder durch einen Systemstrahl k als Axe des Kegels und einen anderen Systemstrahl a_1 als Seite bestimmt, so sind alle auf demselben liegenden Systemstrahlen Axen von Zonen derselben Art wie a_1.*

Aus diesem Satz und dem Satz 80 ergibt sich:

95. *Legt man durch drei Systemstrahlen einer zum System gehörigen Rotationskegelfläche eine andere Systemkegelfläche II. Ordnung, so schneiden sich die Kegel in einem vierten Systemstrahl, welcher Axe einer Zone von gleicher Art wie die Zonen der drei ersten Strahlen ist.*

Wenn ein Bündel nicht wie der orthogonale, ausschliesslich Systemstrahlen besitzt, auf denen Systemebenen senkrecht stehen, so sind doch noch viele Möglichkeiten vorhanden, in denen er einzelne oder auch ganze Gruppen normaler Systemstrahlen und Systemebenen enthält. Das trikline System ist das einzige, welches im allgemeinen keine normalen Elemente hat. Aber auch im triklinen System kommt nach Ansicht mancher Krystallographen eine Anzahl von Krystallen mit zwei aufeinander senkrechten Kanten vor. Es handelt sich um Krystalle, welche man früher in ein besonders „diklinoëdrisches“ System stellte. Nach den Eintheilungsgrundsätzen von Bravais und Anderen bilden die Krystalle dieser Art nicht ein System, ja nicht einmal eine der 32 Abtheilungen. Damit ist aber nicht gesagt, dass sie nicht von der grössten Wichtigkeit namentlich für die Structurtheorie der Krystalle wären, wenn sie wirklich vorkämen. Theoretisch lässt sich die Frage nach ihrer Existenz nicht entscheiden und praktisch lässt sich zwar feststellen, dass bestimmte Krystalle nur für bestimmte

Temperaturen die senkrechten Kanten besitzen, nicht aber, dass es keine Krystalle gibt oder geben kann, welche sie bei allen Temperaturen bewahren. Da wir also das Vorhandensein der besagten Gruppe weder mit Sicherheit behaupten noch verneinen können, so werden wir bei unseren geometrischen Untersuchungen auf sie und einige andere ähnliche Gruppen Rücksicht nehmen.

Wenn man den Fall, dass zwei aufeinander senkrechte Kanten in einem triklinen Krystall vorkommen, von der geometrischen Seite auffasst, so steht demselben als gleichberechtigt und reciprok derjenige gegenüber, bei welchem im triklinen System zwei Ebenen aufeinander senkrecht stehen. Nur dadurch, dass man vielfach früher auf die Axen das Hauptgewicht legte, ist es zu erklären, dass neben dem diklinoëdrischen System nicht ein solches mit zwei aufeinander senkrechten Ebenen angenommen wurde. Nach unserer jetzigen Auffassung ist der Fall demjenigen des früheren diklinoëdrischen Systems gleichberechtigt, wenn er auch wie jenes nicht einmal eine der 32 Abtheilungen bildet. Weder die Krystalle mit den zwei aufeinander senkrechten Kanten noch diejenigen mit zwei aufeinander senkrechten Ebenen haben wesentlich geometrisches Interesse. Dagegen ergeben sich einige bemerkenswerthe Verhältnisse bei der Untersuchung von Formen, die mehrere derartige orthogonale Elemente besitzen.

Da der krystallographische Strahlenbündel durch vier Strahlen oder vier Ebenen bestimmt wird, so ist es auf unendlich viele Arten möglich Strahlenbündel zu construiren, in denen zwei Paare aufeinander senkrechter Kanten oder zwei Paare aufeinander senkrechter Ebenen vorkommen. Es gilt nun aber der Satz: Wenn in einem Vierseit zwei Paar Gegenkanten aufeinander senkrecht stehen, so sind auch die beiden letzten Gegenkanten normal. Dieser Satz ergibt sich aus dem folgenden[1]): „Wenn bei einem Tetraëder ein Paar Gegenkanten rechtwinklig zu einander gerichtet ist und noch ein zweites Paar, so ist es auch das dritte Paar.“ Wenn man nämlich

---

1) Schröter, Theorie d. Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde p. 84. 1880.

durch einen Punkt Parallelebenen zu den Ebenen eines Tetraëders legt, so erhält man ein Vierseit, dessen Gegenkanten den Gegenkanten des Tetraëders parallel sind, und verschiebt man umgekehrt, die Ebenen eines Vierseits sich selbst parallel so, dass sie nicht mehr alle durch einen Punkt gehen, so erhält man ein Tetraëder, dessen Gegenkanten denen des Vierseits parallel laufen. Aus dem Satze ergibt sich für den krystallographischen Strahlenbündel:

96. *Besitzt ein krystallographischer Strahlenbündel zwei Paare aufeinander senkrechter Systemstrahlen, so ist auch ein drittes solches Paar vorhanden. Die drei Paare bilden die Gegenkanten eines Vierseits.*

Wenn ein krystallographischer Strahlenbündel S_1 zwei Paare aufeinander senkrechter Ebenen enthält, so besitzt der dazu reciproke Strahlenbündel S_2, dessen Strahlen und Ebenen, bez. auf den Ebenen und Strahlen des ersteren senkrecht sind, zwei Paare aufeinander senkrechter Strahlen. In S_2 ist also nach dem vorigen Satz noch ein drittes Paar aufeinander senkrechter Strahlen vorhanden und folglich in S_1 ein drittes Paar aufeinander senkrechter Ebenen.

97. *Besitzt ein krystallographischer Strahlenbündel zwei Paare aufeinander senkrechter Ebenen, so enthält er noch ein drittes derartiges Paar. Die drei Paare bilden die Gegenseiten eines Vierkants.*

Wie dieser Satz dem Satze 48 für die Ebene analog ist, ohne dass er sich aus dem letzteren einfach ergibt, so nehmen auch die Strahlenbündel mit zwei orthogonalen Zonen oder mit zwei orthogonalen ebenen Strahlenbüscheln eine ähnliche Stellung unter den Strahlenbündeln ein, wie die Netze mit zwei orthogonalen Strahlenbüscheln unter den ebenen Netzen. Die Sätze lassen sich auch hier nicht ohne weiteres von der Ebene auf den Raum übertragen. Wird ein Bündel durch zwei beliebige orthogonale Zonen bestimmt, die nicht mit einander in Widerspruch stehen, d. h. deren gemeinsame Ebene ε eine Systemebene beider Büschel ist, so ist diese gemeinsame Ebene eine Symmetrieebene des Bündels. Der Bündel ist also mindestens von der Symmetrie des monosymmetrischen Systems; senkrecht zu ε liegt (nach Satz 89) eine krystallographische Kante.

98. *Ein krystallographischer Strahlenbündel mit zwei orthogonalen Zonen besitzt in der gemeinsamen Ebene der beiden Zonen eine Symmetrieebene.*

Sind in einem krystallographischen Strahlenbündel S_1 zwei orthogonale ebene Strahlenbüschel vorhanden, so ist derjenige krystallographische Strahlenbündel S_2, dessen Ebenen und Strahlen, bez. auf den Ebenen und Strahlen von S_1 senkrecht stehen, ein Bündel von der im vorigen Satz vorausgesetzten Art. Der Symmetrie des Bündels S_2 muss die gleichartige Symmetrie des Bündels S_1 zu Grunde liegen.

99. *Ein krystallographischer Strahlenbündel mit zwei orthogonalen ebenen Strahlenbüscheln besitzt eine Symmetrieebene, welche senkrecht zum gemeinsamen Strahl der beiden Büschel ist.*

Jede Ebene π, welche in einem Bündel mit zwei orthogonalen Ebenenbüscheln s_1 und s_2 auf der Verbindungsebene σ' der Axen s_1 und s_2 senkrecht steht und durch einen beliebigen Systemstrahl p geht, ist eine Systemebene des Bündels. Legt man durch den Systemstrahl p die Ebenen ε_1 und ε_2 der Büschel s_1 und s_2 und schneiden sich die zu den Ebenen ε_1 und ε_2, bez. senkrechten Ebenen ε'_1 und ε'_2 der Büschel s_1 und s_2 in dem Strahl q, so ist dieses auch ein Systemstrahl und die Beziehung zwischen den zusammengehörigen Strahlen p und q in Strahlenbündel ist eine ähnliche, wie die zwischen den Punkten P und Q in dem ebenen Möbius'schen Netz mit zwei orthogonalen Strahlenbüscheln. Durchläuft der Strahl p die auf σ' senkrechte Ebene π, so beschreiben die Ebenen ε_1 und ε_2 zwei perspectivische Ebenenbüschel, die Ebenen ε'_1 und ε'_2 daher zwei projectivische Büschel. Fällt der Strahl p in der Ebene π insbesondere auf den Strahl s', welcher zu σ' normal ist, so fallen die beiden einander entsprechenden Ebenen ε'_1 und ε'_2 mit der Ebene σ' zusammen. Die von ε'_1 und ε'_2 beschriebenen projectivischen Ebenenbüschel haben daher diese Ebene entsprechend gemein und sind folglich perspectivisch. Ihr Schnitt, der Ort der zu den Strahlen p der Ebene π gehörigen Strahlen q, ist also eine Ebene $\varkappa$. Dieselbe steht ebenso wie π auf σ' senkrecht; denn fällt p in die Schnittgerade von π mit σ', so fallen die Ebenen ε_1 und ε_2 mit σ' zusammen, ε'_1 und ε'_2 schneiden sich daher in dem zu σ' normalen Strahl s'.

100. *Ordnet man in einem Strahlenbündel mit zwei orthogonalen Ebenenbüscheln s_1 und s_2 einem Strahle p, durch den die Ebenen ε_1 und ε_2 der beiden Büschel gehen, denjenigen Strahl q zu, in welchem sich die zu ε_1 und ε_2 senkrechten Ebenen ε'_1 und ε'_2 schneiden, und bewegt sich p in einer zur Verbindungsebene σ' von s_1 und s_2 senkrechten Ebene π, so beschreibt der zugeordnete Strahl q eine Ebene $\varkappa$, welche gleichfalls zu σ' normal ist.*

Nun gilt der Satz[1]): „Dreht sich ein gegebener Flächenwinkel um seine Scheitellinie s, so umhüllt die Verbindungsebene der beiden Geraden, in welchen seine Flächen von zwei durch einen Punkt von s gelegten Ebenen beziehungsweise geschnitten werden, eine diese beiden Ebenen berührende Kegelfläche I. Ordnung, von welcher s eine Focalaxe ist.“ Wir können diesen Satz auf unseren Fall in doppelter Weise anwenden, indem wir entweder s_1 oder s_2 als Schnittlinie des Flächenwinkels annehmen, diesen gleich einem rechten wählen und die beiden Ebenen π und $\varkappa$ für die im Satze erwähnten Ebenen setzen. Wir ersehen dann, dass die Verbindungsebene der Strahlen p und q eine Kegelfläche II. Ordnung umhüllt, deren Focalaxen s_1 und s_2 sind. Die Ebene σ' muss eine Symmetrieebene der Kegelfläche sein, die beiden anderen Symmetrieebenen stehen auf ihr senkrecht und halbiren den Winkel zwischen den Focalaxen. Zu den letzteren Symmetrieebenen müssen auch die Berührungsstrahlen der Ebenen π und $\varkappa$ symmetrisch liegen, denn die Tangentialebenen π und $\varkappa$ stehen auf der Symmetrieebene σ' der Kegelfläche senkrecht und schneiden dieselbe daher in Strahlen, welche symmetrisch zu den Halbirenden der Winkel zwischen s_1 und s_2 liegen. Da man durch jeden Systemstrahl a der Ebene σ' eine auf σ' senkrechte Systemebene errichten kann, so erhält man auf σ' zu jedem Systemstrahl a einen Systemstrahl b, welcher bezüglich der Halbirenden des Winkels $(s_1\,s_2)$ zu a symmetrisch ist. Der Systemstrahlenbüschel in der Ebene $\overline{s_1\,s_2}$ besitzt also rhombische Symmetrie. Wenn die Halbirenden des Winkels $(s_1\,s_2)$ Systemstrahlen sind, so ist der Büschel wirklich ein rhombischer, sonst ist er von der Art, die wir durch den Satz 52 kennen gelernt haben. Im ersteren Fall ist die

1) Reye, Geometrie der Lage 1. 154. Aufg., p. 189.

Ebene, welche auf σ' senkrecht steht und den Winkel zwischen s_1 und s_2 halbirt eine Systemebene und die Büschel s_1 und s_2 müssen gleich sein.

101. *Verbindet man in einem Bündel mit zwei orthogonalen Zonen s_1 und s_2 alle Systemstrahlen p einer auf der Verbindungsebene σ' der Axen s_1 und s_2 senkrechten Ebene π mit ihren zugeordneten Strahlen q durch Ebenen, so umhüllen die Verbindungsebenen $\overline{pq}$ eine Kegelfläche II. Ordnung, deren Focalaxen die Axen s_1 und s_2 sind.*

102. *In einem Strahlenbündel mit zwei orthogonalen Zonen s_1 und s_2 ist der Strahlenbüschel, dessen Ebene die Axen s_1 und s_2 verbindet von rhombischer Symmetrie. Die Geraden, in Bezug auf die er symmetrisch ist, sind die Halbirenden des Winkels $(s_1\, s_2)$. Wenn die orthogonalen Zonen einander gleich sind, undnur dann ist der Strahlenbüschel ein eigentlich rhombischer.*

Sind p und q (Fig. 9) zwei zusammengehörige Strahlen, sodass die nach p und q gelegten Ebenen ε_1 und ε'_1 des Büschels s_1 aufeinander senkrecht stehen, ebenso wie die nach p und q gelegten Ebenen ε_2 und ε'_2 des Büschels s_2 und ist in n der Schnittstrahl von ε_1 und ε'_2, m derjenige von ε'_1 und ε_2, so ist nach Satz 97 die Ebene $\overline{pq}$ zur Ebene $\overline{mn}$ normal. Der Schnittstrahl r der Ebenen $\overline{pq}$ und $\overline{mn}$ ist daher Axe eines rhombischen Ebenenbüschels. Durch andere Auswahl des Strahles p erhält man unendlich viele weitere Ebenen $\overline{pq}$ und unendlich viele weitere Axen von rhombischen Ebenenbüscheln. Die aufeinander senkrechten Ebenen derselben trennen immer die Strahlen s_1 und s_2 harmonisch. Lässt man p die auf $\overline{s_1\, s_2}$ senkrechte Ebene π durchlaufen, so dass die Ebene $\overline{pq}$ die oben erwähnte Kegelfläche einhüllt, so ist[1]) jedem Strahl a in der Symmetrieebene σ' ein zweiter

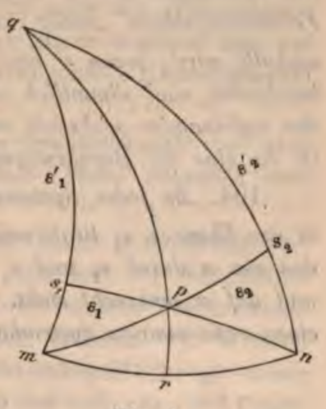


Fig. 9.

1) Reye, Geometrie der Lage 1. 1882. p. 152.

b zugeordnet, sodass zwei zu einander normale Ebenen der Büschel a und b bezüglich der Kegelfläche conjugirt sind. Die Strahlen a und b trennen die Focalaxen s_1 und s_2 harmonisch, und die Ebenen $\overline{pq}$ stehen in ihren Berührungsstrahlen auf den zugehörigen Ebenen $\overline{mn}$ senkrecht. Ist a ein Systemstrahl in der Ebene $\overline{s_1 s_2}$, so ist es auch b, ebenso der Polstrahl jeder Systemebene des Büschels a. Die Ebenen, welche den Systemebenen von a conjugirt sind, sind daher auch Systemebenen. Auf jeder Systemebene des einen Büschels steht eine Systemebene des anderen senkrecht, und der Ort der Schnittstrahlen dieser conjugirten Ebenen ist ein orthogonaler Systemkegel II. Ordnung.

103. *In einem Bündel mit zwei orthogonalen Ebenenbüscheln s_1 und s_2 sind unendlich viele rhombische Ebenenbüschel vorhanden. Die Systemstrahlen der Kegelflächen II. Ordnung, welche von der Verbindungsebene zweier zusammengehöriger Strahlen p und q umhüllt wird, wenn p eine zur Ebene $\overline{s_1 s_2}$ senkrechte Ebene π beschreibt, sind sämmtlich Axen rhombischer Ebenenbüschel. Von den aufeinander senkrecht stehenden Ebenen dieser Ebenenbüschel ist die eine die Berührungsebene an die Kegelfläche.*

104. *Zu jeder Systemebene α eines Büschels a, dessen Axe in der Ebene $\overline{s_1 s_2}$ liegt, existirt eine Systemebene β, welche durch den von a durch s_1 und s_2 harmonisch getrennten Strahl b geht und auf α senkrecht steht. Die beiden Büschel a und b erzeugen einen orthogonalen Systemkegel II. Ordnung.*



Fig. 10.

In dem Strahlenbündel mit zwei orthogonalen Systemebenenbüscheln s_1 und s_2 ist der Systemstrahlenbüschel in der Ebene $\overline{s_1 s_2}$ symmetrisch zu den Halbirenden der Winkel $(s_1\ s_2)$. Läge in der Ebene $\overline{s_1 s_2}$ (Fig. 10) noch die Axe s_3 eines dritten orthogonalen Ebenenbüschels, und ist p_1 ein beliebiger Systemstrahl des Strahlenbüschels in der Ebene $\overline{s_1 s_2}$, so muss ein Systemstrahl p_2 vorhanden sein, welcher mit s_2 denselben Winkel α einschliesst, wie p_1 mit s_1, aber auf der entgegen-

gesetzten Seite von s_2 liegt, wie p_1 von s_1. Ebenso muss ein Systemstrahl p_3 den Winkel α mit s_3 bilden und auf der entgegengesetzten Seite von s_3 liegen, wie p_2 von s_2. Endlich muss es auch einen Strahl p_4 geben, der mit s_1 den Winkel α einschliesst und auf der entgegengesetzten Seite von p_1 liegt, wie p_3 von s_3 und p_1 von s_1. Es sind daher zwei Systemstrahlen p_1 und p_4 vorhanden, die symmetrisch zu s_1 liegen, folglich ein zu s_1 senkrechter Systemstrahl. Da man für s_2 und s_3 dasselbe beweisen kann, so ist der Strahlenbüschel in der Ebene $\overline{s_1 s_2}$ ein orthogonaler. In dem orthogonalen Büschel ist jeder Strahl s'_1, welcher zu einem Systemstrahl s_1 bezüglich eines anderen Systemstrahles o symmetrisch ist, auch ein Systemstrahl. Durch o lässt sich eine Systemebene ω senkrecht zur Ebene $\overline{s_1 s_2}$ legen. Der Systemstrahlenbüschel in ω wird aus s_1 und s'_1 durch zwei gleiche Ebenenbüschel projicirt, d. h. der Ebenenbüschel s'_1 ist auch ein orthogonaler, und da o ein beliebiger Systemstrahl ist, so ergeben sich auf diese Weise unendlich viele Axen orthogonaler Ebenenbüschel in der Ebene $\overline{s_1 s_2}$.

105. *Liegen in einer Ebene eines Strahlenbündels drei Axen orthogonaler Zonen, so liegen in dieser Ebene unendlich viele Axen orthogonaler Zonen.*

„Wird eine Focalaxe f einer Kegelfläche II. Ordnung verbunden mit den Berührungsstrahlen und mit der Schnittlinie von zwei Berührungsebenen, so bildet die letztere Verbindungsebene gleiche Winkel mit den beiden ersteren.“ [1]) Wenden wir diesen Satz auf den Fall einer Systemkegelfläche an, deren eine Focalaxe s_1 ein Systemstrahl ist, und verbinden die Focalaxe mit zwei Systemstrahlen a und b der Kegelfläche durch Ebenen α' und β', und mit der Schnittlinie der Berührungsebenen α und β in den Strahlen a und b durch eine Ebene σ_1, so sind die Ebenen α' und β' gegen σ_1 gleich geneigt. Es gibt also im Ebenenbüschel s_1 eine Systemebene σ_2, welche auf der Systemebene σ_1 senkrecht steht, und da man durch andere Auswahl der Strahlen ab mehr als ein Paar senkrechter Systemebenen des Büschels s_1 findet, so ist letzterer ein orthogonaler Büschel.

---

1) Reye, Geometrie der Lage 1. p. 156. 1882.

106. *Ist in einem beliebigen Systemstrahlenbündel eine Systemkegelfläche II. Ordnung vorhanden, deren eine Focalaxe ein Systemstrahl ist, so ist letztere Axe eines orthogonalen Systemebenenbüschels.*

Nun machen wir zur weiteren Untersuchung des Bündels mit drei und folglich unendlich vielen Axen von orthogonalen Ebenenbüscheln in einer Ebene (Satz 105) Gebrauch von dem Satze[1]): „Wenn ein diëdrischer, rechter Winkel sich so bewegt, dass seine Kante in einer festen Ebene (ε_1) um einen festen Punkt $\mathfrak{B}$ sich dreht und die eine Seitenfläche desselben $[x_1\, n]$ um einen festen durch $\mathfrak{B}$ gehenden Strahl f sich dreht, so umhüllt die andere Seitenfläche einen besonderen Kegel zweiter Klasse, welcher die feste Ebene (ε_1) berührt, den Punkt $\mathfrak{B}$ zu seinem Mittelpunkt und den Strahl f zu einem Brennstrahl hat, während der andere Brennstrahl auf der festen Ebene normal steht.“ Wir wählen als feste Ebene (ε_1) diejenige, in welcher die drei Axen orthogonaler Ebenenbüschel liegen, als festen Strahl einen beliebigen ausserhalb dieser Ebene liegenden Systemstrahl f des Bündels. Der Kegel, von dem in dem Satz die Rede ist, muss ein Systemkegel sein, denn jedesmal, dass die Kante des diëdrischen rechten Winkels mit einer der Axen orthogonaler Büschel in der Ebene $\overline{s_1 s_2}$ zusammenfällt, sind beide Seitenflächen des Winkels Systemebenen. Die eine geht nach der Voraussetzung durch f, die andere ist Berührungsebene der Kegelfläche. Der Strahl f ist (nach Satz 106) als Systemstrahl und Focalaxe einer Systemkegelfläche II. Ordnung Axe eines orthogonalen Büschels. Da der Strahl f ein beliebiger Systemstrahl ausserhalb der Ebene $\overline{s_1 s_2}$ ist, so folgt:

107. *Ein Systemstrahlenbündel mit drei in einer Ebene liegenden Axen orthogonaler Ebenenbüschel besitzt nicht nur in der Ebene unendlich viele weitere Axen orthogonaler Büschel, sondern auch jeder ausserhalb der Ebene liegende Systemstrahl ist eine solche.*

Wir wollen nun untersuchen, welcher Art der Systembündel ist, wenn er drei orthogonale Ebenenbüschel enthält,

---

1) Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung u. s. w. p. 72. 1880.

deren Axen nicht in einer Ebene liegen. Seien diese Axen abc. In dem Ebenenbüschel a ist eine Systemebene senkrecht zur Ebene $\overline{ab}$ vorhanden, ebenso im Büschel b. Diese beiden Ebenen schneiden sich in einem Systemstrahl c_1, der auf der Ebene $\overline{ab}$ senkrecht steht. Die Normalen a_1 und b_1 der Ebenen $\overline{bc}$ und $\overline{ac}$ sind daher gleichfalls Systemstrahlen. Der Höhenstrahl h des Dreikantes abc ist der Schnittstrahl der drei durch a, b und c gehenden und bez. auf den gegenüberliegenden Seiten senkrechten Ebenen. Der Strahl h ist also der Schnitt der Ebenen $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$ und $\overline{cc_1}$ und daher ein Systemstrahl. Die Ebenen $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$ und $\overline{cc_1}$ sind Träger orthogonaler Systemstrahlenbüschel, denn in $\overline{aa_1}$ steht a senkrecht auf dem Schnitt dieser Ebene mit der Ebene $\overline{b_1 c_1}$ und a_1 senkrecht auf ihrem Schnitt mit $\overline{bc}$. In den drei Ebenen $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$ und $\overline{cc_1}$ sind also senkrecht zu h Systemstrahlen vorhanden. Folglich ist die zu h normale Ebene $\varkappa$ eine Systemebene. Es sind nun im Strahlenbündel vier Systemstrahlen $abch$ vorhanden, deren Normalebenen $\overline{b_1 c_1}$, $\overline{a_1 c_1}$, $\overline{a_1 b}$ und $\varkappa$ Systemebenen sind. Man kann die vier Strahlen den vier dazu senkrechten Ebenen zuordnen, und erhält dadurch eine reciproke Beziehung, in der jedem Systemstrahl des Bündels eine zu ihm senkrechte Systemebene entspricht. Der Bündel ist demnach ein orthogonaler.

108. *Sind in einem Systembündel drei orthogonale Ebenenbüschel vorhanden, so ist der Bündel ein orthogonaler, sowohl wenn die Axen derselben in einer Ebene liegen, wie auch wenn sie es nicht thun.*

Sind in einem Systembündel zwei orthogonale Zonen vorhanden, so hängt es von ihrer Art und dem Winkel zwischen den Axen ab, ob der Bündel ein orthogonaler ist oder nicht. Stehen speciell die Axen f_1 und f_2 zweier orthogonalen Büschel aufeinander senkrecht, so sind die beiden Ebenen φ_1 und φ_2, welche zu f_2 bez. f_1 normal sind, Träger orthogonaler Systemstrahlenbüschel, denn sie sind Systemebenen, weil sie in den orthogonalen Büscheln f_1 bez. f_2 auf der Systemebene $\overline{f_1 f_2}$ senkrecht stehen und sie schneiden die orthogonalen Ebenenbüschel senkrecht zur Axe. Der symmetrische Strahl f'_1 von

f_1 bezüglich eines beliebigen Systemstrahles o in der Ebene φ_1 ist Axe eines orthogonalen Ebenenbüschels von derselben Art wie f_1, denn durch o und f_2 lässt sich eine Systemebene legen, zu der die Büschel f_1 und f_2 symmetrisch sind. In Folge dessen enthält die Ebene φ_1 unendlich viele Axen orthogonaler Ebenenbüschel, und der Bündel ist (nach Satz 108) ein orthogonaler. Der Fall, dass der Bündel zwei orthogonale Strahlenbüschel enthält, deren Ebenen auf einander senkrecht stehen, ist völlig identisch mit dem behandelten, denn die Normalen der Ebenen sind Axen orthogonaler Ebenenbüschel.

109. *Enthält ein Bündel zwei orthogonale Ebenenbüschel, deren Axen auf einander senkrecht stehen, oder, was auf dasselbe herauskommt, zwei orthogonale Strahlenbüschel, deren Axen aufeinder senkrecht stehen, so ist der Bündel ein orthogonaler.*

Wir haben ausser den orthogonalen Bündeln oben schon andere kennen gelernt, welche unendlich viele Paare senkrechter Systemebenen enthalten. Damit sind aber die Fälle dieser Art keineswegs erschöpft, und wir wollen kurz noch einen derselben behandeln. Es seien in dem Bündel zwei Strahlen a und b als Axen von Ebenenbüscheln gegeben. Wird für den Büschel a ein beliebiger krystallographischer Ebenenbüschel gewählt, so bilden auch die zu den Systemebenen desselben senkrechten Ebenen des Büschels b einen krystallographischen Ebenenbüschel. Diese beiden Ebenenbüschel würden den Bündel bestimmen, wenn ihre gemeinschaftliche Ebene $\overline{ab}$ in beiden Systemebene ist. Rechnet man die Ebene $\overline{ab}$ zum Büschel a, so folgt aus der Construction des Büschels b, dass auf ihr eine Systemebene des Büschels b senkrecht stehen muss, rechnet man sie zu b, so folgt aus demselben Grunde, dass auf ihr eine Systemebene des Büschels a normal ist. Wenn man also von einem beliebigen rhombischen Ebenenbüschel a ausgeht, in einer seiner ausgezeichneten Ebenen einen Strahl b annimmt, und bestimmt, dass die zu den Systemebenen von a senkrechten Ebenen von b Systemebenen sein sollen, so ist ein Systembündel bestimmt, da die Büschel a und b nicht miteinander in Widerspruch stehen, und in dem Bündel sind unendlich viele rhombische Ebenenbüschel vorhanden, deren Axen alle auf einem

orthogonalen Systemkegel liegen. Letzterer ist der Ort des Schnittes entsprechender Ebenen von a und b. Da die Ebene $\overline{ab}$ Symmetrieebene für die beiden Büschel ist, so ist auch der Bündel in Bezug auf sie symmetrisch und gehört also im allgemeinen zum monosymmetrischen System.

110. *Wird ein beliebiger rhombischer Ebenenbüschel a gegeben und ein beliebiger Strahl b in einer seiner ausgezeichneten Ebenen, so ist dadurch ein Systembündel bestimmt, in welchem auf jeder Systemebene des Büschels a eine Systemebene des Büschels b senkrecht steht. Die beiden Büschel a und b erzeugen als Schnitt einen orthogonalen Systemkegel, dessen Systemstrahlen Axen rhombischer Ebenenbüschel sind.*

In ähnlicher Weise kann man auch das reciproke Gebilde construiren. Es sei gegeben ein beliebiger ebener rhombischer Systemstrahlenbüschel α und eine Ebene β durch einen seiner ausgezeichneten Strahlen. Bestimmen wir, dass jeder Strahl von β, der auf einem Systemstrahl von α senkrecht steht, ein Systemstrahl sein soll, so ist hierdurch der besondere Bündel festgelegt.

111. *Wird ein beliebiger rhombischer Systemstrahlenbüschel α gegeben und eine Ebene β, welche durch einen seiner ausgezeichneten Strahlen geht, so ist durch diese ein Systembündel bestimmt, in welchem auf jedem Systemstrahl der Ebene des ersten Büschels ein Systemstrahl in der Ebene β senkrecht steht.*

Schluss.

Das wesentlichste Ergebniss der vorliegenden Untersuchung ist wohl der Nachweis, dass im krystallographischen Ebenenbündel neben den bisher allein berücksichtigten Ebenenbüscheln oder Zonen erster Ordnung, solche zweiter und höherer Ordnung vorkommen, welche wie die Zonen erster Ordnung unendlich viele krystallographische Elemente enthalten. Die Gesetze der Zonen höherer Ordnung schliessen sich, wenn sie auch complicirter sind, denen der gewöhnlichen Zonen aufs engste an.

Neben den Sätzen über die Zonen höherer Ordnung haben sich namentlich solche über orthogonale Elemente im krystallographischen Bündel ergeben, wir heben als besonders merkwürdig den Ebenenbündel mit zwei orthogonalen Zonen hervor.

Endlich wurde gezeigt, dass auch bei krystallographischen Untersuchungen und Constructionsaufgaben imaginäre Elemente verwendbar sind.

Die Leichtigkeit, mit der man die Geometrie der Lage bei der Behandlung krystallographischer Fragen anwenden kann, tritt auf dem vorliegenden Gebiete ebenso deutlich zu Tage, wie bei den früheren Untersuchungen. Die gegebenen Sätze sind wieder nur ein geringer Theil von denen, die man fast ohne Mühe ableiten kann, dürften aber als Anregung zu weiteren Forschungen dienen.

Berlin, Phys. Inst. d. Univ., Sommer 1891.

XI. *Untersuchungen über den Reibungscoefficienten von Flüssigkeiten; von C. Brodmann.*

(Nach seiner gleichnamigen Dissertation[1]) für die Annalen bearbeitet vom Verfasser.)

Die innere Reibung von Flüssigkeiten ist bisher wesentlich nach zwei von einander im Princip verschiedenen Methoden untersucht worden.

Die älteste und am häufigsten zur Anwendung gebrachte von den beiden ist die Ausflussmethode, nach welcher exacte Bestimmungen zuerst von Poiseuille gegeben sind.

Aus der Flüssigkeitsmenge, welche unter gegebenen Umständen in bestimmter Zeit durch eine Röhre strömt, wird hierbei auf die innere Reibung der Flüssigkeit geschlossen.

Geht man von den hydrodynamischen Differentialgleichungen für zähe Flüssigkeiten aus, so gelangt man unter Annahme cylindrischer Gestalt der Ausflussröhre zu Formeln, welche wenigstens für nicht zu kurze und zu weite Röhren den Resultaten der Beobachtung entsprechen.

Andererseits hat man Beobachtungen in der Weise angestellt, dass man entweder Hohlkörper, welche mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt waren, oder Scheiben, welche in dieselben eintauchten, drehende Schwingungen ausführen liess. Aus dem Decrement der Schwingungen und der Schwingungsdauer suchte man dann zu einem Maass der Zähigkeit zu gelangen.

Hier ist vor Allem die Methode der schwingenden Kugel zu erwähnen, welche theoretisch von Helmholtz, experimentell von Piotrowsky behandelt ist.

Ferner gehören hierher die Methoden der schwingenden Scheiben, nach welchen Coulomb, O. E. Meyer und Andere Untersuchungen angestellt haben.

Bei allen diesen Methoden ist eine strenge Herleitung der

---

1) C. Brodmann, Untersuchungen über den Reibungscoefficienten von Flüssigkeiten. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1891.

Formeln aus den Differentialgleichungen nicht möglich. Entweder werden, wie bei der Helmholtz'schen Untersuchung, die Glieder zweiter Ordnung der Differentialgleichungen vernachlässigt, oder man geht überhaupt nicht auf die Differentialgleichungen zurück, sondern baut die Theorie auf Annahmen über den kinematischen Charakter der Bewegung auf.

Trotz aller Vernachlässigungen aber führen diese Entwickelungen auf sehr complicirte Ausdrücke für die Reibungsconstante, und es ist zu bemerken, dass die schliesslichen Resultate weder unter einander, noch mit den Poiseuille'schen Werthen gut übereinstimmen.

So erscheint es denn wünschenswerth, die in Rede stehende Constante nach andern Methoden neu zu bestimmen, um so zur Aufklärung der vorhandenen Widersprüche beizutragen.

Es erscheint ferner eine Untersuchung über die Frage angezeigt, ob denn in der That die Reibungsconstante in den hydrodynamischen Differentialgleichungen als eine wirkliche Constante anzusehen ist, oder ob sie noch von der Geschwindigkeit abhängt.

Eine solche Abhängigkeit ist thatsächlich vermuthet worden.

Die Methoden, welche zur Untersuchung angewandt wurden, sind theoretisch nicht neu.

Die erste besteht darin, dass man die zu untersuchende Flüssigkeit in den Zwischenraum zwischen zwei concentrischen Kugeln bringt. Wird dann die äussere derselben in gleichmässige Rotation um ihren verticalen Durchmesser versetzt, so resultirt in Folge der Zähigkeit ein Drehmoment auf die innere Kugel. Kann man dieses messen, so kann man daraus die Grösse der Reibungsconstante bestimmen.

Die zweite Methode ist experimentell der ersten sehr ähnlich. Bei ihr befindet sich die Flüssigkeit zwischen zwei coaxialen Kreiscylindern, von denen wieder der äussere gleichförmig um seine Axe rotirt, während das auf den innern ausgeübte Moment gemessen wird.

Die erste Methode ist theoretisch im wesentlichen von Kirchhoff in dessen Mechanik[1]) behandelt worden. Experi-

1) Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik. Vorlesung 26.

mentell ist sie dann von Elie [1]) versuchsweise zur Bestimmung des Reibungscoefficienten von Wasser angewandt worden. Er glaubte aus seinen Versuchen auf jene erwähnte Inconstanz des fraglichen Coefficienten schliessen zu sollen, hat indessen die Untersuchung nicht zu Ende geführt, weil es ihm nicht gelang, die Rotation der äusseren Kugel gleichmässig genug zu machen.

Die zweite Methode ist zuerst von Margules [2]) entwickelt und zu Beobachtungen empfohlen worden. Auch nach ihr sind exacte Messungen bisher nicht angestellt.

Couette [3]) hat eine Reihe von Beobachtungen nach derselben beschrieben, doch ist die ganze Versuchsanordnung bei ihm für eine absolute Bestimmung der Reibungsconstante wenig geeignet.

Die Anregung zu der nachstehenden Untersuchung gab mir Hr. Prof. Voigt zu Göttingen, dem ich an dieser Stelle für sein warmes Interresse und seine freundliche Unterstützung meinen besten Dank ausspreche. Der gleiche Dank gebührt Hrn. Prof. K. Schering zu Darmstadt, in dessen Institut der grössere Theil der Beobachtungen angestellt wurde.

Was nun die zur Berechnung der späteren Beobachtungen nothwendigen Formeln anlangt, so ist zunächst im Falle der concentrischen Kugeln das Drehmoment, welches die innere Kugel erfährt, gegeben durch

$$\mu = 8\,a\,\pi\,k, \tag{1}$$

wo k den Reibungscoefficienten bedeutet. a ist eine Constante, welche sich verschieden ausdrückt, je nach dem Verhalten der Flüssigkeit an den Wandungen. Nimmt man an, die Flüssigkeit hafte an ihnen, so findet sich

$$a = \frac{\sigma_0}{\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_0^3}}, \tag{1'}$$

1) M. B. Elie, Variation du Coefficient de Viscosité avec la Vitesse. Journal de Physique S. II, T. I, p. 224. 1882.

2) Margules, Ueber die Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit. Wiener Berichte II. Abth., Bd. **83.** p. 588. 1881.

3) Couette, Journal de Physique S. II, T. IX, p. 414. 1890. Annales de Chimie et Phys. S. VI, Bd. **21.** p. 433. 1890.

wo σ_0 die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, mit der die äussere Kugel rotirt, R_1 den Radius der innern, R_0 den der äussern Kugel bezeichnet. Diese Formeln stimmen mit denen überein, welche Kirchhoff l. c. angibt. [1])

Die innere Kugel denken wir uns bifilar aufgehängt. Es bezeichne

m die gesammte am Bifilar hängende Masse, vermindert um die Masse der durch die innere Kugel verdrängten Flüssigkeit,

p, q den oberen und unteren halben Abstand der Bifilardrähte,

l die Länge des Bifilars,

g die Beschleunigung der Schwere,

γ den Torsionscoefficienten des Bifilardrahtes, bezogen auf die Längeneinheit,

φ den Ablenkungswinkel der inneren Kugel aus ihrer Gleichgewichtslage,

dann ist

$$\mu = \frac{m p q g}{l} \sin\varphi + \frac{2\gamma}{l} \cdot \varphi$$

oder, wenn wir den Ablenkungswinkel so klein nehmen, dass wir $\sin\varphi = \varphi$ setzen können:

$$\mu = \left(\frac{m p q g}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right) \cdot \varphi.$$

Nehmen wir für a seinen Werth aus Formel (1′), so erhalten wir

$$(2) \qquad k = \frac{1}{8\pi \cdot \sigma_0}\left\{\left(\frac{mpqg}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right)\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_0^3}\right)\right\}\varphi.$$

Zu bemerken ist hierbei, dass diese Formeln aus den Differentialgleichungen für reibende Flüssigkeiten, welche bekanntlich die Gestalt haben:

$$-\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + X = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{k}{\varepsilon} \Delta u.$$

sich nur dann ableiten, wenn man die Glieder 2. Ordnung $u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ etc. gegen die übrigen vernachlässigt. Bei den coaxia-

1) Vgl. auch des Verf. Dissertation, p. 5 ff.

len Cylindern erhält man ähnliche Formeln, welche sich aber im Gegensatz zu dem eben Angeführten streng aus den Differentialgleichungen herleiten lassen, sobald man unendlich lange Cylinder ins Auge fasst. Man findet hier für das Drehmoment, welches ein Abschnitt von der Höhe h des innern Cylinders erfährt, den Werth

$$(3) \qquad \mu = 4\pi a k h.$$

a bestimmt sich wieder verschieden, je nachdem man Haften oder Gleiten an der Wand annimmt.

Setzt man Gleiten voraus und sind innere und äussere Wandfläche gleichartig, so wird

$$(4) \qquad a = \frac{\lambda \sigma_0}{2k\left(\frac{1}{r_0^3} + \frac{1}{r_1^3}\right) + \lambda\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)}$$

wo σ_0 seine frühere Bedeutung hat, während r_1 den Radius des inneren, r_0 den des äussern Cylinders bezeichnet; λ ist der Gleitungscoefficient.

Haftet dagegen die Flüssigkeit innen und aussen, so wird

$$(5) \qquad a = \frac{\sigma_0}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}}$$

Diese Formeln setzen, um streng gültig zu sein, unendlich lange Cylinder voraus. Indess lassen sich dieselben durch geeignete Combination von Beobachtungen auf den Fall endlicher Cylinder anwendbar machen. Nimmt man für a seinen einfachsten Werth, so findet man aus zwei Beobachtungen, welche bei gleicher Drehgeschwindigkeit und gleichem Abstand der Bodenflächen der Cylinder, aber bei den Wasserhöhen h_1 und h_2 angestellt sind.

$$(6) \qquad \mu_1 - \mu_2 = \frac{4\pi(h_1 - h_2)\sigma_0 k}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}}.$$

Hier ist der Einfluss der Bodenflächen eliminirt.[1]) Der Innencylinder sei wieder bifilar aufgehängt. Die Bezeichnung sei der oben erklärten analog, nur dass mit m jetzt die an dem

1) S. Brodmann, l. c. p. 21 ff.

Bifilar hängende Masse ohne Abzug gemeint sein soll. ε die Dichte der Flüssigkeit, φ_1 und φ_2 seien die den Wass höhen h_1 nnd h_2 entsprechenden Ablenkungswinkel, σ_0 we ersetzt durch die Umdrehungszeit $t = \frac{2\pi}{\sigma_0}$. Dann wird

$$(7)\begin{cases} k = \left\{\left(\frac{mpqg}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right)(\varphi_1 - \varphi_2) - r_1^2 \frac{\pi\varepsilon pqg}{l}(h_1\varphi_1 - h_2\varphi_2)\right\} . T., \\ T = \frac{t\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)}{8\pi^2(h_1 - h_2)} \end{cases}$$

Wir wollen noch die entsprechenden Formeln für Fall ableiten, dass a nach der Gleichung (4) zu bestimmen

Dabei empfiehlt es sich mit Rücksicht auf die spät Anwendung in folgender Weise vorzugehen: Wir denken aus den Beobachtungen die Grösse k nach Formel (7) rechnet. Ist dann die dieser Formel zu Grunde liegende nahme eines Haftens der Flüssigkeit an der Wand nicht st haltig, so wird sich dies darin äussern, dass der Werth k keine Constante im eigentlichen Sinne ist, dass ders vielmehr variirt, sobald die Radien der Cylinder, mit de man beobachtet, anders gewählt werden.

Wir nehmen an, man habe mit zwei verschiedenen inn Cylindern beobachtet.

Nennen wir k_1 und k_2 die Werthe, welche man n Formel (7) aus diesen Versuchen berechnet hat, ferner $\mathfrak{k}$ eigentliche Reibungsconstante und setzen wir

$\mu_1 - \mu_2$ für den ersten Cylinder $= \nu_1$,
$\mu_1 - \mu_2$ für den zweiten Cylinder $= \nu_2$,
$h_1 - h_2$ für den ersten $= H_1$,
$h_1 - h_2$ für den zweiten $= H_2$,

$$\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} = d_{10}^2 \qquad \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_0^2} = d_{20}^2$$

$$\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r} = d_{10}^3 \qquad \frac{1}{r_2^3} + \frac{1}{r_0^3} = d_{20}^3$$

so erhalten wir

$$\nu_1 = \frac{8\pi^2 H_1 k_1}{d_{10}^2 t} = \frac{8\pi^2 H_1 \mathfrak{k} . \lambda}{(2\mathfrak{k} . d_{10}^3 + \lambda d_{10}^2)t}$$

$$\nu_2 = \frac{8\pi^2 H_2 k_2}{d_{20}^2 t} = \frac{8\pi^2 H_2 \mathfrak{k} . \lambda}{(2\mathfrak{k} . d_{20}^3 + \lambda . d_{20}^2)t}.$$

Dies gibt für $\mathfrak{k}$ und $\frac{\mathfrak{k}}{\lambda}$ zwei lineare Gleichungen, aus denen sich berechnet:

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{k} = \dfrac{k_1 k_2 (d_{10}^2 d_{20}^3 - d_{20}^2 d_{10}^3)}{d_{20}^3 d_{10}^2 k_2 - d_{10}^3 d_{20}^2 k_1} \\ \lambda = \dfrac{2 k_1 k_2 (d_{10}^2 d_{20}^3 - d_{10}^3 d_{20}^2)}{(k_1 - k_2) d_{10}^2 d_{20}^2}. \end{cases}$$

Um die im Vorstehenden theoretisch behandelten Methoden anwenden zu können, ist es vor allen Dingen nothwendig, einen Motor zu finden, mittels dessen man das äussere Gefäss in gleichmässige Rotation versetzen kann.

Bei den hier zu beschreibenden Versuchen kam ein *phonisches Rad* nach De la Cour zur Anwendung.

Um die Drehgeschwindigkeit des äusseren Gefässes variiren zu können, trieb man mit dem phonischen Rad zunächst eine hölzerne Rolle, welche Schnurläufe von verschiedenem Radius trug. Diese Rolle ihrerseits trieb dann das Gefäss. Dabei geschah die Uebertragung der Bewegung entweder durch Schnüre, oder durch eine dünne Kette.

Die Messung der Dauer einer Umdrehung geschah mit Hülfe eines als Chronograph fungirenden Morseapparates. Der Strom des letztern wurde von Secunde zu Secunde durch das Pendel einer Wanduhr geschlossen, und er schloss sich ferner, sobald das rotirende Gefäss eine bestimmte Stellung erreichte, indem dann ein mit dem Gefäss fest verbundener Platindrath durch eine Quecksilberkuppe streifte.

Der Chronograph wurde etwa eine Minute lang in Gang gehalten, und während dieser Zeit der Ablenkungswinkel des innern Körpers gemessen. Dann wurde mittels eines Glasmaassstabes die Lage zweier zu Anfang und zu Ende des erhaltenen Papierstreifens gelegener Marken zu den benachbarten Secundenmarken bestimmt und die dazwischen liegenden Secunden und Umdrehungen ausgezählt.

Die *Messung des Ablenkungswinkels* des innern Körpers geschah durch Ablesung mit Spiegel und Scala.

Der innere Körper war in allen Fällen bifilar aufgehängt. Bei den Kugeln war es wichtig, dem ganzen Bifilar kleine Hebungen und Senkungen ertheilen zu können und in allen

Fällen war es wünschenswerth, das untere Ende des Bifilars gegen verticale Verschiebungen in Folge von Temperaturänderungen möglichst zu schützen.

Um beide Zwecke zu erreichen war das obere Bifilarende in folgender Weise befestigt: die Messingbacken, welche die Drähte hielten, sassen an dem einen Ende eines um eine horizontale Axe drehbaren Hebels. Das dem Bifilar abgewandte Ende des Hebels war mit einem Gewicht beschwert, dessen Drehmoment grösser war, als das der grössten an das Bifilar zu hängenden Masse. Von dem Ende des Hebels, an welchem das Bifilar hing, führte ein Draht nach unten, wo er mit Hülfe einer Schraube angezogen werden konnte. Die Länge dieses Drahtes war so gewählt, dass der Hebel etwa horizontal stand. Anziehen oder Nachlassen der Schraube gab dann Senkung oder Hebung des Bifilars.[1])

Ausserdem war, wenn der erwähnte Draht aus demselben Material bestand, wie die Bifilardrähte, eine Höhenänderung des unteren Bifilarrandes in Folge von Temperaturschwankungen fast ganz ausgeschlossen. Denn wenn das Bifilar sich verlängerte, so verlängerte sich auch der Draht und da die Länge beider nahe gleich war, so muss das untere Ende des Bifilars fast genau in der alten Höhe verharren.

Zur Anwendung kamen in allen Fällen Messingdrähte, deren Durchmesser je nach der Schwere der Belastung von 0,1 mm bis 0,2 mm variirte.

Das *Drehmoment des Bifilars* wurde durch die Beobachtung von Schwingungsdauern in folgender Weise gemessen.

An das Bifilar wurde das Gestell eines zur Bestimmung der absoluten Horizontalintensität des Erdmagnetismus gebrauchten Magnetometer angehängt.

Dasselbe trug in der üblichen Weise Zapfen zum Aufsetzen von Zusatzgewichten, und zwar waren zwei Paar solcher Zapfen vorhanden. Der Magnet war durch einen Kupferstab ersetzt.

---

1) Die hier beschriebene Art der Befestigung des obern Bifilarendes ist einer im Königsberger physikalischen Institut gebräuchlichen nachgebildet, deren Kenntniss ich einer mündlichen Mittheilung des Hrn. Prof. Voigt zu Göttingen verdanke.

Aus den Schwingungszeiten, die man ohne Gewichte und mit den Gewichten in den beiden verschiedenen Stellungen beobachtet, kann man dann das Moment des Bifilars in bekannter Weise finden. Die erreichte Genauigkeit war eine sehr befriedigende.

Die Bestimmung der Radien der Kugeln und Cylinder geschah durch Wägung in Luft und Wasser. Bei den Cylindern wurde dann noch die Höhe mit dem Kathetometer gemessen.

Hohlkugel und Hohlcylinder wurden erst leer, dann mit Wasser gefüllt gewogen.

Die Kugeln waren aus Messing gefertigt und alle mit der Flüssigkeit in Berührung kommende Flächen waren vergoldet.

Die Hohlkugel von 3,0022 cm Radius war längs eines horizontalen grössten Kreises durchschnitten; die obere Halbkugel war ihrerseits noch einmal durch einen verticalen Schnitt in zwei Quadranten getheilt.

Sämmtliche Theile stiessen mit breiten Rändern aneinander und wurden durch Schrauben, welche diese Ränder aneinanderpressten, befestigt.

Die beiden oberen Quadranten umschlossen eine axiale cylindrische Oeffnung von 0,61 cm Durchmesser.

Unten sass die Kugel auf einer Stahlaxe auf, die in einer cylindrischen und einer konischen Führung lief. Sie endete in einer Spitze, die auf dem Kopf einer Schraube ruhte.

Auf die Axe wurde eine Messingrolle zur Aufnahme des treibenden Fadens gesteckt. Diese trug gleichzeitig den erwähnten Platinstift für den Quecksilbercontact.

Die innern Kugeln, deren drei von 1,5046, 2,0045 und 2,5024 cm Radius vorhanden waren, trugen in der Verlängerung eines Durchmessers einen Messingdraht von 0,26 cm Durchmesser, welcher durch die obere Oeffnung in der Hohlkugel hindurchgeführt und an den untern Messingbacken des Bifilars befestigt werden konnte.

Die Einfüllung der Flüssigkeit in den Apparat geschah in folgender Weise: Nachdem die obere Hälfte der Hohlkugel entfernt war, wurde soviel Wasser in die untere gegossen, dass nach Eintauchen der innern Kugel dieses bis zum Rand der untern Hälfte stand.

So wurde das Anhängen von Luftblasen an der untern Hälfte der innern Kugel vermieden.

Dann wurden die beiden oberen Quadranten aufgeschraubt, die Fugen mit Klebwachs gedichtet und nun mit einer Pipette durch die obere Oeffnung der Hohlkugel soviel Wasser nachgefüllt, bis die ganze Kugel und auch der Canal am oberen Ende derselben voll waren.

Es kam dabei leicht vor, dass die Bildung einer Luftblase in dem erwähnten Canal ein Ueberfliessen des Wassers verursachte, ehe die Kugel ganz gefüllt war.

Um hieraus etwa entspringende Irrthümer zu vermeiden, war aus den Dimensionen der Kugeln die zur Füllung nothwendige Wassermenge berechnet, so dass controlirt werden konnte, ob die Kugel thatsächlich bis oben gefüllt sei.

War die Füllung vollendet, so galt es, die beiden Kugeln concentrisch zu stellen.

Diese Einstellung wurde in der Weise erreicht, dass man nach dem Augenmaass die äussere Kugel mit ihrem Gestell so lange verschob, bis der Trägerdraht der innern Kugel in der Mitte des Canales der Hohlkugel erschien.

Dieser Draht trug in passender Höhe eine Marke, welche genau auf den oberen Rand des Canals durch Heben oder Senken des Bifilars eingestellt wurde. Die Marke war so angebracht, dass dann die Centren beider Kugeln gleiche Höhe hatten.

Bei den ersten Vorversuchen stellte es sich heraus, dass die so beschriebene Anordnung nicht gestattete, die Grösse der Drehgeschwindigkeit unbegrenzt wachsen zu lassen.

Während nämlich bei kleinen Geschwindigkeiten die innere Kugel sich thatsächlich nur um eine Verticalaxe drehte und sich bei einem bestimmten Ablenkungswinkel einstellte, resp. hier um eine Ruhelage regelmässige kleine Schwankungen ausführte, trat bei schnellerem Drehen ein „konisches Pendeln“ der Kugel und des ganzen Bifilars ein, so dass die erstere aus der concentrischen Stellung mit der Hohlkugel hinaus und nach dem Rande zu gedrängt wurde.

Die Beobachtungen wurden daher auf kleinere Geschwindigkeiten beschränkt.

Uebrigens änderte das Pendeln die Ablenkung nicht merk-

lich, so lange der Trägerdraht noch von der Canalwand frei war, und nur das Auf- und Niederschwanken der Scala uud die etwas unruhigere Einstellung zeigt an, dass es eingetreten sei.

Die Kugeln waren vor Beginn der Beobachtungen sorgfältig mit Kalilauge und Alkohol vom Fett befreit. Das angewandte Wasser war destillirtes und war unmittelbar vor den Versuchen frisch ausgekocht.

Als Temperatur der untersuchten Flüssigkeit musste die der umgebenden Luft angenommen werden, da sich ein Thermometer in die Hohlkugel nicht einführen liess.

Ausser den ausführlichen Beobachtungen mit Wasser wurde in genau der nämlichen Weise eine kurze Reihe von Versuchen mit Alkohol angestellt.

Der innere Cylinder war, wie die innere Kugel bifilar aufgehängt. Doch war die Suspension diesmal etwas anders angeordnet, als bei den Kugeln.

Es wurde einfach ein einziger Draht mit seinen beiden Enden in die auch bei den Kugeln benutzten oberen Messingbacken geklemmt und unten über eine leicht in Spitzen bewegliche Rolle von etwa zwei Centimeter Durchmesser geführt. Eine Gabel wurde durch die Axe dieser Rolle getragen und an dieser Gabel hing der innere Cylinder.

Wie die coaxiale Justirung der beiden Cylinder erreicht wurde, soll hier nicht näher auseinandergesetzt werden. Es wird in dieser Beziehung auf die Dissertation des Verfassers (p. 39) verwiesen.

Es standen ein Hohlcylinder und drei innere Cylinder zur Verfügung, welche, wie die Kugeln, aus Messing gefertigt und vergoldet waren.

Der Hohlcylinder hatte einen Radius von 2,8985 cm. Der Abstand zwischen seinem oberen Rand und der Grundfläche betrug 17,10 cm.

Die Radien und Höhen der drei innern Cylinder hatten folgende Werthe

$$r_1 = 1{,}4281 \text{ cm} \qquad h_1 = 14{,}321 \text{ cm}$$
$$r_2 = 1{,}9079 \text{ cm} \qquad h_2 = 14{,}321 \text{ cm}$$
$$r_3 = 2{,}4026 \text{ cm}. \qquad h_3 = 14{,}315 \text{ cm}.$$

Zur Bestimmung der Höhen, bis zu welchen die Flüssig-

keit am innern Cylinder emporreicht, wurden verschiedene Methoden zur Anwendung gebracht.[1] Am zweckmässigsten erwies sich schliesslich die des Auswägens der verwandten Flüssigkeitsmenge. Kennt man durch die Wägung deren Volumen, kennt man ferner den Bodenabstand der beiden Cylinder und deren Radien, so lässt sich die Höhe berechnen.

Ueber die Reinigung der Cylinder von Fett und über die Behandlung speciell des zur Beobachtung verwandten Wassers gilt das nämliche, was oben bei den Kugeln hierüber gesagt wurde.

In Betreff der die Resultate der Beobachtungen mit den Kugeln enthaltenden ausführlichen Tabellen sei wieder auf die Originalabhandlung verwiesen. Nur ein Satz möge als Beispiel hier Platz finden. Als innere Kugel wurde die kleinste vorhandene verwandt. A bedeutet den Scalenabstand, u den Ausdruck $\frac{\mu}{\varphi}$, n den auf Winkel reducirten einseitigen Ausschlag in mm, ϑ die mittlere Temperatur während der Beobachtungsreihe, k ist berechnet nach Formel (2). Dann war

$A = 2290$ $\log u = 3{,}14680$ $\vartheta = 19{,}7$

n	t	nt	σ_0	μ	k
15,8	3,19	50,5	1,97	4,82	0,0250
20,7	2,61	54,1	2,40	6,32	0,0269
30,4	1,94	59,0	3,24	9,31	0,0293
31,3	1,91	59,7	3,30	9,59	0,0296
39,1	1,61	63,0	3,90	12,0	0,0313
41,0	1,55	63,7	4,05	12,5	0,0316
51,4	1,32	67,5	4,78	15,7	0,0337
52,2	1,30	67,8	4,84	16,0	0,0337
67,7	1,08	72,9	5,83	20,7	0,0362
77,0	0,98	75,2	6,43	23,6	0,0374
89,0	0,88	78,2	7,14	27,2	0,0388
101,3	0,80	80,5	7,87	31,0	0,0402.

Die Formel, welche wir früher für μ aufgestellt haben zeigt, dass das Product $\varphi \cdot t$, also auch das Product $n \cdot t$ von der Drehgeschwindigkeit unabhängig sein soll. Diese Unabhängigkeit würde sich in derselben Weise aus den Formeln ergeben haben, wenn wir kein Haften, sondern ein Gleiten der Flüssigkeit an der Wand angenommen hätten.

Sehen wir nun hierauf die Columne $n \cdot t$ des vorstehenden Beobachtungssatzes durch, so zeigt sich ein höchst eigen-

1) S. Brodmann, l. c. p. 40 ff.

thümliches Resultat: die von der Theorie geforderte Constanz des Productes $n.t$ ist thatsächlich auch nicht angenähert vorhanden. nt zeigt vielmehr ein starkes Wachsen mit wachsender Drehgeschwindigkeit.

Dieses Resultat hat sich ausnahmslos in allen überhaupt angestellten Versuchsreihen wiederholt, gleichgültig, welche Kugel als innere verwandt, oder wie gering auch die Drehgeschwindigkeit gewählt wurde (t wurde in einzelnen Sätzen bis nahe 21″ gesteigert).

Um die Beobachtungen für ein und dieselbe Kugel sämmtlich mit einander vergleichbar zu machen, wurde dann σ_0 und μ berechnet, und die Curve $\mu = f(\sigma_0)$ construirt.

Man sieht aus der Figur, dass diese Curven, welche theoretisch gerade Linien durch den Anfangspunkt darstellen sollten, in Wahrheit eine ganz andere Gestalt haben, und dass namentlich für kleine Werthe σ die Curven sich durchaus nicht in ihrer Gestalt einer Geraden nähern.

Bei dieser Inconstanz von $n.t$ oder $\frac{\mu}{\sigma_0}$ kann natürlich auch k keinen constanten Werth bekommen. Es wächst vielmehr ebenfalls stark mit wachsender Geschwindigkeit.

Die Frage ist nun, woraus sich dieser Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung erklären lässt.

Dass zufällige Beobachtungsfehler die Ursache sein sollten ist unwahrscheinlich, schon des regelmässigen Verlaufes der

Curve $\mu = f(\sigma_0)$ wegen. Es wurde ferner direct versucht, ob Fehler in der concentrischen Justirung beider Kugeln einen merkbaren Einfluss hätten. Aber weder seitliche, noch verticale Excentricität zeigten einen solchen. In allen Fällen war nur eine grössere Unruhe der Einstellung, keine Aenderung des Ausschlages zu bemerken.

Temperaturveränderungen können ebenfalls nicht als Grund der Erscheinung angesprochen werden. Dieselbe blieb unverändert in ihrem allgemeinen Charakter, ob während der Dauer einer Beobachtungsreihe die Temperatur stieg oder fiel.

Auch der Verdacht, als handle es sich um Verunreinigungen, welche sich allmählich dem Wasser beigemischt und so seine Zähigkeit erhöht hätten, wurde durch passende Anordnung einer Beobachtungsreihe als grundlos nachgewiesen.

Die beobachtete Erscheinung kann ferner nicht darauf zurückgeführt werden, dass die Fäden des Bifilars etwa nicht gleichmässig gespannt gewesen seien.

Abgesehen von der Regelmässigkeit, mit welcher die Erscheinung bei den verschiedenen Bifilaren, mit denen beobachtet wurde, wiederkehrte, zeigt eine einfache Ueberlegung, dass, falls diese Erklärung zutreffend wäre, die Curve $\mu = f(\sigma_0)$ der Axe des σ_0 ihre concave Seite zuwenden müsste, während im Gegentheil ihre convexe Seite sich jener Axe zukehrt.

Endlich könnte man noch denken, die Reibung, welche der Trägerdraht der innern Kugel in dem mit Flüssigkeit gefüllten Canal der Hohlkugel erleidet, hätte die Erscheinung bedingt.

Aber einerseits hätte das dieser Reibung entspringende Drehmoment seinerseits der Drehgeschwindigkeit proportional sein müssen, könnte also mit der Abweichung des Gesammtmomentes von dieser Proportionalität nichts zu thun haben, und andererseits zeigt Rechnung und Beobachtung gleichmässig, dass der in Rede stehende Einfluss unmerklich war.

Durch Beobachtungsfehler erscheint hiernach der Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung nicht erklärlich.

Unsere Versuche bestätigen also das Resultat, welches Elie aus seinen Beobachtungen geschlossen hatte; die Methode der concentrischen Kugeln ergiebt keine constanten, sondern mit der Drehgeschwindigkeit wachsende Werthe für den Reibungscoefficienten k.

Daraus, dass die für gleiche Geschwindigkeit und verschiedene Kugeln gefundenen Werthe k nicht übereinstimmen, dürften wir unter diesen Umständen kaum berechtigt sein, weitere Schlüsse zu ziehen.

Beweisen nun unsere Versuche in der That, dass der in unseren Differentialgleichungen eingeführte Coefficient k von der Geschwindigkeit abhängt, oder mit anderen Worten, dass jene Differentialgleichungen, physikalisch betrachtet, falsch sind?

Elie schliesst in dem citirten Aufsatz in der That so. Es scheint mir aber, als sei der Schluss kein zwingender. Denn, wie wir in der theoretischen Entwickelung wiederholt betonten, sind die Formeln für die Kugelmethode nur unter gewissen Vernachlässigungen abzuleiten gewesen, und es erscheint die Frage berechtigt, ob denn nicht vielleicht die Inexactheit der Behandlung an dem Widerspruch zwischen Theorie und Experiment Schuld sei.

Die Wahrscheinlichkeit dieser Erklärung muss sehr vergrössert werden, wenn man sieht, wie bei dem ganz ähnlichen Experiment mit den Cylindern, welches exacte Herleitung der Formeln gestattet, die Widersprüche zwischen Theorie und Beobachtung fortfallen.

Auch für die mit den Cylindern erhaltenen Resultate soll hier nur ein kurzer Auszug aus den ausführlichen Tabellen der Originalabhandlung gegeben werden.

Vorher sind jedoch noch folgende Punkte hervorzuheben. Die Theorie, wie wir sie vorher auseinandergesetzt haben, nimmt an, es lägen zwei Beobachtungen bei der nämlichen Drehgeschwindigkeit und dem nämlichen Bodenabstand beider Cylinder, aber verschiedenen Wasserhöhen vor. Nun sind genau gleiche Werthe der Drehgeschwindigkeit bei zwei verschiedenen Beobachtungen kaum erreichbar. Deswegen sind bei zusammengehörigen Sätzen die Scalenausschläge des einen Satzes durch lineare Interpolation auf diejenigen Geschwindigkeiten corrigirt worden, bei denen die Beobachtungen des andern Satzes erhalten waren. Diese Correction erreichte übrigens niemals einen irgendwie erheblichen Betrag.

Zweitens ändert sich auch der Bodenabstand der Cylinder etwas von Satz zu Satz. Die Ursache hiervon ist der wech-

selnde Auftrieb, den der innere Cylinder erfährt und die hierdurch bedingte Dehnung oder Verkürzung der elastischen Bifilardrähte.

Um diesem Umstande Rechnung zu tragen, wurde unter gewissen vereinfachenden Annahmen eine Correctionsrechnung durchgeführt, auf deren Einzelheiten hier nicht eingegangen werden soll. Sie sind in der Originalabhandlung ausführlich erörtert. Die Verbesserung, die so an den Werth für k anzubringen ist, wird in der Tabelle durch δk bezeichnet, während k_0 den unverbesserten Werth dieses Coefficienten bedeutet. Endlich ist zu erwähnen, dass der Constanthaltung der Temperatur der Flüssigkeit während der Beobachtung besondere Sorgfalt gewidmet wurde.

Es stand ein Blechgefäss in der Gestalt eines Hohlcylinders zur Verfügung, in welches der rotirende Cylinder eingesetzt wurde, und welches denselben möglichst eng einschloss, ohne natürlich seine Drehung zu hindern. Dieses Blechgefäss wurde mit Wasser von 15° gefüllt. Die Beobachtungen wurden dann erst begonnen, wenn auch die zu untersuchende Flüssigkeit diese Temperatur angenommen hatte und während der Beobachtung wurde nöthigen Falls durch Zugiessen von kaltem Wasser oder durch Anwärmen mittelst eines Bunsenbrenners dafür gesorgt, dass die Temperatur des Wassers in dem Blechgefäss sich nicht wesentlich änderte.

So gelang es, die Temperaturschwankungen des untersuchten Wassers innerhalb enger Grenzen, etwa 0,4°, zu halten.

Zunächst wollen wir drei Sätze aus den Beobachtungen mit Wasser hier anführen, welche je einem der drei innern Cylinder entsprechen.

1. Kleinster Cylinder.

t	k_0	δk	k
13,039	0,01133	+ 0,00003	0,01136
6,987	0,01148	+ 0,00003	0,01151
4,743	0,01162	+ 0,00004	0,01166
3,574	0,01124	+ 0,00004	0,01128
2,923	0,01161	+ 0,00005	0,01166
$h_1 = 11{,}909$	$h_2 = 5{,}137$	ϑ_1 15,3	ϑ_2 14,85

2. Mittlerer Cylinder.

t	k_0	δk	k
13,008	0,01075	+ 0,00006	0,01081
6,916	0,01092	+ 0,00007	0,01099
4,703	0,01088	+ 0,00008	0,01096
3,553	0,01095	+ 0,00008	0,01103
2,889	0,01092	+ 0,00009	0,01101
h_1 = 11,417	h_2 = 7,288	ϑ_1 15,15	ϑ_2 14,95.

3. Grösster Cylinder.

t	k_0	δk	k
13,051	0,00977	+ 0,00002	0,00979
6,922	0,01004	+ 0,00002	0,01006
4,708	0,01006	+ 0,00002	0,01008
3,554	0,01019	+ 0,00002	0,01021
2,906	0,00989	+ 0,00003	0,00992
h_1 = 11,205	h_2 = 7,641	ϑ_1 15,07	ϑ_2 14,90.

Sehen wir diese Werthe von k durch, so fällt uns sofort der grosse Unterschied auf, den hier die Resultate gegen die bei den Kugeln erhaltenen zeigen:

k ist merklich von der Drehgeschwindigkeit unabhängig.

Die Schwankungen, die sein Werth zeigt, halten sich innerhalb enger Grenzen, so lange wir bei ein und demselben Cylinder bleiben und ein Fortschritt in einem bestimmten Sinne ist nicht zu bemerken.

Noch überzeugender, als der hier mitgetheilte kurze Auszug beweisen das die Originaltabellen.

Unter Benutzung der sämmtlichen Beobachtungen, insoweit sie als definitive anzusehen sind, berechnen sich für die den einzelnen Cylinder entsprechenden Mittelwerthe von k, sowie für die wahrscheinlichen Fehler dieser Mittelwerthe, wie sie sich unmittelbar aus den Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom Mittel ergeben, folgende Werthe:

1. für den kleinsten Cylinder

$$k_1 = 0{,}011317 \pm 0{,}000028;$$

2. für den mittleren Cylinder

$$k_2 = 0{,}011143 \pm 0{,}000038;$$

3. für den grössten Cylinder

$$k_3 = 0{,}010485 \pm 0{,}000049.$$

An diesen Werthen ist der folgende Umstand zu beachten: k nimmt ständig ab vom kleinsten bis zum grössten Cylinder, und zwar liegt der Betrag dieser Abnahme weit über den wahrscheinlichen Fehlern der Mittel.

Wir müssen uns fragen, ob vielleicht ein constanter Fehler die Beobachtungen mit den verschiedenen Cylindern verschieden beeinflusst haben kann, sodass dadurch sich die bemerkten Abweichungen erklären lassen.

Ein solch constanter Fehler könnte in der Bestimmung der Cylinderradien gesucht werden.

Um über die Wahrscheinlichkeit einer solchen Deutung ein Urtheil zu gewinnen, müssen wir den Einfluss untersuchen, den ein Fehler in der Bestimmung von r auf den schliesslichen Werth von k hat.

Es fragt sich vor Allem, wie genau die Bestimmung der r gewesen ist.

Nehmen wir an, die Wägungen seien auf 0,1 g genau ausgeführt, die Höhen der Cylinder auf 0,01 cm genau gemessen, so erhält man für die wahrscheinlichen Fehler der r folgende Werthe:

$$\delta r_1 = 0,00093 \qquad \delta r_2 = 0,00089$$
$$\delta r_3 = 0,00096 \qquad \delta r_0 = 0,00091.$$

Unter Berücksichtigung der Werthe für $\frac{\partial k}{\partial r}$ und δr, sowie unter Berücksichtigung der von den Fehlern der Radien unabhängigen sonstigen Unsicherheit des Werthes k, wie sie sich in den oben aus den Abweichungen vom Mittel berechneten wahrscheinlichen Fehlern dieser Grösse ausspricht, findet man für dieselben in den Beobachtungen mit den drei Cylindern folgende, nun auch die Fehler der Radien mit enthaltenden wahrscheinlichen Fehler:

1. für den kleinsten Cylinder

$$k_1 = 0,011317 \pm 0,000034;$$

2. für den mittleren Cylinder

$$k_2 = 0,011143 \pm 0,000043;$$

3. für den grössten Cylinder

$$k_3 = 0,010485 \pm 0,000058.$$

Dabei betragen die Differenzen der Werthe k für die einzelnen Cylinder:

$$k_1 - k_2 = 0{,}000174 \qquad k_1 - k_3 = 0{,}000832.$$

Wie man sieht, ist die Differenz der Werthe k bedeutend grösser, namentlich wenn man die Beobachtungen des kleinsten und grössten Cylinders combinirt, als die Summe der wahrscheinlichen Fehler. Wir müssen daraus schliessen, dass die Unsicherheit in der Bestimmung der Radien nicht hinreicht, die Abweichung der drei erhaltenen Werthe für k zu erklären.

Die Annahme einer Aenderung des bifilaren Drehmomentes ist ebenfalls ausgeschlossen. Denn es wurde bei den Beobachtungen unter den Cylindern abgewechselt und ein Satz des kleinsten Cylinders eröffnete und schloss die ganze Reihe.

Endlich ist auch die Erklärung abzulehnen, als handle es sich um Fehler in der Massenbestimmung der Cylinder.

So bleibt denn nur die Annahme eines Gleitens der Flüssigkeit an der Wand übrig und es ist jetzt die Aufgabe, den Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus unsern Beobachtungen zu ermitteln.

Wir haben früher schon die Formeln entwickelt, welche für diesen Fall uns gestatten, aus den oben angegebenen Werthen der Grösse k für die einzelnen Cylinder den Werth der beiden absoluten Constanten $\mathfrak{k}$ und λ zu finden.

Es empfiehlt sich mehr, diesen Weg einzuschlagen, als die fraglichen Grössen aus den directen Beobachtungen zu berechnen.

Denn, wie gleich gezeigt werden soll, bekommen Fehler in der Bestimmung des Ablenkungswinkels des innern Cylinders ein unverhältnissmässig grosses Gewicht, so bald man unter der allgemeineren Annahme $\mathfrak{k}$ berechnet, und noch in erhöhtem Maasse gilt dies von λ.

In den Mittelwerthen für k dagegen, wie wir sie oben angegeben haben, kann man mit einiger Sicherheit annehmen, dass die Fehler der Bestimmung des Ablenkungswinkels sich wenigstens zum grössten Theil ausgeglichen haben.

Die Genauigkeit, mit welcher so $\mathfrak{k}$ und λ zu berechnen sind, bleibt allerdings noch immer weit hinter derjenigen,

mit der unsere Methode gestatten würde, k zu finden, falls die Flüssigkeit an der Wand fest haftete.

So erhalten wir:

1. aus den Beobachtungen mit dem kleinsten und mittleren Cylinder

$$\mathfrak{k}_{12} = 0{,}01265 \pm 0{,}00049 \qquad \lambda_{12} = 0{,}2220 \pm 0{,}0692;$$

2. aus den Beobachtungen mit dem kleinsten und grössten Cylinder

$$\mathfrak{k}_{13} = 0{,}01228 \pm 0{,}00011 \qquad \lambda_{13} = 0{,}3001 \pm 0{,}0251.$$

Alle Werthe gelten für eine Temperatur von 15° Celsius und die Einheiten sind, wie in der ganzen Arbeit Centimeter, Gramm, Secunde.

Man sieht aus dem Vorstehenden, wie beträchtlich in $\mathfrak{k}$ und λ die wahrscheinlichen Fehler vergrössert sind gegen die der Werthe k.

Es liegt dies daran, dass in unserem Fall die Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial k}$ und $\frac{\partial \lambda}{\partial k}$, besonders die letzteren, äusserst beträchtliche Werthe annehmen. Da ein Fehler in der Bestimmung des Ablenkungswinkels in demselben Verhältniss in k eingeht, so beeinflussen derartige Fehler, wie oben schon betont ist, die Grössen $\mathfrak{k}$ und λ sehr viel bedeutender, als die Werthe von k.

Vergleichen wir die Differenz $\mathfrak{k}_{12} - \mathfrak{k}_{13}$ und $\lambda_{12} - \lambda_{13}$ mit den wahrscheinlichen Fehlern der $\mathfrak{k}$ und λ, so zeigt sich, dass dieselbe kleiner ist, als die Summe der wahrscheinlichen Fehler. Sie erklärt sich daher befriedigend aus den unvermeidlichen Unsicherheiten der Beobachtung.

Wir gehen nun zu einer Vergleichung unserer Resultate mit denen früherer Beobachter über.

Was zunächst die nach der Ausflussmethode bestimmten Werthe k anlangt, so ist zu bemerken, dass dieselben etwas kleiner sind, als der Werth, den wir gefunden haben.

Berechnet man aus der von Helmholtz[1]) nach Poiseuille

1) Helmholtz und Piotrowski: Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. Wien. Ber. Bd. 40. p. 607. 1860.

gegebenen Formel die Werthe von k für die Temperaturen 14°, 15° und 16°, so findet man:

$$k_{14} = 0{,}01174 \qquad k_{15} = 0{,}01143 \qquad k_{16} = 0{,}01114.$$

Der Werth für 15° unterscheidet sich von dem unsern um etwas weniger als 7 Proc. des letztern.

Dagegen sind die meisten der nach andern Methoden bestimmten Werthe k noch grösser als der unsrige.

So findet Helmholz aus den Beobachtungen von Piotrowski in unsern Einheiten

$$k = 0{,}01402 \text{ bei } 24{,}5^0.$$

O. E. Meyer[1]) berechnet aus Beobachtungen mit oscillirender Scheibe $k = 0{,}0132$ für 15,5° Celsius.

Es erscheint hier der Erwähnung werth, dass der Betrag von k_1, wie wir ihn unter Annahme eines Haftens der Flüssigkeit an den Wandungen aus den Beobachtungen mit dem kleinsten Cylinder gefolgert haben, fast genau mit dem Poiseuille'schen Werthe übereinstimmt.

Für den Coefficienten λ der Gleitung liegen sehr wenige ältere Angaben vor.

Helmholtz war der erste, der aus den Piotrowski'schen Beobachtungen den Schluss zog, dass bei der Bewegung von Wasser an vergoldeten Flächen ein Haften der Flüssigkeit an der Wand nicht anzunehmen sei.

Wie aber der Werth k, der aus jenen Beobachtungen folgt, grösser ist, als alle sonst gefundenen Werthe dieses Coefficienten, so übersteigt auch der Betrag der Gleitung denjenigen, den wir gefunden haben, bedeutend.

Zur Vergleichung bedient man sich hier bequem der Helmholtz'schen Grösse $\Lambda = \frac{k}{\lambda}$.

Aus unsern Werthen für $\mathfrak{k}$ und λ folgt

$$\Lambda = 0{,}0409 \text{ cm},$$

während Helmholtz giebt:

$$\Lambda = 0{,}2353 \text{ cm}.$$

1) O. E. Meyer, Crelle's Journal Bd. **59**. p. 229. 1861. Pogg. Ann. Bd. **113**. p. 55. 193. 1861.

Dagegen stimmt unser Werth merkwürdig gut mit demjenigen, den Helmholtz aus einer Beobachtung von Girard folgert.

Girard fand die Ausflusszeit von $^1/_4$ Liter Wasser von $0^0,5$ durch eine Kupferröhre von 1,83 mm Durchmesser und 1790 mm Länge zu 624,5 Secunden, wenn der Druck gleich dem einer Wasserhöhe von 100 mm war.

Helmholtz berechnet hieraus für Λ den Werth

$$\Lambda = 0,03984 \text{ cm.}$$

In einer neueren Arbeit[1]) wird die Gleitung von Wasser auch an Metall bestritten. Der Verfasser weist darauf hin, dass bei engen Röhren die Wassermenge, welche unter sonst gleichen Umständen ausfliesst, sehr beträchtlich grösser sein muss, wenn Gleiten stattfindet, als wenn die Flüssigkeit an den Wandungen haftet. Er stellt dann Beobachtungen mit engen Glasröhren an, die er später inwendig versilbert und weist nach, dass die Ausflussmenge sich nicht verändert hat.

Somit zeigt er, dass Wasser sich an Glas und Metall nicht verschieden verhält. Für Wasser an Glas ergeben aber Poiseuille's Beobachtungen unzweifelhaft ein Haften.

Indess ist doch hier wohl die Frage berechtigt, ob sich denn die Verhältnisse, die innerhalb solcher Röhren herrschen ohne Weiteres mit denen vergleichen lassen, die an der Wand unserer Cylinder vorliegen.

Einmal ist das Metall, an dem die Flüssigkeit sich bewegt in beiden Fällen verschieden.

Zweitens aber erscheint es doch sehr fraglich, ob der Silberüberzug in den Röhren eine der polirten Goldoberfläche unserer Cylinder entsprechende Glätte und Gleichmässigkeit besessen hat. Es ist sogar wahrscheinlich, dass dies nicht der Fall war. Denn erfahrungsgemäss ist bei der Versilberung von Glas auf nassem Wege die freie Silberoberfläche ursprünglich vollkommen matt und wird erst durch Poliren blank und glänzend.

Wir müssen ferner an dieser Stelle kurz auf die oben erwähnte Arbeit von Couette eingehen, in welcher nach der

---

1) Dampier-Wetham: On the alleged Slipping etc. Lond. Proceedings Vol. 48. p. 225. 1890.

hier geschilderten Methode die innere Reibung von Wasser und von Luft untersucht ist.

Wie schon bemerkt, eignen sich seine Messungen zur Berechnung absoluter Werthe für die Reibungsconstante nicht besonders.

Einmal war die Bestimmung des Drehmomentes, welches der innere Cylinder erfuhr, eine sehr rohe: es wurde durch das Gewicht bestimmt, welches nothwendig war um an bekanntem Hebelarm wirkend den Cylinder in seiner Ruhelage festzuhalten.

Allerdings ist dieser Nachtheil dadurch wieder ausgeglichen, dass die Radien der beiden Cylinder sehr gross, ihre Differenz sehr klein genommen wurde (es war $r_1 = 14{,}393$ cm, $r_0 = 14{,}640$ cm) wodurch das Drehmoment einen sehr beträchtlichen Werth erhält. Andererseits bedingt aber eine derartige Anordnung einen neuen, von Couette selbst hervorgehobenen Mangel: es erhalten kleine Fehler in der coaxialen Justirung der beiden Cylinder einen grossen Einfluss auf das Resultat. Die von Couette für excentrische Stellung entwickelte Näherungsformel zeigt, dass die Zunahme des Gesammtmomentes, ein und dieselbe absolute Excentricität beider Cylinder vorausgesetzt, indirect proportional ist dem Quadrat der Differenz der Cylinderradien, direct proportional dem Quadrate einer der Radien.

Ferner dürfte die Art, wie ein Einfluss von Bodenflächen vermieden wurde, theoretisch nicht ohne Bedenken sein und endlich wurde auf die bei der Couette'schen Versuchsanordnung nothwendig eintretende Reibung zwischen festen Theilen gar keine Rücksicht genommen.

Danach kann es kaum überraschen, wenn Couette einen bedeutend grösseren Werth für die Reibungsconstante erhält: er rechnet, da ihm nur ein Paar Cylinder zur Verfügung steht, von vornherein unter Annahme eines Haftens der Flüssigkeit an der Wand und findet $k = 0{,}01255$ für $16^0{,}5$, also einen noch etwas grösseren Werth, als ihn unsere Beobachtungen unter Annahme des Gleitens liefern.

Die Arbeit will aber auch gar keine absolute Bestimmung der Reibungsconstanten geben. Es handelt sich in ihr viel-

mehr um Untersuchung der Reynolds'schen Erscheinungen in anderer Form.

Reynolds[1]) hat bekanntlich für den Ausfluss von Wasser durch Röhren gezeigt, dass innerhalb ein und derselben Röhre je nach der Geschwindigkeit der Flüssigkeit zwei vollständig verschiedene Formen der Bewegung herrschen können.

Bei kleiner Geschwindigkeit ist die Bewegung „linear", dann tritt bei einer, vom Durchmesser der Röhre und der Zähigkeit der Flüssigkeit abhängigen „kritischen" Geschwindigkeit ein unstetiger Uebergang in eine andere „wellige" Form der Bewegung ein. Dieses selbe Verhalten hat Couette bei seinem Cylinder gefunden. Bei kleinen Geschwindigkeiten war das Moment der Drehgeschwindigkeit proportional. Bei einer Geschwindigkeit von 55 Drehungen in der Minute trat unstetiges Wachsen des Momentes ein und für weiter gesteigerte Geschwindigkeiten war das Drehmoment der Geschwindigkeit nicht mehr proportional.

Die Differenz der Cylinderradien erreichte bei unseren Beobachtungen sehr viel beträchtlichere Werthe als bei Couette. Die Drehgeschwindigkeit stieg bei uns ferner bis auf 40 Drehungen in der Minute. Obwohl man nun nach Analogie der Reynolds'schen Versuche erwarten sollte, dass die kritische Geschwindigkeit mit zunehmender Differenz der Cylinderradien abnähme, konnte bei unseren Versuchen eine Erscheinung, wie sie Couette beobachtet hat, nicht wahrgenommen werden.

Ausser mit Wasser wurden noch Beobachtungen mit Alkohol, Glycerin und Olivenöl angestellt.

Diese Beobachtungen können insofern noch nicht den Anspruch auf abschliessende Bedeutung erheben, als es nicht möglich war, bei ihnen die Werthe der Cylinderradien so zu variiren, dass die Frage ob Gleiten oder Haften anzunehmen ist, sich sicher beantworten liesse. Doch ist ein grösserer Betrag der Gleitung bei Alkohol durch die Piotrowski'schen Beobachtungen unwahrscheinlich gemacht und noch weniger dürfte man geneigt sein, bei Glycerin und Olivenöl, welche schon dem äusseren Augenschein nach den Wandungen

1) O. Reinolds: An experimental Investigation etc. Lond. Proceedings No. 224, Vol. 35.

viel fester anhangen als Wasser oder Alkohol, der Gleitung einen nennenswerthen Betrag zuzuschreiben.

Damit stimmt gut überein, dass der relative Werth, den frühere Beobachter nach der Ausflussmethode für Alkohol im Vergleich mit Wasser gefunden haben, fast genau den nämlichen Werth für den Coefficienten k für Alkohol ergibt, den man als Mittelwerth aus unseren Beobachtungen berechnet.

Setzt man den Reibungscoefficienten von Wasser gleich 100 so wird für Alkohol der Werth 119,5 angegeben. Legen wir nun für k und Wasser unsern Werth $k = 0{,}01228$ zu Grunde, so folgt für Alkohol $k = 0{,}01467$, während das Mittel aus unseren Beobachtungen $k = 0{,}01459$ gibt.

Für Glycerin und Olivenöl habe ich keine Werthe zum Vergleiche gefunden. Meine Beobachtungen geben im Mittel

1. für Glycerin $k = 2{,}3395$
2. für Olivenöl $k = 0{,}9890$.

Bemerkenswerth erscheint besonders, dass auch für die beiden letztgenannten zähen Flüssigkeiten unsere Beobachtungen eine Unabhängigkeit des Reibungscoefficienten von der Geschwindigkeit ergeben.

Werfen wir zum Schluss einen Rückblick auf die gewonnenen Resultate, so können wir dieselben in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Die Beobachtungen mit den concentrischen Kugeln bestätigen das von Elie gefundene Resultat, demzufolge die Versuche, nach der Kirchhoff'schen Formel berechnet, für k Werthe liefern, die zunehmen mit wachsender Drehgeschwindigkeit.

2. Dieses Verhalten ist indess auf das erwähnte Problem beschränkt. Die Cylindermethode, die im Gegensatz zu der erstgenannten, einer exacten theoretischen Behandlung zugängig ist, liefert für k constante Werthe.

3. Hiernach scheint sich die Ansicht von Margules zu bestätigen, nach der die Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung in den Differentialgleichungen, d. h. also der Producte aus den Geschwindigkeiten und ihren Differentialquotienten nach den Coordinaten unter Umständen auch für geringe Geschwindigkeiten zu Resultaten führen kann, die mit der Beobachtung in unvereinbarem Widerspruch stehen.

4. Der nach der Cylindermethode gefundene Werth des Reibungscoefficienten ist dem Poiseuille'schen Werthe näher als die meisten der nach andern Methoden gefundenen. Die Beobachtungen bestätigen das von Helmholtz gefundene Resultat, dem zufolge Wasser an vergoldeten Flächen nicht haftet, sondern gleitet.

5. Auch für sehr zähe Flüssigkeiten ist die Methode der Cylinder gut brauchbar und liefert mit der Theorie übereinstimmend, constante Werthe für den Reibungscoefficienten.

Darmstadt, Physikal. Inst., im November 1891.

XII. *Bemerkung zu der Erwiderung des Hrn. Pellat*[1]*; von Ferdinand Braun.*

Nach Hrn. Pellat folgt aus dem Ausbleiben eines Tropfstromes beim Eintropfen des Amalgames eines Metalls in die Lösung eines Salzes desselben Metalls, dass zwischen den beiden Flüssigkeiten *keine* Potentialdifferenz besteht.

Vom Standpunkt der Theorie aus ist dieser Schluss nicht bewiesen[2]; dass die Ansicht aber unrichtig sei, wurde in der folgenden Weise dargethan: Die Kette Cadmiumamalgam | CdJ_2 in Amyalkohol | CdJ_2 in Wasser | Cadmiumamalgam hat eine electromotorische Kraft von ca. 0,1 Volt (selbstverständlich mit den Concentrationen wechselnd). Nach Hrn. Pellat's Auffassung soll zwischen einem Metall und der Lösung eines seiner Salze keine Potentialdifferenz bestehen; die electromotorische Kraft des obigen Elements müsste sonach allein herrühren von der Potentialdifferenz zwischen den beiden Lösungen.

Nun wurde durch den Versuch gezeigt, dass beim Eintropfen der wässrigen in die alkoholische Jodcadmiumlösung *kein* Tropfstrom zu Stande kommt. Nach Hrn. Pellat's Meinung würde dies beweisen, dass zwischen diesen beiden Lösungen *auch* keine Potentialdifferenz besteht. Daraus ergäbe sich die Consequenz, dass es eine Kette von 0,1 Volt gibt, in welcher nirgends eine Potentialdifferenz herrscht, woraus dann weiter folgt, dass eine Auffassung, die zu solchen Consequenzen führt, offenbar nicht richtig ist.

Die Bemerkungen, welche Hr. Pellat zu diesen Versuchen macht, scheinen einem völligen Missverständniss entsprungen zu sein. Anders bleibt es ja unbegreiflich, wenn er einen Versuch als erst auszuführen angibt, der gerade in der angezogenen Arbeit angestellt worden ist und auf dem die Beweisführung beruht.

1) Pellat, Wied. Ann. **44.** p. 550. 1891.
2) Vgl. auch Planck, Wied. Ann. **44.** p. 418. 1891.

Hr. Pellat scheint die Versuchsanordnung, welche das Eintropfen der einen Lösung in die andere (durch eine Figur) darstellt, mit dem in Frage stehenden Element verwechselt zu haben. Dass auch bei dieser Anordnung Cadmiumelectroden benutzt wurden, ist ganz unwesentlich. Selbstverständlich rührte der Ausschlag am Electrometer von einer Ungleichheit der Electroden her; aber Hr. Pellat hätte bemerken sollen, dass die Grösse dieses Ausschlags am Electrometer völlig bedeutungslos ist und es lediglich darauf ankommt, ob beim Eintropfen der wässrigen in die alkoholische Lösung eine Aenderung dieses Ausschlages (0,1 Volt entsprechend) eintritt.

Ich habe diesen Ausschlag gern zugelassen, weil er einem immer die Garantie für eine genügende Leitung des Stromkreises bietet; dass Cadmiumamalgame je nach ihrer Concentration electromotorisch verschieden wirksam sind, hatte ich auf der vorhergehenden Seite hervorgehoben. Dass bei der Messung der Kette, auf welche es ankommt, dies berücksichtigt ist, möchte ich jetzt noch ausdrücklich bemerken. —

Wenn Hr. Pellat schliesslich meint, dass das Eintropfen eines flüssigen Amalgames in eine Salzlösung ein Vorgang ganz anderer Art sei, als das Eintropfen einer Salzlösung in eine zweite, mit der ersten nicht mischbare, dann allerdings wäre dem Versuch die Beweiskraft genommen und hätte es keiner weiteren Erörterung bedurft. Für eine solche Unterscheidung müsste aber Hr. Pellat bessere Gründe vorbringen, als den, dass eine alkoholische Jodcadmiumlösung mit Wasser geschüttelt Salz an dieses abgibt. Denn verlangt wird nur, dass die Flüssigkeiten eine Capillarconstante gegen einander haben; und eine solche war vorhanden, wie ohne Weiteres aus der Bildung scharf begrenzter Tropfen hervorgeht. —

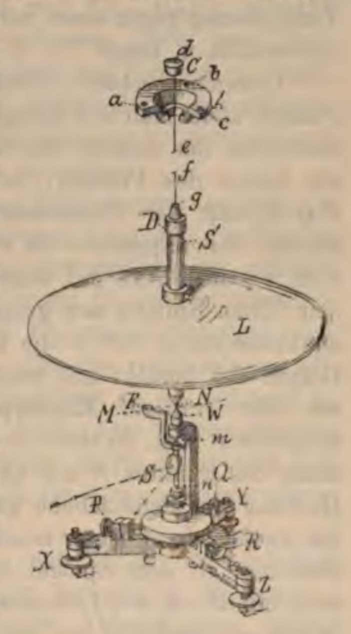
Auf einige weitere Ansichten, welche Hr. Pellat mir zuschiebt und welche freilich höchst sonderbar wären, wenn sie nicht einem Missverständnisse von Seiten des Hrn. Pellat entsprungen wären, glaube ich nicht eingehen zu sollen.

Tübingen, November 1891.

XIII. *Foucault'sches Pendel und Apparat zur Objectivprojection des Foucault'schen Pendelversuchs; von M. Th. Edelmann.*

(Aus dem physikal.-mech. Institut von Dr. M. Th. Edelmann in München.)

An der Zimmerdecke des Hörsaales wird das hohl-konische Lager *A* mit drei Holzschrauben *a b c* ein für allemal befestigt; in dasselbe passt ein Stahlzapfen *C*, welcher der Deutlichkeit halber in der nebenstehenden Abbildung *über* dem Lager *A* steht. Das Innere von *A* ist durch das Fehlen (*a* bis *c*) eines Drittels vom Rotationskörper zugänglich, sodass man den Zapfen *C*, an welchem das Pendel hängt, sehr leicht einsetzen und nach beendigtem Experimente ebenso leicht alles wieder entfernen kann.



Das Loch im (gehärteten) Stahlzapfen ist in jener eigenthümlichen Trichterform gearbeitet, welche man von den Löchern der Draht-Zieheisen kennt. Als Suspensionsdraht *d e f g* verwendet man einen Messingdraht, der zunächst noch ein wenig dicker ist, als das Loch in *C*; durch dieses wird er gezogen und zwar in der Richtung von *d* nach *g*; man lässt dabei ein kleines Ende bei *d* übrig, welches breitgeklopft wird, damit der Draht nicht durchschlüpfen kann, wenn die schwere Pendellinse an ihm hängt. Auf diese Weise hergestellt, erhält man ein tadelloses Gehänge für das Foucault'sche Pendel; selbstverständlich kann der Suspensionsdraht, wie er auch schon aus der Werkstätte dem Instrumente beigegeben wird, beliebig oft benutzt werden, wenn man ihn vor Knickung schützt. Am anderen Ende des

Drahtes erhält die Schraubenmutter D durch Einschieben des Drahtes in das Loch g und Breitklopfen des vorstehenden Endes die gleiche Befestigung wie bei d.

An die Mutter D wird der Stahlbolzen NS angeschraubt. Letzterer endigt bei N in eine scharfe konische Spitze und trägt die schwere Linse L aus Gusseisen. Bis hierher unterscheidet sich die Vorrichtung nicht wesentlich von den bisher verwendeten Apparaten und kann damit wie sonst gebräuchlich experimentirt werden: man zeigt die Drehung der Pendelebene mit Hülfe der Spitze N, z. B. durch Schreiben in Sand, Veränderung gegen einen vorher gezogenen Kreidestrich, durch Russschrift u. dergl.

Objectivprojection. Genau vertical unter die Ruhelage des Pendels stellt man den Spiegelapparat auf; dies geschieht durch Einstellen der axialen Messingspitze W genau und nahe unter die Spitze des Pendels: mit Hülfe der Correctionsschrauben $P\,Q\,R$ und der Fussschrauben $X\,Y\,Z$. Der Haupttheil an diesem Nebenapparate ist eine ausserordentlich leicht bewegliche verticale Axe mit dem Spiegel S. Diese Axe ist zwischen den feinen Spitzen $m\,n$ gelagert und trägt einen Seitenarm M aus Aluminium, der in die kurze Eisenschneide F endigt. Der Bolzen SN besteht aus gehärtetem Stahl und die Spitze N ist ein sehr kräftiger Magnetpol. Schwingt dieselbe über die Schneide F weg, so stellt sich letztere immer genau unter die Bahn des Punktes N ein und es macht also die Axe $m\,n$ die Drehung der Pendelebene ganz exact mit, ohne dass das Pendel irgend wie in seiner freien Bewegung gestört würde. Durch Reflexion an dem Spiegel S, der an der Axe $m\,n$ sitzt, kann man mit Hülfe von Lichtquelle, Spalt und Linse auf bekannte Weise ein Spaltbild auf eine weisse Fläche werfen. Da sich durch die Spiegelung der Drehwinkel verdoppelt, so sieht man schon auf einem nur vier Meter entfernten Schirm bei jeder einzelnen Pendelschwingung das Fortrücken des Spaltbildes; d. h. es beschreibt in unseren Breiten unter solchen Verhältnissen das Spaltbild in 5 Minuten einen Weg von 11 cm.

München, physikal.-mech. Institut, 1891.

XIV. *Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. W. Böhlendorff zu meiner Abhandlung über den Molekularzerfall in Lösungen; von B. Walter.*

Im Anschluss an meine Messungen[1]) der Intensität des Fluorescenzlichtes mehrerer Substanzen in verschieden concentrirten Lösungen hatte ich in der von Hrn. Böhlendorff[2]) angegriffenen Abhandlung[3]) eine grössere Reihe von Thatsachen angeführt, welche mir sämmtlich den Schluss zu unterstützen schienen, dass bei mehreren solcher Stoffe die gelösten Moleküle je nach dem Grade der Verdünnung in verschiedenen Gruppirungszuständen zu existiren vermögen.

Eine der überzeugendsten dieser Erscheinungen schien mir die zu sein, dass z. B. bei den wässrigen Lösungen des fluorescemsauren Ammoniaks das Absorptionsvermögen der gelösten Substanz gerade auch nur in denjenigen Concentrationsstufen constant bleibt, in denen auch das Fluorescenzvermögen sich als Constante erweist — es waren dies die verdünnteren Lösungen von ungefähr 0,02 Proc. Salzgehalt ab, — während in den concentrirteren Lösungen, in denen das Fluorescenzvermögen mit zunehmender Concentration zuerst allmählich und dann immer schneller abnimmt, auch das Absorptionsvermögen ähnliche Unregelmässigkeiten zeigt.

Diese Thatsachen waren von mir durch eine grössere Zahl von photometrischen Messungen festgestellt, Messungen, die zum Theil auch in den erwähnten Abhandlungen aufgeführt sind[4]) und die natürlich in erster Linie in Betracht kommen, wenn es sich um weitere Folgerungen aus jenen Thatsachen handelt. Bei seinen Angriffen gegen meine Folgerungen erwähnt jedoch Hr. Böhlendorff diese Messungen überhaupt nicht, sondern beschäftigt sich ausschliesslich mit

1) B. Walter, Wied. Ann. **34.** p. 316. 1888 u. **36.** p. 502. 1889.
2) W. Böhlendorff, Wied. Ann. **43.** p. 784. 1891.
3) B. Walter, Wied. Ann. **36.** p. 518. 1889.
4) B. Walter, Wied. Ann. **36.** p. 512. 521. 1889.

einigen anderen meiner Absorptionsbeobachtungen, deren Charakter ein wesentlich qualitativer war und die auch hauptsächlich nur zur bequemeren Auffindung derartiger Molekularunterschiede, nicht aber zur endgültigen Entscheidung darüber angeführt wurden.

Allerdings gebe ich zu, dass zu solcher Auffindung die von Hrn. Böhlendorff angewandte Beobachtungsmethode als eine Verbesserung der meinigen anzusehen ist, und dass auch die von mir angegebenen Halbschattenbeobachtungen sich danach etwas modificiren; indessen kann dies den oben angegebenen Kern der Sache durchaus nicht berühren, und sogar die Versuche des Hrn. Böhlendorff lassen denselben, soweit es eben von ihnen zu erwarten ist, klar durchblicken. Nach ihnen bleibt nämlich, wenn man die verschiedenen Concentrationen des Fluoresceïns und Magdalaroths in gleichwerthigen Schichten untersucht, der Rand der totalen Absorption *für die vollkommenen Lösungen constant, für die Halblösungen dagegen nicht* — und so bestätigen diese Beobachtungen also gerade das, was sie umstossen sollten.

Hamburg, im November 1891.

XV. *Zur Abhandlung: „Ueber das Gesetz der elastischen Dehnung" von Joseph Osgood Thompson; von Andreas Miller.*

Im Heft 11, Jahrgang 1891 dieser Annalen p. 555, hat Hr. Thompson unter obigem Titel eine Arbeit über elastische Dehnung veröffentlicht, in der er beweist, dass das gewöhnlich angenommene Verlängerungsgesetz, wonach die Dehnung eines Drahtes der Belastung proportional sein soll, nur eine Annäherung ist. In dieser Abhandlung nimmt Thompson u. A. mehrfach auch auf frühere meiner Arbeiten über Elasticität Bezug. Einige Resultate derselben liefern ihm eine Bestätigung seiner dargelegten Anschauungen.

Hr. Thompson meint aber, nur Stradling habe die Frage bezüglich der nur annäherungsweisen Richtigkeit der Proportionalität zwischen elastischer Dehnung und Belastung zur Sprache gebracht. Er sagt: „Auch Miller sucht zu zeigen, dass die elastische Dehnung der Kraft proportional sei. Meines Wissens hat bis jetzt Jeder für selbstverständlich gehalten, dass das alte Gesetz giltig sei, und es ist nie versucht worden, dasselbe einer strengen Kritik zu unterziehen."

Thompson citirt hierzu meine im Hefte 4. Jahrgang 1882 der Sitzungsberichte der math.-physik. Klasse der k. bayr. Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Arbeit. Es ist richtig, während dieser ersten Arbeit über Elasticität stand ich noch ganz und gar im Banne des alten Elasticitätsgesetzes. Aber schon bei einer späteren Forschungsarbeit: „Ein Beitrag zur Kenntniss der Molecularkräfte" [1]) dämmerte in mir der Zweifel an der Genauigkeit des Gesetzes, was aus § 4 und § 48 hervorleuchten dürfte. Das Gleiche gilt von einer weiteren Arbeit von mir: „Der primäre und secundäre longitu-

---

1) A. Miller, Sitzungsber. d. math.-phys. Klasse d. k. bayr. Akademie d. Wissensch. 1. 1885.

dinale Elasticitätsmodul und die thermische Constante des Letzteren.“ [1])

Eine noch spätere Arbeit aber: „Ueber die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elasticitätsmoduls“ [2]) beschäftigt sich mit demselben Gegenstand, wie die Arbeit des Hrn. Thompson. Ziff. 8 der Zusammenstellung der Ergebnisse (§ 26) dieser Abhandlung lautet: „Selbst im Zustande temporärer vollkommener Elasticität befolgen die Körper das Proportionalitätsgesetz nicht genau.“ Ziff. 9 sagt dann aus, dass mit zunehmender Mehrbelastung der Elasticitätsmodul abnimmt, ein Ergebniss, mit dem das des Hrn. Thompson übereinstimmt. Im übrigen verweise ich auch auf § 2 und § 15 dieser Abhandlung.

Ich habe also schon vor etwa fünf Jahren das alte Gesetz über die Elasticität nicht mehr für selbstverständlich gehalten und es auch einer eingehenden Kritik unterzogen. Hrn. Thompson ist beim Studium der einschlägigen Litteratur die letzterwähnte Abhandlung von mir offenbar entgangen gewesen.

München, December 1891.

1) A. Miller, Abhandlungen d. k. bayr. Akademie d. Wissensch. II. Klasse. **15.** 3. Abth. 1886.

2) A. Miller, Abhandlungen d. k. bayr. Akademie d. Wissensch. II. Klasse. **16.** 3. Abth. 1888.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1892. ANNALEN № 2.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLV.

I. *Die Lösungswärme einiger Salze in Wasser von 0°; von R. Scholz.*

Für die Thermodynamik ist die Kenntniss der Lösungswärme von Salzen von grossem Interesse. Genauere Messungen derselben stellte zuerst Person[1]) an, indem er die Abhängigkeit der Lösungswärme einiger Salze in Wasser von der Temperatur, bei welcher er die Lösung der Salze vornahm, bestimmte. Seine Beobachtungen führten ihn zu der Formel:

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \left(\frac{c+p}{p+1} - k\right)(p+1)(t_2 - t_1),$$

worin λ_1 und λ_2 die Wärmemengen sind, welche absorbirt werden, wenn 1 g Salz in p g Wasser bei der Temperatur t_1 bez. t_2 gelöst wird, und c und k die specifischen Wärmen des Salzes bez. der Lösung bezeichnen.

Die Abhängigkeit der Lösungswärme von der Concentration der Lösung untersuchte Winkelmann[2]) sehr eingehend an sechs Salzen und stellte sie durch Interpolationsformeln dar.

Hauptsächlich um den Einfluss der molecularen Zusammensetzung der Salze auf ihre Lösungswärme kennen zu lernen, bestimmte Thomsen[3]) die Lösungswärme einer grossen Anzahl von Salzen bei Zimmertemperatur.

So genau und sorgfältig die erwähnten Beobachtungen ausgeführt sind, so haben sie doch den Nachtheil, dass nicht die gesuchten Wärmemengen selbst, sondern die durch den Auflösungsprocess hervorgerufenen Temperatur-

1) **Person**, Ann. de chim. et de phys. (3) **33.** p. 449. 1847.
2) **Winkelmann**, Pogg. Ann. **149.** p. 1. 1873.
3) **J. Thomsen**, Thermochemische Untersuchungen.

änderungen gemessen und aus diesen erst die Lösungswärmen berechnet wurden. Zu dieser Berechnung ist die Kenntniss der specifischen Wärme des Wassers und der Lösung erforderlich. Beide sind wohl vielfach untersucht, aber meist sehr abweichend von einander bestimmt worden, so dass die mit ihrer Hilfe berechneten Wärmemengen nicht die Sicherheit gewähren, welche für die theoretischen Untersuchungen verlangt wird.

Eine Möglichkeit, die Wärmemengen, welche beim Lösen eines Salzes auftreten, direct zu messen, bietet das Eiscalorimeter von Bunsen, indem man die Lösung im Calorimeter selbst vor sich gehen lässt. Allerdings kann mit diesem Apparat nicht die Frage nach der Abhängigkeit der Lösungswärmen von der Temperatur beantwortet werden, wohl aber diejenige nach der Abhängigkeit von der Concentration. Da das Eiscalorimeter kleine Wärmemengen mit Genauigkeit zu messen gestattet, so war insbesondere die Möglichkeit gegeben, zu untersuchen, bei welchen Graden der Verdünnung die Lösungswärmen constant, also die Verdünnungswärmen Null werden.

Diese Frage zu entscheiden ist gerade jetzt von erhöhtem Interesse, denn die Theorie van't Hoff's über den osmotischen Druck von Salzlösungen gilt nur für solche Verdünnungen bei denen die Verdünnungswärmen Null sind.

Die Anregung zu Versuchen nach dieser Richtung hinverdanke ich Hrn. Prof. Dieterici. Es sei mir gestattet, ihm sowie Hrn. Prof. Kundt hier für die Unterstützung, die sie mir vielfach bei meinen Untersuchungen zu Theil werden liessen, den verbindlichsten Dank auszusprechen.

Nach Abschluss meiner Beobachtungen veröffentlichte Staub[1]) seine Untersuchungen über Lösungswärmen von drei Salzen nach der Eiscalorimetermethode.

Die Ausführung meiner Versuche geschah mittelst eines Eiscalorimeters, das im allgemeinen die von Bunsen angegebene Form hatte, dessen Abmessungen jedoch möglichst vergrössert wurden. Das innere Glasgefäss A zur Aufnahme der Salzlösung hatte einen lichten Durchmesser von 2,5 cm und

1) G. Staub, Inaug.-Diss., Zürich 1890.

war etwa 22 cm tief in den äusseren Glascylinder *B* von 6 cm Weite eingeschmolzen.

Das nach Bunsen vorgerichtete Calorimeter wurde nach der verbesserten Methode von Schuller und Wartha[1]) in ein Glasgefäss mit destillirtem Wasser gestellt, das vorher an den Wänden des Gefässes zum Gefrieren gebracht worden war und mit zerkleinertem, aus destillirtem Wasser hergestelltem Eise überschüttet wurde. Ein gut schliessender Zinkdeckel schützte das Ganze vor fremden Beimischungen.

Das Glasgefäss mit dem destillirten Wasser befand sich in einem Zinkkasten und war von allen Seiten sorgfältig mit Eis bepackt. Zur Erhaltung einer möglichst constanten und niedrigen äusseren Temperatur wurde der soweit fertiggestellte Messapparat in einem Eisspinde untergebracht.

In den dünnen, mit Quecksilber gefüllten Schenkel des Glascylinders *B* wurde mittelst eines guten Schliffs eine zweimal rechtwinklig gebogene Glasröhre *a* fest eingefügt, deren anderes, freies Ende eine Saugspitze mit birnförmiger Erweiterung bildete und in ein enges Glasgefäss mit Quecksilber tauchte.

Durch halbstündliches Wechseln und Wägen unter die Saugspitze gesetzter Quecksilberfläschchen ergab sich, dass nach einiger Zeit die Bewegung des Quecksilbers in der Röhre *a* stationär geworden war; es wurden halbstündlich 9,8—11,1 mgr Quecksilber eingesogen. Es fand also ein gleichmässiges, schwaches Abthauen des Eismantels im Calorimeter statt. Um dasselbe möglichst zu verringern, wurde die Saugspitze tiefer gelegt, und dadurch das Einsaugen von Quecksilber auf halbstündlich 4 mg herabgesetzt.

Die Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt: Eine gewogene Quantität reinen Wassers wurde nahezu auf 0° abgekühlt und in das vorher gut gereinigte und getrocknete Glasgefäss *A* gebracht. Hierauf wurde an einem dünnen Seidenfaden ein Gläschen mit einer bestimmten Menge des zu lösenden Salzes in das Gefäss *A* und zum Theil in das darin befindliche Wasser hinabgesenkt. Der Seidenfaden sowie ein Rührer wurden durch 2 Pfropfen, mit denen *A* und die darüber

1) Schuller u. Wartha, Wied. Ann. 2. p. 359. 1877.

befindliche Oeffnung im Zinckdeckel verschlossen wurden, hindurchgeführt und festgeklemmt. Mit dem Lösen des Salzes im Wasser wurde solange gewartet, bis beides sowie Gläschen und Rührer die Temperatur 0° angenommen hatten, was meist schon nach einer Stunde der Fall war. Sobald der Temperaturausgleich im Innern des Calorimeters stattgefunden hatte, wurde mittelst des Rührers das Gläschen mit dem Salz ins Wasser hinabgedrückt und das Lösen und gleichmässige Vertheilen des Salzes im Wasser durch Umrühren mit dem Rührer und Heben und Senken des Gläschens am Seidenfaden beschleunigt. Gewöhnlich war schon nach 20—30 Minuten das Lösen vollendet, und der Wärmeaustausch im Calorimeter erfolgt.

Das Gewicht des als Lösungsmittel benutzten Wassers wurde auf 0,1 g genau bestimmt; nur bei den concentrirteren Lösungen war eine sorgfältigere Bestimmung erforderlich.

Die acht untersuchten Salze wurden vor dem Gebrauch pulverisirt und im Trockenkasten eine halbe Stunde auf 125° erhitzt mit Ausnahme von $CuSO_4 + 5H_2O$, welches zwischen Fliesspapier getrocknet wurde.

Als Rührer diente ein Glasfaden von etwa 1 mm Durchmesser, an dessen einem Ende ein kreisrundes Platinblech von 0,8 cm Radius senkrecht zur Axe des Glasfadens befestigt war. Das Rühren geschah immer in möglichst gleicher Weise. Die dadurch dem Calorimeter zugeführte Wärme wurde durch besondere Versuche gemessen und bedingte für die einzelnen Messungen eine Correction von 2—10 mg Quecksilber.

Bei den concentrirteren Lösungen wurde die Lösungswärme nicht direct gemessen, sondern die beim Verdünnen der betreffenden Lösung auftretende Wärmetönung, und aus ihr und der Lösungswärme der verdünnten Lösung die der concentrirteren berechnet. Es geschah deshalb, weil einerseits bei nahezu gesättigten Lösungen das vollständige Auflösen des Salzes nur sehr langsam erfolgt und andererseits durch die bedeutende Kälteentwicklung der Eismantel um *A* zu sehr verstärkt worden wäre. Durch vergleichende Versuche zeigte es sich überdies, dass die so berechnete Lösungswärme mit der direct gemessenen gut übereinstimmte.

Die Ausführung der Versuche geschah in derselben Weise

wie bei den Lösungswärmen, nur dass an Stelle des Salzes im Gläschen eine gewogene Menge Salzlösung von der Concentration trat, für die die Lösungswärme bestimmt werden sollte.

Das was wir als Lösungswärme bezeichnen und allein messen können, ist die Wärmemenge, welche Salz und Wasser von gleicher Temperatur während des Lösungsprocesses oder nach demselben von den sie umgebenden Körpern aufnehmen oder an sie abgeben müssen, damit die Lösung dieselbe Temperatur besitze wie vorher Salz und Wasser. Bei den acht von mir untersuchten Salzen wird zum Lösen in Wasser bei 0° Wärme verbraucht. Den durch den Lösungsprocess im Calorimeter eintretenden Wärmeverbrauch liefert die am Eismantel befindliche Wasserschicht, indem sie zum Gefrieren gebracht wird. Als Eis nimmt sie einen grösseren Raum ein und treibt eine entsprechende Quecksilbermenge durch die Saugspitze in das untergesetzte Quecksilberfläschchen. Das Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers gibt uns das in Eis umgesetzte Wasserquantum, bez. die dadurch frei gewordene und an die Lösung abgegebene Wärmemenge. Ueber die Beziehung zwischen ihr und der ausgestossenen Quecksilbermenge geben uns die Beobachtungen von Bunsen[1]), Schuller und Wartha[2]) und Velten[3]) genauen Aufschluss. Nimmt man als Wärmeeinheit die sogenannte mittlere Gramm-Calorie an, d. h. den hundertsten Theil derjenigen Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 g Wasser von 0° auf 100° zu erwärmen, so entspricht der Zufuhr einer Wärmeeinheit an das Calorimeter ein Einsaugen von

15,41 mg Hg nach Bunsen,
15,44 „ Hg „ Schuller u. Wartha,
15,47 „ Hg „ Velten.

Der Mittelwerth aus diesen Zahlen 15,44 mg Hg ist bei den folgenden Berechnungen der Lösungswärme als die einer Wärmeeinheit entsprechende Quecksilbermenge angenommen worden.

1) Bunsen, Pogg. Ann. **141.** p. 1. 1870.
2) Schuller u. Wartha, Wied. Ann. **2.** p. 359. 1877.
3) Velten, Wied. Ann. **21.** p. 13. 1884.

In den folgenden Tabellen I—V sind die Beobachtungsresultate zusammengestellt und zwar in I und III die Einzelbeobachtungen für NaCl, in II und IV für die übrigen Salze die Mittelwerthe aus je zwei bis vier Einzelbeobachtungen.

Es sei in Tabelle I und II:

w das Gewicht des zur Lösung des Salzes benutzten Wassers;

s das Gewicht des gelösten Salzes;

n der Salzgehalt der Lösung in Gramm-Aequivalenten im Liter Wasser; das zur Berechnung von $n = \frac{1000 \cdot s}{m \cdot w}$ benutzte Aequivalentgewicht m ist neben der chemischen Formel des betreffenden Salzes angegeben;

Hg die beim Lösen des Salzes ausgeflossene Quecksilbermenge mit Einschluss der anzubringenden Correctionen;

q die Hg entsprechende Wärmemenge in mittleren Gramm-Calorien;

L die auf 1 g Salz berechnete Wärmemenge, die sogenannte Lösungswärme.

Die Tabellen III und IV enthalten die beim Verdünnen einer Lösung beobachteten Wärmeabsorptionen und die daraus berechneten Lösungswärmen.

s und q behalten die frühere Bedeutung;

w_1 sei die Wassermenge, in der s vor dem Hineinbringen ins Calorimeter gelöst wurde;

w_2 diejenige, mit der die Lösung im Calorimeter verdünnt wurde;

$$n_1 = \frac{1000 \cdot s}{m \cdot w_1}, \quad n_2 = \frac{1000 \cdot s}{m\,(w_1 + w_2)};$$

Hg die beim Verdünnen der Lösung ausgeflossene Quecksilbermenge, einschliesslich der anzubringenden Correctionen;

$$V = \frac{q}{s};$$

L_1 die zu n_1 gehörige, gesuchte Lösungswärme;

L_2 die dem Normalgehalt n_2 entsprechende, aus Tabelle I—II entnommene Lösungswärme.

Tabelle V gibt eine Zusammenstellung aller beobachteten Lösungswärmen bezogen auf 1 g Salz.

Tabelle I.

Na Cl, m = 58,5.

w	s	n	Hg	q	L
g	g		mg		
70,0	0,2567	0,0627	128,8	8,34	32,5
70,0	0,2550	0,0623	131,1	8,49	33,3
70,0	0,2558	0.0625	128,6	8,33	32,6
70,0	0,2557	0,0624	133,9	8,67	33,9
		M = 0,0625			M = 33,07
70,0	0,5117	0,1250	261,3	16,93	33,08
70,0	0,5123	0,1251	264,9	17,16	33,49
70,0	0,5130	0,1253	263,5	17,07	33,27
70,0	0,5125	0,1252	262,3	17,00	33,18
		M = 0,1251			M = 33,25
70,0	1,023	0,2498	514,3	33,31	32,56
70,0	1,023	0,2498	516,5	33,45	32,70
70,0	1,026	0,2505	517,6	33,53	32,68
70,0	1,023	0,2498	514,6	33,33	32,58
70,0	1,026	0,2505	520,3	33,70	32,85
70,0	1,025	0,2503	512,3	33,18	32,37
		M = 0,2501			M = 32,62
70,0	2,0492	0,5004	963,5	62,40	30,45
70,0	2,049	0,5004	969,7	62,80	30,65
70,0	2,050	0,5006	971,7	62,93	30,70
		M = 0,5005			M = 30,60
50,1	2,928	0,999	1221,9	79,14	27,03
49,7	2,908	1,0003	1217,8	78,87	27,16
49,7	2,907	1,000	1221,4	79,10	27,11
		M = 1,000			M = 27,13
49,7	5,816	2,000	1894,7	122,71	21,10
49,7	5,816	2,000	1890,3	122,43	21,05
49,7	5,814	2,000	1876,2	121,52	20,90
		M = 2,000			M = 21,02
20,4	4,804	4,025	978,1	63,35	13,19
20,7	4,810	3,972	980,6	63,51	13,20
20,6	4,811	3,992	979,8	63,46	13,19
		M = 3,996			M = 13,19

Tabelle II.

w	s	n	Hg	q	L
g	g		mg	cal.	cal.
Cl m = 74,6					
49,7	0,2318	0,0625	256,4	16,60	71,59
49,7	0,4652	0,1254	512,0	33,17	71,29
49,7	0,9295	0,2507	1016,7	65,85	70.84
49,7	1,8597	0,5016	1998,0	129,4	69,58
49,7	3,720	1,003	3845,4	249,05	66,94
20,05	2,985	1,996	2912,2	188,62	63,19

	w	*s*	*n*	*Hg*	*q*	*L*
	g	g		mg	cal.	cal.
$NaNO_3$ m = 84,9						
	49,7	0,2642	0,0626	285,2	18,475	69,93
	49,7	0,5275	0,1250	558,2	36,15	68,53
	49,7	1,0561	0,2502	1083,7	70,20	66,46
	25	2,125	1,001	1927,4	124,83	58,74
KNO_3 m = 100,9						
	49,7	0,3168	0,0632	457,5	29,63	93,54
	49,7	0,6330	0,1262	908,8	58,86	92,97
	49,7	1,2663	0,2525	1773,4	114,86	90,11
	49,7	2,533	0,5051	3421,5	221,60	87,49
$\frac{1}{2}(CuSO_4 + 5\,H_2O)$ m = 124,4						
	49,7	0,7738	0,1251	162,5	10,52	13,60
	49,7	1,5465	0,2501	319,7	20,70	13,38
	49,7	3,0959	0,5007	620,3	40,18	12,98
	49,7	6,1922	1,0015	1208,4	78,27	12,64
$\frac{1}{2}K_2SO_4$ m = 87,0						
	49,7	0,2702	0,0625	202,6	13,12	48,57
	49,7	0,540	0,125	402,5	26,06	48,26
	49,7	1,0796	0,2497	784,3	50,80	47,06
	49,7	2,160	0.500	1505,6	97,51	45,14
KJ m = 165,6						
	49,7	0,5137	0,0624	279,5	18,10	35,24
	49,7	0.0287	0,125	563,2	36,48	35,46
	49,7	2,0567	0,250	1105,9	71,76	34,82
	49,7	4,1144	0,500	2152,2	139,39	33,88
KBr m = 118,8						
	49,7	0,3685	0,0624	277,9	18,00	48,83
	49,7	0,7384	0,1251	556,5	36,05	48,82
	49,7	1,4757	0,250	1110,0	71,90	48,72
	49,7	2,952	0.500	2171,8	140,66	47,64

Tabelle III.

s	w_1	w_2	n_1	n_2	*Hg*	*q*	*V*	L_2	*l*
g	g	g			mg	cal.		cal.	ca
1,871	7,993	23,77	4,001	1,007	402,7	26,08	13,94	27,09	13,
0,880	15,01	45,03	1,002	0,2507	76,1	4,93	5,60	32,61	27.
2,103	6,100	29,89	5,893	0,999	581,1	37,63	17,89	27,14	9
2,803	8,135	39,92	5.890	0,997	776,8	50,31	17,95	27,15	9
4,208	12,191	23,96	5,900	1,990	780,4	50,54	12,01	21,08	9
5,262	14,987	29,94	6.002	2,002	982,5	63,63	12,09	21,01	8
		M =	5,921					M =	9

Tabelle IV.

s	w_1	w_2	n_1	n_2	Hg	q	V	L_2	L_1
g	g	g			mg	cal.		cal.	cal.
KCl									
4,200	15,58	40,62	3,603	1,002	562,0	36,40	8,67	66,95	58,28
$NaNO_3$									
0,957	7,515	52,5	1,501	0,1879	184,0	11,92	12,46	67,40	54,94
4,057	12,01	36,0	3,999	1,000	979,5	63,44	15,57	58,75	43,18
4,072	6,006	42,0	7,99	1,000	1472,4	95,36	23,42	58,75	35,33
KNO_3									
0,764	15,00	45,0	0,505	0,126	64,5	4,18	5,47	92,97	87,50
1,273	12,62	37,4	1,000	0,2526	171,1	11,09	8,71	90,71	82,00
1,656	12,54	52,4	1,309	0,2526	290,8	18,82	11,37	90,71	79,34
$\frac{1}{2}(CuSO_4 + 5H_2O)$									
3,110	10,03	40,0	2,494	0,500	75,9	4,91	1,58	12,98	11,40
4,976	16,02	24,0		1,000	83,1	5,38	1,08	12,64	11,56
$\frac{1}{2}K_2SO_4$									
1,016	11,986	34,75	0,974	0,250	78,3	5,07	4,99	47,06	42,07
1,708	20,04	18,4	0,980	0,511	77,9	5,05	2,95	45,06	42,11
KBr									
0,743	12,50	37,5	0,500	0,125	14,0	0,91	1,23	48,82	47,59
1,484	12,51	37,5	0,998	0,250	61,4	3,98	2,68	48,72	46,04
1,486	6,26	40,6	2,000	0,268	127,4	8,26	5,56	48,94	43,08
1,497	3,15	47,25	3,995	0,250	224,5	14,55	9,72	48,72	39,00
KJ									
2,068	12,60	37,55	0,991	0,249	72,80	4,71	2,28	34,82	32,54
1,656	10,00	30,00	1,000	0,250	58,60	3,80	2,30	34,82	32,52
2,069	6,245	43,75	2,001	0,250	157,8	10,22	4,94	34,82	29,88
3,138	9,50	28,45	1,995	0,500	193,8	12,55	4,00	33,88	29,88
2,957	4,463	31,25	4,001	0,500	358,3	23,53	7,96	33,88	25,92
1,646	2,484	37,25	4,001	0,250	220,8	14,30	8,68	34,82	26,14
1,994	1,607	46,60	7,49	0,250	386,1	25,01	12,54	34,82	22,28
3,359	2,704	37,85	7,50	0,500	620,8	40,21	11,97	33,88	21,91
1,427	1,151	33,40	7,48	0,249	222,3	34,76	12,81	34,82	22,01
1,274	12,53	37,5	1,008	0,2528	171,3	11,10	8,72	90,71	81,99
1,272	12,71	37,3	0,992	0,2524	170,9	11,07	8,70	90,71	82,01
			M = 1,000						M = 82,00

Tabelle V.

n	NaCl	KCl	$NaNO_3$	KNO_3	$\frac{1}{2}(CuSO_4 + 5H_2O$	$\frac{1}{2}K_2SO_4$	KJ
0,0625	33,07	71,59	69,93	93,55	—	48,57	35,24
0,125	33,25	71,29	68,53	92,99	13,60	48,26	35,46
0,25	32,62	70,84	66,46	90,75	13,38	47,06	34,82
0,5	30,60	69,59	—	87,55	12,98	45,14	33,88
0,977	—	—	—	—	—	42,09	—
1,0	27,13	66,95	58,75	82,00	12,64	—	32,52
1,3	—	—	—	79,42	—	—	—
1,5	—	—	54,95	—	—	—	—
2,0	21,02	63,18	—	—	—	—	29,88
2,5	—	—	—	—	11,48	—	—
3,6	—	58,29	—	—	—	—	—
4,0	13,18	—	43,18	—	—	—	26,03
6,0	9,00	—	—	—	—	—	—
7,5	—	—	—	—	—	—	22,06
8,0	—	35,31	—	—	—	—	—

Die Fehlergrenze der angeführten Lösungswärmen lä sich schwer bestimmen, weil hierbei eine ganze Reihe, we auch meist geringer Fehlerquellen in Betracht kommen, w die Bestimmung der Constanz des Calorimeters und der dur das Rühren bedingten Correction, Ungleichmässigkeiten in d Beschaffenheit des Salzes, besonders hinsichtlich der Trocke heit, Ungenauigkeiten beim Wägen des Quecksilberfläschche und von Wasser und Salz. Die dadurch entstehenden Fehl sind mehr oder weniger, zum Theil auch gar nicht von d gelösten Salzmenge abhängig. Die in der gemessenen Wärm menge q auftretenden constanten und langsamer als die gelös Salzmenge s anwachsenden Fehler werden $L = q/s$ um so me beeinflussen, je kleiner s ist. Fehler in q aber, die s propo tional sind, werden in L für jede Concentration als constan Fehler auftreten. L wird also um so ungenauer sein, je ve dünnter die Lösung ist.

Abgesehen von etwaigen einseitigen Beobachtungsfehle kann man ein annähernd richtiges Urtheil über die Grös der möglichen Fehler der in Tabelle V gegebenen L dadur gewinnen, dass man sie mit den ursprünglichen L vergleicl aus denen sie als Mittelwerthe bestimmt sind. Die hierl auftretenden Differenzen zeigen, dass im allgemeinen für mi lere und stärkere Concentrationen die Unsicherheit nahe gleich gross ist, aber kaum zwei Einheiten der ersten De

malen überschreiten wird, dass dagegen bei verdünnteren Lösungen von $n = 0{,}25$ an die Unsicherheit erheblich wächst und wohl auch 0,5 Calorien betragen kann.

Die folgende Tabelle VI enthält eine Zusammenstellung der von mir beobachteten Lösungswärmen mit denen anderer Beobachter.

Winkelmann bestimmte Lösungswärmen zwischen 0° und 60° und berechnete aus ihnen die Lösungswärmen für $t = 0°$ nach der oben erwähnten Person'schen Formel. Ihre Abhängigkeit von der Concentration stellte er durch Interpolationsformeln dar. Aus diesen berechnete ich die Lösungswärmen in Tabelle VI.

Die von Thomsen bei Zimmertemperatur gemessenen Lösungswärmen rechnete ich nach der Person'schen Formel auf solche bei 0° um. Für das in ihr vorkommende k, die specifische Wärme der Lösung, benutzte ich, die von Thomsen selbst gegebenen Werthe.

Von Hrn. Staub wurden die Lösungswärmen mit einem Eiscalorimeter gemessen. Die Abhängigkeit derselben von der Concentration geben je 2 Versuchsreihen. Aus jeder von beiden berechnete ich durch Interpolation die gesuchten Lösungswärmen und multiplicirte das Mittel aus je 2 zusammengehörigen Werthen mit 15,261 : 15,44 = 0,9884, dem durch Quecksilbergewicht gegebenen Verhältniss der von ihm und mir gewählten Wärmeeinheiten.

Tabelle VI.

	n	Scholz	Winkelmann	Differenz
NaCl	0,5	30,60	27,31	3,29
	1	27,13	23,71	3,42
	2	21,02	19,79	1,23
	4	13,18	13,12	0,06
	6	9,00	8,62	0,38
KCl	0,5	69,59	66,68	2,91
	1	66,95	63,88	3,07
	2	63,15	60,47	2,68
	3,6	58,29	56,41	1,88
$NaNO_3$	1	58,75	58,22	0,53
	1,5	54,95	55,13	— 0,18
	4	43,18	43,42	— 0,24
	8	35,31	34,84	0,47

	n	Scholz	Winkelmann	Differenz
KN_3 O	0,25	90,75	90,54	0,21
	0,5	87,55	85,19	2,36
	1	82,00	81,51	0,49
	1,3	79,42	79,30	0,12

	n	Scholz	Thomsen	Differenz
NaCl	0,277	32,45	30,86	1,59
KCl	0,277	70,55	71,24	— 0,69
$NaNO_3$	0,277	66,02	65,93	0,09
KNO_3	0,277	90,52	93,22	— 2,70
NJ	0,277	34,72	35,02	— 0,30
KBr	0.277	48,54	48,64	— 0,10

	n	Scholz	Staub	Differenz
NaCl	0,5	30,60	27,48	3,12
	1	27,13	24,37	2,76
	2	21,02	19,58	1,44
	4	13,18	13,07	0,11
	6	9,00	8,18	0,82
KNO_3	0,25	90,75	89,31	1,44
	0,5	87,55	84,20	3,35
	1	82,00	78,90	3,10
	1,3	79,42	74,92	4,50
$\frac{1}{2} K_2SO_4$	0,154	48,02	48,02	0
	0,25	47,06	46,22	0,84
	0,5	45,18	41,91	3,27
	0,958	42,19	36,73	5,46

Diese Zusammenstellung von Lösungswärmen weisst eine nur mangelhafte Uebereinstimmung auf. Die Differenzen sind oft ganz erheblich grösser als sie nach den beiderseitig gegebenen Beobachtungsfehlern auch im ungünstigsten Falle sein dürften.

Für die Unterschiede mit den von Thomsen und Winkelmann erhaltenen Lösungswärmen liesse sich wohl in der vollständigen Verschiedenheit der angewandten Methoden und der Unsicherheit und Unbestimmtheit der zu Grunde gelegten Wärmeeinheit eine Erklärung finden. Denn nach der von Winkelmann und Thomsen angewandten Mischungsmethode werden nur die durch das Lösen des Salzes hervorgerufenen Temperaturerniedrigungen bestimmt und aus ihnen mit Hilfe einer Reihe bisher noch nicht genau genug bestimmter physikalischer Constanten die verbrauchten Wärmemengen und daraus erst die

ärmen für $t = 0^0$ berechnet. Diese Berechnung von ärmen für $t = 0^0$ aus den bei höheren Temperaturen en, geschieht mittelst der oben erwähnten Person'-eichung:

$$\Lambda = \lambda + \left(\frac{c+p}{1+p} - k\right)(p+1)t.$$

Herleitung derselben aus thermodynamischen Prinschieht unter der Voraussetzung, dass die specifische les Wassers constant ist. Es ist jedoch sicher, dass nit der Temperatur ändert.

ıun die specifische Wärme des Wassers merklich abın der Temperatur, so ist $(c+p)t$ in der Person'-eichung etwa durch $(c+\gamma p)t$ zu ersetzen, denn 1 g p g Wasser geben bei Abkühlung von t^0 auf 0^0 die enge ct und γpt ab, worin c und γ die mittleren en Wärmen des Salzes und des Wassers zwischen 0^0 einer festen Einheit bedeuten.

er Ungenauigkeit, die man dadurch begeht, dass man t und $= 1$ setzt, tritt noch bei Winkelmann eine ıeit in der Berechnung von k. Es werden in der en Person'schen Gleichung:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \left(\frac{c+p}{1+p} - k\right)(1+p)(t_2 - t_1)$$

$_2$ durch ihre Werthe $k_1\,\alpha_1\,(p+1)$ und $k_2\,\alpha_2\,(p+1)$ wo α_1 und α_2 die beim Lösen von 1 g Salz in ser von der Temperatur t_1 bez. t_2 eingetretenen urerniedrigungen, k_1 und k_2 die mittleren specifischen der Lösung im Temperaturintervall α_1 bez. α_2 be-k_1, k_2 und k, die mittlere specifische Wärme der wischen t_1 und t_2, werden einander gleichgesetzt und der obigen Gleichung erhaltene Näherungswerth für k Berechnung von λ und Λ benutzt. Jedenfalls aber ı k ebensowohl, wie die specifische Wärme des Wasıbhängig von t ansehen. Für $NaNO_3$-Lösungen beıch Winkelmann k als lineare Function von t und ei diesem Satze findet die beste Uebereinstimmung ron mir beobachteten Lösungswärmen statt.

Da $(c + p)/(p + 1)$ und k besonders bei verdünnten Lösungen nur sehr wenig von einander verschieden sind, so wird schon ein kleiner Fehler, veranlasst durch die Annahme der Constanz für die specifische Wärme von Wasser und Lösung, in einem der beiden Bestandtheile, die in der Gleichung für Δ vorkommende Differenz $(c + p)/(p + 1) - k$ und somit auch Δ selbst sehr ungünstig beeinflussen, sodass die Differenzen zwischen den von Winkelmann und mir beobachteten Lösungswärmen hauptsächlich dadurch zu erklären sein dürften.

Die Gleichung

$$\Delta = \lambda - \left(\frac{c + p}{1 + p} - k\right)(p + 1)t$$

bleibt selbstverständlich streng giltig, sobald man in einem einzelnen Falle die mittlere specifische Wärme zwischen 0° und t^0 als Wärmeeinheit wählt und Δ, λ, c und k entsprechend bestimmt.

Die von Thomsen in der Nähe von 18° für $n = 0{,}277\ldots$ beobachteten und von mir mittelst der Person'schen Formel für $t = 0^0$ umgerechneten Lösungswärmen stimmen besser mit meinen Beobachtungen überein. Die Abweichungen liegen fast gleichmässig nach beiden Seiten hin, auch dann noch, wenn man die von Thomsen benutzte Wärmeeinheit um etwa 1 Proc. kleiner annimmt als die mittlere Calorie zwischen 0° und 100° und dementsprechend die Thomsen'schen Lösungswärmen zum Vergleich mit meinen Werthen vermindern würde.

Am grössten sind die Abweichungen zwischen den von Hrn. Staub und mir beobachteten Lösungswärmen, trotzdem die Beobachtungsmethode dem Princip nach in beiden Fällen dieselbe war und die beiderseits zu Grunde gelegten Wärmeeinheiten in einem genau angebbaren Verhältnis zu einander stehen und infolge dessen einen strengen Vergleich ermöglichen. Die Differenzen sind hier so gross, dass man jedenfalls auf einer Seite ganz erhebliche einseitige Beobachtungsfehler annehmen muss.

In Bezug auf die theoretischen Folgerungen, welche aus den mitgetheilten Beobachtungen fliessen, verweise ich auf die folgende Arbeit.

Berlin, Physik. Institut, 1891.

. *Theorie der Lösungswärme und des osmotischen Drucks; von C. Dieterici.*

1. Die auf den folgenden Seiten enthaltenen Betrachtungen :hliessen sich unmittelbar an diejenigen an, welche ich in einer letzten Arbeit [1]) mitgetheilt habe. Durch eine Methode, elche gestattete, sehr kleine Drucke zu messen, war dort der influss untersucht, welchen gegebene Mengen verschiedener alze, wenn sie in Wasser aufgelöst sind, auf die Dampfpannung dieses bei 0° ausüben.

Es hatte sich ergeben, dass bei den Lösungen von KCl, Br und KJ die Dampfspannungsverminderungen proportional er aufgelösten Salzmenge, also nach dem Wüllner'schen esetze proportional der Concentration der Salzlösung waren, ie Lösungen von NaCl und $NaNO_3$ in Wasser, zeigten von er Proportionalität Abweichungen, in dem Sinne, dass bei dem rsteren Salz die Dampfspannungsverminderung mit zunehmenem Salzgehalte stärker, bei dem letzteren Salze schwächer unahm, als nach dem Wüllner'schen Gesetze zu erwarten war.

Ein Vergleich, mit den von Tammann bei 100° ausgeihrten Beobachtungen, führte zu dem Resultat, dass das Verältniss $p_w : p_s$ der Dampfspannung des reinen Wassers zu dernigen einer wässrigen Salzlösung vom Salzgehalte s bei 100° enselben Werth hatte, wie bei 0°, dass also das von v. Babo ierst ausgesprochene Gesetz, dass dieses Verhältniss von der emperatur unabhängig sei, den Beobachtungen entspricht. llerdings zeigten sich Abweichungen bei den Lösungen von rossem Salzgehalte, die schwächer concentrirten Lösungen hienen jedoch innerhalb der sehr kleinen Beobachtungsfehler em v. Babo'schen Gesetze zu gehorchen. Dieses Ergebniss g einen Widerspruch zwischen Theorie und Erfahrung nach ch; denn aus den theoretischen Ueberlegungen, welche Kirchoff und v. Helmholtz zu einer Beziehung zwischen der Lösungsärme eines Salzes und seiner Dampfspannungsverminderung

1) C. Dieterici, Wied. Ann. 42. p. 513. 1891.

geführt haben, folgte, dass, wenn das v. Babo'sche Gesetz gültig ist, die Lösungswärme eines Salzes unabhängig von der Concentration sein müsse, eine Folgerung, welche den Beobachtungen über die Lösungswärmen widersprach. Ich glaubte deshalb die Gültigkeit der Kirchhoff-von Helmholtz'schen Gleichungen selbst in Zweifel ziehen zu müssen. Nachdem ich aber neue zuverlässige Beobachtungen über die Lösungswärmen einiger Salze in Wasser bei 0° erhalten habe und mich ihrer Berechnung zuwenden konnte, habe ich erkannt, dass meine Zweifel nicht berechtigt waren.

Im Folgenden führe ich zuerst im Anschluss an die von Hrn. R. Scholz ausgeführten Beobachtungen über die Lösungswärmen einiger Salze in Wasser von 0° die Berechnung dieser Grössen nach dem Vorgange von Kirchhoff aus. Dieselbe lässt erkennen, dass die theoretische Gleichung richtig ist, das von Babo'sche Gesetz jedoch nicht mit der Schärfe beobachtet ist und auch wohl in absehbarer Zeit nicht sicher beobachtet werden kann, um einen scharfen Vergleich der Theorie mit den Beobachtungen zuzulassen. Nach diesem Resultat liegt der Gedanke nahe, ob es nicht möglich ist, auf einem anderen Wege, durch die Theorie des osmotischen Druckes einen Ausdruck für die Lösungswärme abzuleiten, welcher leichter mit der Erfahrung verglichen werden kann. Wenn sich dieser Gedanke auch nicht durchführen lässt, so ergibt sich doch eine strenge Ableitung der Theorie des osmotischen Druckes, welche ich im Hinblick auf die Wichtigkeit derselben der Mittheilung werth erachte.

2. Die Lösungswärme einer gegebenen Salzmenge s in 1 g des Lösungsmittels, in unserem speciellen Falle Wasser von 0°, lässt sich am einfachsten darstellen, als die Differenz der Verdampfungswärme ϱ_ω von 1 g Wasser bei 0° und derjenigen ϱ_s von $(1 + s)$ g der Salzlösung von der Concentration $h_s = s:1$. Es ist also, wie auch die Anschauung sofort zeigt:

$$(1) \qquad l_s = \varrho_\omega - \varrho_s$$

und wir bemerken, dass, wenn wir zugeführten Wärmemengen das negative Vorzeichen geben, sowohl ϱ_ω wie ϱ_s negative Grössen sind und l_s negativ wird, wenn der absolute Werth von ϱ_ω grösser als der von ϱ_s ist.

Im Folgenden ist von den Vorzeichen abgesehen.

Für die Verdampfungswärme einer jeder Flüssigkeit, deren Dampfspannung während der Verdampfung constant bleibt, gilt die bekannte Gleichung der mechanischen Wärmetheorie, welche wir für Wasser — Index ω — schreiben:

$$J \,.\, \varrho_\omega = v_\omega \vartheta \,.\, \frac{d p_\omega}{d \vartheta},$$

wobei J das mechanische Aequivalent der Wärme, v_ω das specifische Volumen des bei ϑ gesättigten Wasserdampfes bezeichnet und das specifische Volumen der Flüssigkeit gegen dasjenige des Dampfes vernachlässigt ist.

Für den bei 0^0 oder $\vartheta = 273^0$ gesättigten Wasserdampf gilt nach meinen früheren Untersuchungen das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz; also die Gleichung:

$$p_\omega \,.\, v_\omega = R \vartheta,$$

wobei R die Gasconstante für 1 g Wasserdampf ist. Unter Benutzung dieser Gleichung wird:

(2) $$J \,.\, \varrho_\omega = R \vartheta^2 \cdot \frac{1}{p_\omega} \cdot \frac{d p_\omega}{d \vartheta} = R \vartheta^2 \cdot \frac{d}{d \vartheta} \log p_\omega .$$

Eine ganz ähnliche Gleichung gilt für die Verdampfungswärme einer concentrirten Salzlösung, welche auf 1 g Wasser S g Salz enthält, denn bei ihrer Verdampfung bleibt die Dampfspannung constant. Beziehen wir auf diesen den Index c, so ist die Verdampfungswärme von $(1 + S)$ g einer concentrirten Salzlösung:

(2a) $$J \,.\, \varrho_c = R \vartheta^2 \cdot \frac{d}{p_c} \cdot \frac{d p_c}{d \vartheta} = R \vartheta^2 \cdot \frac{d}{d \vartheta} \log p_c .$$

Bei einer nicht concentrirten Salzlösung von der Concentration $h_s = s:1$ trifft die Bedingung, dass die Dampfspannung während der Verdampfung constant sein soll, nicht zu, vielmehr ändert sich die Concentration und damit die Dampfspannung in dem Maasse, als der Lösung Wasser entzogen wird, von dem ursprünglichen Werthe p_s zunächst bis zum Werthe p_c; dieser tritt ein, wenn die in der Lösung noch vorhandene Wassermasse m_c gerade genügt, um mit der in ihr enthaltenen Salzmenge s eine concentrirte Lösung zu bilden. Schreitet die Verdampfung weiter fort, so bleibt bis zur Trockne

hin p_c constant. Bezeichnen wir mit x die veränderliche Wassermasse, welche den $(1 + s)$ g der Salzlösung entzogen ist, so können wir also setzen:

$$J \cdot \varrho_s = R\vartheta^2 \cdot \int_0^1 \frac{d}{d\vartheta} \log p \cdot dx$$

und hierin ist p als Function von x zu betrachten.

Nach dem Gesagten sind zwei Integrationsintervalle zu unterscheiden; in dem ersteren von $x = 0$ bis $x = 1 - m_c$ ändert sich p und also auch $\frac{d}{d\vartheta} \log p$; im zweiten von $x = 1 - m_c$ bis $x = 1$ ist $p = p_c$. Demgemäss wird nnter Benutzung von (2a):

$$(2b) \qquad J \cdot \varrho_s = R\vartheta^2 \cdot \int_0^{1-m_c} \frac{d}{d\vartheta} \log p \cdot dx + m_c \cdot J \cdot \varrho_c$$

und es ist:

$$\frac{s}{m_c} = \frac{S}{1} \qquad m_c = \frac{s}{S} \,.$$

Führt man die Gleichungen (2), (2a) und (2b) in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir für die Lösungswärme von S g Salz in 1 g Wasser zu concentrirter Lösung den Ausdruck:

$$(3a) \quad J \cdot l_c = R\vartheta^2 \cdot \left[\frac{d}{d\vartheta} \log p_\omega - \frac{d}{d\vartheta} \log p_c\right] = R\vartheta^2 \frac{d}{d\vartheta} \log \frac{p_\omega}{p_c}$$

und für die Lösungswärme von s g Salz in 1 g Wasser zu verdünnter Lösung den Ausdruck:

$$(3b) \qquad J \cdot l_s = J \cdot \varrho_\omega - m_c \cdot J \cdot \varrho_c - R\vartheta^2 \cdot \int_0^{1-m_c} \frac{d}{d\vartheta} \log p \cdot dx.$$

Duhem hat darauf aufmerksam gemacht, dass p_c in doppelter Weise von ϑ abhängt; denn p_c ist die Dampfspannung der gesättigten Lösung, sie ändert sich einmal direct mit der Temperatur und zweitens dadurch, dass die Sättigung S mit der Temperatur veränderlich ist. Folglich ist:

$$\frac{d}{d\vartheta} \cdot \log p_c = \frac{\partial}{\partial\vartheta} \log p_c + \frac{\partial}{\partial S} \cdot \log p_c \frac{dS}{d\vartheta}$$

und somit:

$$(3c) \quad J \cdot l_c = R\vartheta^2 \cdot \left[\frac{d}{d\vartheta} \cdot \log p_\omega - \frac{\partial}{\partial\vartheta} \log p_c - \frac{\partial}{\partial S} \cdot \log p_c \cdot \frac{dS}{d\vartheta}\right] .$$

Unsere bisherige Kenntniss über die Dampfspannungen der Salzlösungen erwiesen die Gültigkeit des von Babo'schen Satzes, also der Gleichung:

$$p_\omega : p_c = C(\text{unabhängig von } \vartheta)$$

und ebenso für jede beliebige Concentration h:

$$p_\omega : p_s = f(h),$$

daraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log p_c = \frac{d}{d\vartheta} \cdot \log p_\omega$$

und

$$\frac{d}{d\vartheta} \log p = \frac{d}{d\vartheta} \log p_\omega.$$

Unter Einführung des von Babo'schen Gesetzes erhalten wir demnach die Gleichungen:

(4a) $$J . l_c = - R\vartheta^2 \cdot \frac{\partial}{\partial S} \log p_c \cdot \frac{dS}{d\vartheta}$$

und

(4b) $$J . l_s = m_c J(\varrho_\omega - \varrho_c) = m_c . J . l_c.$$

Die erstere dieser Gleichungen zeigt, dass die Lösungswärme eines Salzes zur concentrirten Lösung im allgemeinen nicht Null ist, sondern einen aus der Sättigungsänderung mit der Temperatur und aus der Abhängigkeit der Dampfspannung von der Concentration berechenbaren Werth hat. Die zweite Gleichung besagt, dass die Lösungswärmen zu verdünnten Lösungen dem Salzgehalte proportional, also die Verdünnungswärmen Null sind. Diese Folgerungen, welche auch schon Duhem gezogen hat, können wir im Hinblick auf die Beobachtungen über die Abhängigkeit der Lösungswärmen von der Concentration, nicht annehmen, sondern müssen schliessen, dass, wenn sich auch das von Babo'sche Gesetz nach den in meiner vorigen Arbeit mitgetheilten Beobachtungen soweit als gültig bewiesen hat, dass das Verhältniss der Dampfspannungen selbst als von der Temperatur unabhängig angesehen werden kann, diese Gültigkeit doch nicht auf die Differentialquotienten der Dampfspannung nach der Temperatur erstreckt werden darf.

Die in der Arbeit des Hrn. Scholz ausgeführten Beobachtungen zusammen mit den meinigen über die Dampfspannungen wässeriger Salzlösungen bei 0°, setzen uns in den

Stand die Werthe von $dp/d\vartheta$ für jede Concentration zu berechnen und dadurch den Bereich der Gültigkeit des von Babo'schen Gesetzes genau zu fixiren. Der Gang der Berechnung ist kurz folgender: Zunächst berechnen wir nach Gleichung (4a) die Lösungswärmen zu concentrirter Lösung aus meinen Dampfspannungsbeobachtungen, das so berechnete l_c' weicht von dem von Hrn. Scholz beobachteteten l_c ab. Nach Gleichung (3c) ist dann:

$$J.(l_c - l_c') = R\vartheta^2 \left[\frac{d}{d\vartheta}\log p_\omega - \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log p_c\right]$$

und da das erste Glied rechts nach meinen früheren Beobachtungen bekannt ist, folgt daraus:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log p_c = \frac{1}{p_c}\cdot\frac{\partial p_c}{\partial\vartheta}$$

und da p_c beobachtet ist, ergibt sich $\partial p_c/\partial\vartheta$. Nun benutzen wir weiter die Gleichung (3b) in der Form:

$$\int_0^{1-m_c}\frac{d}{d\vartheta}\log p.dx = \frac{J}{R\vartheta^2}[\varrho_\omega - (\varrho_c + l_c)],$$

setzen in ihr für jede Concentration die theils von Hrn. Scholz, theils von mir beobachteten Werthe für ϱ_ω, ϱ_c und l_c ein und suchen $d(\log p)/d\vartheta$ als Function der Concentration so zu bestimmen, dass den Beobachtungen genügt wird. Dadurch erhalten wir dann die Werthe für $dp/d\vartheta$ für jede Concentration.

3. In der folgenden Tabelle gebe ich die Lösungswärmen L_c' für 1 g Salz in Wasser von 0° zu concentrirter Lösung nach den Beobachtungen von Hrn. Scholz, unter „Correction“ ist aufgeführt diejenige Wärme, welche der bei der Lösung auftretenden Contractionsarbeit entspricht und welche nach den Beobachtungen von Röntgen und Schneider über die Compressibilitätscoëfficienten der Salzlösungen berechnet ist; diese Correction ist im allgemeinen klein und daher die Unsicherheit ihrer Berechnung nicht von Belang. Die so corrigirten Lösungswärmen L_c, welche für 1 g des gelösten Körpers gelten, sind dann in der Spalte l_c umgerechnet auf 1 g des Lösungsmittels.

Tabelle I.

	Concentration der conc. Lösung	L_c'	Correction	L_c	l_c
		cal.		cal.	cal.
K Cl	28,5 g *S.* auf 100 g aq.	57,50	− 1,51	55,99	15,95
K Br	53,48 „ „ „ 100 „ „	38,00	− 0,65	37,35	19,97
K J	127,8 „ „ „ 100 „ „	21,70	− 1,08	20,62	26,37
Na NO_3	70,94 „ „ „ 100 „ „	34,50	− 0,90	33,60	23,83
Na Cl	35,52 „ „ „ 100 „ „	8,58	− 1,14	7,44	2,64

Die in der letzten Spalte enthaltenen Werthe sind also die durch die Beobachtungen über die Lösungswärmen gegebenen.

In der folgenden Tabelle berechne ich diese nach der Formel (4a), welche wir zur Berechnung schreiben in der Form:

$$l_c = -\frac{R\vartheta^2}{J}\cdot\frac{1}{p_c}\cdot\frac{\partial p_c}{\partial S}\cdot\frac{dS}{d\vartheta}.$$

In derselben ist gemäss meinen früheren Beobachtungen für 1 g Wasser:

$$R = 47{,}095\,\frac{\text{Gramm-Meter}}{\text{Grad Celsius}}.$$

$$J = 432{,}5 \text{ Gramm-Meter}$$

$$\vartheta = 273\ {}^0\text{C}.$$

Die Spalte „Concentration" gibt in Vielfachen von n, der Concentration der Normallösung, die Concentration im Sättigungspunkte bei 0^0; die Spalte $dS/d\vartheta$ die Aenderung der Löslichkeit mit der Temperatur nach den Landolt-Börnstein'schen Tabellen, also die Gewichtsmenge Salz in Grammen, welche 1 g Wasser bei 1^0 mehr löst als bei 0^0; p_c ist die Dampfspannung der concentrirten Salzlösung bei 0^0 in Millimetern Hg gemäss meinen Beobachtungen; $\partial p_c/\partial S$ ist die Aenderung der Dampfspannung in Millimetern Hg, wenn die von 1 g Wasser gelöste Salzmenge um 1 g steigt, im Punkte der Sättigung, berechnet aus meinen Beobachtungen über die Aenderung der Dampfspannung mit der Concentration. l_c „berechnet" enthält das Resultat der durch Formel (4a) angegebenen Rechnungsoperationen, zum Vergleich sind unter l_c „beobachtet" die aus der vorigen Tabelle entnommenen Werthe daneben gestellt. Ihre Differenz dient zur weiteren Berechnung nach (3c) indem nach meinen früheren Beobachtungen $\varrho_\omega = 596{,}8$ cal. oder $1/p_\omega \cdot dp_\omega/d\vartheta = 0{,}07354\,({}^0\text{C.})^{-1}\,p_\omega = 4{,}62$ mm Hg gesetzt ist.

Die Spalte $1/p_e . \partial p_e/\partial\vartheta$ enthält das Resultat der Rechnung, aus ihr ergibt sich $\partial p_e/\partial\vartheta$ in mm Hg/°C. Die zweite Spalte $\partial p_e/\partial\vartheta$ enthält zum Vergleich denselben Werth, berechnet nach dem von Babo'schen Gesetze, also nach der Gleichung:

$$\frac{\partial p_e}{\partial \vartheta} : \frac{d p_\omega}{d \vartheta} = p_e : p_\omega .$$

Tabelle II.

	Concentration	$\frac{dS}{d\vartheta}$	p_e	$\frac{\partial p_e}{\partial S}$	l_e ber.	l_e beob.	$\frac{1}{p_e} \cdot \frac{\partial p_e}{d\vartheta}$	$\frac{\partial p_e}{\partial \vartheta}$	$\frac{\partial p_e}{\partial \vartheta}$ n. v. B
	n				cal.	cal.			
K Cl	3,83	0,00350	4,083	– 1,7584	12,23	15,95	0,07308	0,2984	0,30
K Br	4,50	0,00556	3,968	– 1,1597	13,19	19,97	0,07269	0,2885	0,29
K J	7,717	0,00830	3,443	– 0,8736	17,09	26,37	0,07238	0,2493	0,25
Na NO_3	8,356	0,00763	3,709	– 1,260	21,04	23,84	0,07318	0,2715	0,27
Na Cl	6,072	0,00025	3,490	– 3,829	2,23	2,64	0,07347	0,2565	0,25

Ein Vergleich der beiden letzten Spalten dieser Tabelle zeigt, dass eine ausserordentlich kleine Abweichung vom von Babo'schen Gesetze genügt, um die beträchtlichen Lösungswärmen berechnen zu lassen, weil dieselbe mit dem grossen Factor $R\vartheta^2$ multiplicirt wird; diese Abweichung ist so klein, dass sie sich aus directen Dampfspannungsbeobachtungen bei verschiedenen Temperaturen nie wird sicher berechnen lassen, selbst wenn man ein so weites Temperaturinterwall zu Hülfe nimmt, wie es Tammann's bei 100° und meine bei 0° ausgeführten Beobachtungen zuliessen, zumal aus der Veränderung der Lösungswärmen mit der Temperatur geschlossen werden muss, dass auch jene Abweichung von der Temperatur abhängt und auch sein Vorzeichen ändern kann.

Die weitere Berechnung auf Grund der Beobachtungen über die Lösungswärmen zu verdünnten Lösungen, ergibt, dass, wenn man sucht für ein jedes Salz $1/p . dp/d\vartheta$ als Function der Concentration h oder besser der „relativen" Concentration $5 : Sh : H$ darzustellen, es nicht genügt, eine lineare Abhängigkeit anzunehmen. Genügende Uebereinstimmung mit den Beobachtungen lässt sich nur erzielen, indem man setzt:

$$(5) \qquad \frac{d}{d\vartheta} \log p = \frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{d\vartheta} = \frac{1}{p_\omega} \cdot \frac{dp_\omega}{d\vartheta} \left[1 - \alpha\left(\frac{h}{H}\right) - \beta \cdot \left(\frac{h}{H}\right)^2\right] .$$

Die Berechnung der Constanten ergab folgende Werthe:

	α	β
K Cl	0,000444	0,005946
K Br	− 0,001797	+ 0,01349
K J	0,01095	0,004955
$NaNO_3$	0,02391	− 0,01888
Na Cl	0,02787	− 0,02678

$$\frac{1}{p_\omega} \cdot \frac{d p_\omega}{d \vartheta} = 0{,}07354 \frac{\text{Zahl}}{{}^\circ\text{C.}}$$

Durch Einführung dieser Constanten in die vorher angeführte Gleichung für $1 / p \,.\, dp / d\vartheta$ ist die Abweichung dieses Ausdruckes von der Constanz oder die Unsicherheit des Babo'schen Gesetzes mit einer solchen Schärfe dargestellt, dass man die Verdampfungswärme ϱ_s einer Salzlösung nach Gleichung (2b) mit einer Unsicherheit von höchstens 1 : 3000 berechnen kann, meistens mit einem noch geringeren Fehler. Trotzdem fällt dieser Fehler ins Gewicht für die Differenz $\varrho_\omega - \varrho_s$, welche die Lösungswärme darstellt. Der allgemeine Charakter der Abhängigkeit des Ausdruckes $1 / p \,.\, dp / d\vartheta$ von der Concentration ist derjenige, dass für sehr kleine Concentrationen der Ausdruck fast völlig constant gleich dem für reines Wasser geltenden Werthe ist, mit wachsender Concentration aber mehr und mehr abweicht, bis er bei gesättigter Lösung den für diese geltenden Werth, den wir vorher für die angeführten Salze berechnet haben, erreicht. Dem entsprechend sind für sehr verdünnte Lösungen die Verdünnungswärmen nahezu Null und nehmen erst mit zunehmender Concentration grössere Werthe an. Die Grenze für das Verschwinden der Verdünnungswärmen hängt offenbar nur von der Genauigkeit unseres wärmemessenden Apparates ab. Bei Anwendung des Eiscalorimeters konnte in der vorstehenden Arbeit bei allen Salzlösungen noch Verdünnungswärmen bis zur Concentration $^1/_8$ normal, bei den Lössungen von $NaNO_3$ sogar bis $^1/_{16}$ normal sicher beobachtet werden.

Das Resultat der Berechnung können wir in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Das Verhältniss der Dampfspannung von reinem Wasser zu derjenigen einer wässrigen Salzlösung kann im Temperaturintervall zwischen 0° und 100° mit einer Sicherheit von

etwa 2 Proc. als von der Temperatur unabhängig angesehen werden.

2. Begnügt man sich mit derselben Unsicherheit von etwa 2 Proc., so kann man auch die Dampfspannungszunahme einer wässerigen Salzlösung und dadurch auch ihre Verdampfungswärme nach Babo's Gesetz berechnen.

3. Handelt es sich aber um die Berechnung von Lösungswärmen aus der Differenz zweier Verdampfungswärmen, oder aus der Differenz zweier Dampfspannungszunahmen, so sind hierbei die Abweichungen von dem genannten Gesetz entscheidend.

Die genaue Fixirung der Giltigkeitsgrenze des besprochenen Gesetzes wird uns bei weiteren Betrachtungen Nutzen gewähren.

4. Der Gedanke liegt nach den vorstehenden Berechnungen nahe, einen anderen Ausdruck für die Lösungswärmen zu suchen; welcher leichter mit der Erfahrung verglichen werden kann. Hierzu ermuthigt eine Bemerkung, welche sich direct an die Beobachtungen des Hrn. Scholz anschliesst. Ich stelle diese zunächst zusammen, indem ich für die Concentration das schon vorher gebrauchte Maass anwende, unter L die um die geringe Contractionsarbeit corrigirten Lösungswärmen für 1 g Salz und unter l dieselben für 1 g Wasser angebe in Grammcalorien.

Tabelle III.

Concentration	L	l	Concentration	L	l	Concentration	L	l
K Cl Mol.-Gew. = 74.5			K Br Mol.-Gew. = 119			K J Mol.-Gew. = 166		
	cal.			cal.			cal.	
$\frac{1}{16}n$	71.56	0,333	$\frac{1}{16}n$	48.8	0,362	$\frac{1}{16}n$	35.20	0,364
$\frac{1}{8}n$	71.21	0,661	$\frac{1}{8}n$	48.79	0,724	$\frac{1}{8}n$	35.43	0,733
$\frac{1}{4}n$	70.69	1.316	$\frac{1}{4}n$	48,66	1,445	$\frac{1}{4}n$	34,73	1,437
$\frac{1}{2}n$	69,58	2.584	$\frac{1}{2}n$	47,50	2,821	$\frac{1}{2}n$	33,70	2,790
n	66.35	4,949	n	45,82	5,445	n	32,04	5.306
$2n$	62,15	9.276	$2n$	42,65	10.14	$2n$	29,05	9,620
$3{,}6n$	56,73	15,24	$4n$	38,39	18.24	$4n$	25,05	16,60
$3{,}83n$	55.99	15,95	$4.501n$	37.35	19.97	$7.5n$	20,90	26,01
						$7.717n$	20.62	26,37

Concentration	L	l	Concentration	L	l
$NaNO_3$ Mol.-Gew. = 84,9			NaCl Mol.-Gew. = 58,5		
	cal.			cal.	
$\frac{1}{16}n$	69,98	0,371	$\frac{1}{16}n$	33,1	0,121
$\frac{1}{8}n$	68,48	0,726	$\frac{1}{8}n$	33,22	0,242
$\frac{1}{4}n$	66,37	1,407	$\frac{1}{4}n$	32,56	0,475
n	58,39	4,957	$\frac{1}{2}n$	30,48	0,892
1,5 n	54,51	6,939	n	26,91	1,575
4 n	42,47	14,42	2 n	20,54	2,403
8 n	34,67	23,55	4 n	12,21	2,857
8,356 n	33,60	23,83	5,9 n	7,84	2,707
			6,07 n	7,44	2,642

Blicken wir auf die Spalten l, so zeigt sich zunächst, dass die Lösungswärmen eines jeden Salzes sehr nahe proportional der Zahl der gelösten Molecüle zunehmen. Die Abweichungen von der Proportionalität veranlassen die nicht scharfe Gültigkeit des v. Babo'schen Gesetzes. Wichtiger ist folgende Bemerkung: schliessen wir die Lösungen von NaCl aus, so sind die Lösungswärmen der beobachteten Salze zu gleichen molecularen Concentrationen einander nahe gleich; oder mit anderen Worten; die Wärme, welche zur Lösung einer gleichen Zahl von Molecülen in gleich viel Wasser aufzuwenden ist, ist nahe unabhängig von der Natur des Salzes.

Dieser Satz ist zweifellos nicht allgemein gültig, wie schon die Ausnahme von NaCl zeigt; indessen ist es auffällig, dass so verschieden die Lösungswärmen berechnet auf 1 g Salz sind, dieselben für gleiche Concentrationen nahe gleich werden, berechnet auf gleiche Mengen des Lösungsmittels.

Diese Thatsache erscheint als ein schöner Beweis der Anschauungen van't Hoff's vom Gaszustande der gelösten Körper; denn nach dieser müssen wir die Lösungswärmen auffassen, als die Arbeit, welche ein comprimirtes Gas — das Salz — leistet, indem es sich in ein Vacuum — das Lösungsmittel — ausbreitet. Ist letzteres gleich gross, so muss die Ausdehnungsarbeit gleich gross sein, unabhängig von der Natur des Gases. Man wird aber manche Bedenken dagegen haben, den Lösungsvorgang als Analogon zum Gay-Lussac'schen Gasversuch anzusehen. Wir wollen jedoch hierauf nicht näher eingehen.

Die Betrachtungen van't Hoff's sind beschränkt auf sehr verdünnte Lösungen und die Grenze ihrer Gültigkeit ist nicht sicher bekannt. Durch diese Beschränkung ist uns die Basis zu einer Anwendung jener Anschauungen entzogen und deshalb werden wir zuerst suchen, auch für concentrirte Lösungen einen Ausdruck für die in Betracht kommende Grösse „den osmotischen Druck" aufzufinden. Dies gelingt auf dem Boden der mechanischen Wärmetheorie, indem wir einen der Kreisprocesse ausführen, welche van't Hoff angiebt, ohne jedoch die beschränkende Annahme sehr verdünnter Lösung festzuhalten.[1])

5. Es sei gegeben in einem Diffusionsgefässe mit halbdurchlässiger Membran eine concentrirte Salzlösung bei 0°; dieselbe enthalte m g Wasser und stehe durch einen Stempel unter einem Drucke P_c, welcher gerade die Diffusion von Wasser gleicher Temperatur, welches die Zelle umgibt und nur unter dem Druck seiner Dampfspannung steht, verhindert. Es bezeichne V_{P_c} das Volumen von 1 g Wasser in der Lösung unter jenem Drucke P_c, V_ω das Volumen von 1 g reinen Wassers unter dem Drucke seiner Dampfspannung. p_ω, p_s und v_ω und v_c bezeichne wie vorher Druck und Volumen des bei ϑ gesättigten Wasserdampfes über reinem Wasser und der Salzlösung. R sei die Gasconstante für 1 g Wasserdampf.

Wir drücken erstens den die Salzlösung belastenden Stempel um soviel herab, dass 1 g Wasser aus der Zelle in das umgebende Wasser austritt; die hierbei gegen das System von Aussen geleistete Arbeit ist $P_c(V_{P_c} - S) - p_\omega . V_\omega$ wenn S das Volumen des ausgeschiedenen Salzes ist.

Wir entlasten zweitens die restirende Salzlösung, welche $(m - 1)$ g Wasser enthält, ihres Druckes, sodass sie nur noch unter dem Drucke p_s steht. Die hierbei vom System nach Aussen geleistete Dilatationsarbeit ist sehr klein. Die restirende Salzlösung werde ausser Diffusionszusammenhang gesetzt.

Drittens werde das herausgedrängte 1 g Wasser in Dampf

1) Denselben Kreisprocess hat unter Anderen schon Hr. Pupin, Inaug. Diss. Berlin 1889, in derselben Weise behandelt, jedoch ohne die physikalischen Folgerungen zu ziehen, auf welche die folgende Discusion führt.

gleicher Temperatur übergeführt; die hierbei vom System nach Aussen geleistete Arbeit ist $p_\omega : v_\omega$.

Der Dampf werde viertens isotherm dilatirt bis zum Druck p_c; die vom System geleistete Arbeit ist bei der Gültigkeit des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes $R\vartheta \log p_\omega/p_c$.

Fünftens werde der Dampf über der Lösung condensirt, wobei von Aussen gegen das System die Arbeit $p_c \cdot v_c$ geleistet wird.

Endlich werde sechstens die Salzlösung, welche nun wieder m g Wasser enthält zum Drucke P_c comprimirt.

Der Kreisprocess ist isotherm und reversibel, die Summe aller äusseren Arbeiten also Null. Bei der Bildung der Summe ist zu bemerken, dass die Arbeiten 3 und 5 sich aufheben, ebenso zum grossen Theil 2 und 6; von letzterer verbleibt nur die Compression von 1 g Wasser in der Lösung vom Druck p_c zum Druck P_c. Fassen wir diese Arbei mit der Arbeit 1 zusammen, so können wir diese mit Vernachlässigung sehr kleiner Grössen schreiben:

$$P_c(V_c - S) - p_\omega V_\omega,$$

indem wir unter V_c das Volumen von 1 g Wasser in der Lösung unter dem Druck der Dampfspannung verstehen. Nun ist jedenfalls p_ω sehr klein gegen P_c, also das zweite Glied gegen das erste verschwindend. Es bleibt also:

$$P_c(V_c - S) = R\vartheta \log \frac{p_\omega}{p_c}.$$

Diese Gleichung ist bis auf die angeführten Vernachlässigungen scharf, und an keine Beschränkung gebunden; sie gilt ebenso für eine Lösung beliebiger Concentration, wenn wir nur voraussetzen, dass die Menge der Lösung so gross sei, dass durch Entziehung von 1 g Wasser keine Concentrationsänderung entsteht. Allerdings ist dann $(V_s - S)$ schwieriger und nur durch Berücksichtigung der Concentrationsänderungen berechenbar. Begnügen wir uns zunächst damit, die Volumencontraction, welche das Wasser beim Lösen eines Salzes erleidet, und von der wir übrigens gar nicht wissen, ob sie dem Salze oder dem Wasser zukommt, zu vernachlässigen, so können wir unsere letzte Gleichung allgemein schreiben:

(6) $$\Pi_s = P_s . V = R\vartheta \log \frac{p_w}{p_s},$$

worin V das Volumen von 1 g Wasser bei der Temperatur ϑ, p_s und P_s die einer gegebenen Concentration entsprechenden Werthe der Dampfspannung und des äusseren Druckes, R die Gasconstante für 1 g Wasser, p_w die Dampfspannung dieses bei der Temperatur ϑ bedeutet.

Unsere Gleichung (6) dient uns nicht nur als Rechnungsausdruck, sondern auch als Definition; denn sie sagt, dass, wenn zwei mischbare Flüssigkeiten verschiedener Dampfspannung, deren Mischung nur den Dampf einer von beiden aussendet, in Diffusionsverbindung treten, nothwendig nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie ein Diffusionsdruck auftreten muss, welcher durch die Differenz der Dampfspannungen bedingt ist. Die Richtung dieses Druckes ist diejenige von der Flüssigkeit höherer Dampfspannung zu derjenigen geringerer, der Druck hat also die Richtung, dass durch sein Wirken die freie Energie des Systems verringert wird. Der diesem Diffusionsdrucke gleiche und entgegengesetzte Druck tritt in unserer Gleichung auf; letzterer ist identisch mit dem „osmotischen Druck" van t'Hoffs in seiner ursprünglichen Definition. Wir werden diesen Ausdruck beibehalten und das Product $P_s . V = \Pi_s$ als die osmotische Arbeit bezeichnen.

Dann ist sofort klar, dass ein osmotischer Druck nur auftreten kann aber auch auftreten muss, wenn zwei Flüssigkeiten verschiedener Dampfspannung in Diffusionsverbindung treten, dass man also nicht von einem osmotischen Druck in einer Flüssigkeit reden kann, sondern nur von einem solchen zweier Flüssigkeiten gegeneinander. Bei uns tritt derselbe als Folge der Dampfspannungsdifferenz auf; van t'Hoff verfuhr umgekehrt, ihm ist die Dampfspannungsdifferenz Folge des osmotischen Druckes. Es entspricht aber dem inductiven Gang unserer Wissenschaft mehr, die unbekannte Grösse aus bekannten Grössen abzuleiten.

Unsere Gleichung enthält eine Reihe von Gesetzen, welche van't Hoff für den osmotischen Druck ausgesprochen hat, nur mit dem Unterschiede, dass unsere Schlüsse nicht auf unendlich grosse Verdünnungen beschränkt sind.

„Lösungen desselben Lösungsmittels und gleicher Dampfspannung bei gleichen Temperaturen sind isotonisch.“

Wir haben zu dem Satze van't Hoff's „desselben Lösungsmittels“ hinzugesetzt; denn wenn wir auch unsere Gleichung für gleiche Molecülzahlen des Lösungsmittels schreiben, sodass die Constanten R für zwei verschiedene Lösungsmittel einander gleich werden, ausserdem der Voraussetzung gemäss ϑ und p_ω / p_s die gleichen sind, so sind es doch nicht die Molecularvolumina MV verschiedener Lösungsmittel. Im übrigen gilt der Satz allgemein und ist nicht auf grosse Verdünnung beschränkt.

„Der osmotische Druck ändert sich proportional der absoluten Temperatur“.

Dieser Satz ist nur innerhalb bestimmter Grenzen richtig; vernachlässigen wir die kleinen Aenderungen von V mit der Temperatur, so ist dieser Satz nur in dem Maasse richtig, als das von Babo'sche Gesetz. Im ersten Theile dieser Arbeit sahen wir, dass wir bei allen Fragen, wo nur die Verhältnisse der Dampfspannungen in Betracht kommen, dies Gesetz als innerhalb etwa 2 Proc. als richtig ansehen können. Dies ist auch zunächst das Gültigkeitsintervall des citirten Satzes; für ihn ist das von Babo'sche Gesetz unerlässliche Vorbedingung. Wir müssen noch eine zweite Beschränkung hinzufügen, dass der osmotische Satz nur gilt in Temperaturen, in welchen wir R als constant ansehen können. Dies gilt für Wasser vermuthlich bis ungefähr 30°, bei höheren Temperaturen nicht mehr, die Aenderung ist berechenbar, wenn wir v_ω das specifische Volumen des gesättigten Wasserdampfes in seiner Abhängigkeit von der Temperatur kennen. Die directen Beobachtungen Pfeffer's liegen bei Temperaturen, bei denen R als nahe constant angesehen werden kann und deshalb und wegen gleichzeitigen Bestehen des von Babo'schen Gesetzes bestätigten sie den Satz van't Hoff's. Derselbe gilt aber nicht mit der Strenge, dass wir die Zunahme des osmotischen Druckes mit der Temperatur als von ihr unabhängig ansehen dürfen: denn differentiiren wir unsere Gleichung (6) nach ϑ, so erhalten wir:

$$\text{(6a)} \qquad \frac{d\Pi_s}{d\vartheta} = R \log \frac{p_\omega}{p_s} + R\vartheta \cdot \frac{d}{d\vartheta} \log \frac{p_\omega}{p_s}.$$

Nach der Berechnung im ersten Abschnitte dieser Arbeit sahen wir, dass $d \log (p_w/p_s)/d\vartheta$ nicht Null ist; wenn nun auch dieser Ausdruck für verdünnte Lösungen klein ist, so wird er doch mit dem grossen Factor $R\vartheta$ multiplicirt und kommt deshalb in Betracht. Weiter unten werden wir diesen Einfluss erkennen.

Durch die Concentration ist die Gültigkeit des obigen Satzes nicht beschränkt.

„Der osmotische Druck ist proportional der Concentration."

Um den Gültigkeitsbereich dieses Satzes zu übersehen, schreiben wir unsere Gleichung (6) in dieser Form:

$$P_s = -\frac{R\vartheta}{V} \cdot \log\left[1 - \frac{p_w - p_s}{p_w}\right]$$

und indem wir bemerken, dass $(p_w - p_s)/p_w = x$ die relative Dampfspannungsverminderung eine Grösse ist, welche immer kleiner als Eins, wir also die Entwickelung des log in eine convergente Reihe vornehmen können, schreiben wir:

$$P_s = \frac{R\vartheta}{V}\left[x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots\right] \quad x < 1.$$

Entsinnen wir uns des Ergebnisses der experimentellen Forschung, dass bei verdünnten Lösungen x sehr klein und der Concentration proportional ist, so haben wir für die verdünnten Lösungen nur das erste Glied der Reihe zu berücksichtigen. Der Satz von van't Hoff ist dann evident. Bei concentrirteren Lösungen haben wir für alle Lösungen, bei welchen die Dampfspannungsverminderuug proportional dem Salzgehalte ist — nach meinen, Tammann's u. a. Beobachtungen bei KCl, KBr, KJ in Wasser — ein schnelleres Wachsen des osmotischen Druckes zu erwarten, dasselbe wird um so grösser, wenn ausserdem noch die Dampfspannungsverminderungen schneller zunehmen, als die Concentration, wie bei den wässrigen Lösungen von NaCl und LiCl, es wird geringer im anderen Falle, wie bei den Lösungen von $NaNO_3$. Das Ergebniss, der osmotische Druck muss schneller wachsen, als die Concentration, steht im Widerspruch zur Hypothese von Arrhenius einer mit der Concentration abnehmenden Dissociation.

Das gleichzeitige Bestehen der beiden zuletzt besprochenen

Sätze, zusammen mit dem Umstande, dass in ihnen die Gasconstante R auftritt, hat van't Hoff veranlasst, die Avogadro'sche Hypothese in die Gesetze des osmotischen Druckes einzuführen, dadurch die Analogie zwischen gelöstem Zustande und dem Gaszustande aufzustellen und den osmotischen Druck einer einprocentigen Zuckerlösung gegen reines Lösungsmittel unmittelbar als gleich dem Gasdruck zu berechnen, den ebenso viel Molecüle eines Gases, als Zuckermolecüle in der Lösung sind, ausüben würden, wenn sie denselben Raum einnehmen, wie die Lösung. Diese Berechnung ist es wohl zumeist gewesen, welche in späteren Arbeiten anderer Autoren die Vorstellung auftreten lässt, als sei der gelöste Körper wirklich im Gaszustande und der osmotische Druck kinetischer Natur, herrührend von den Stössen des gasförmigen gelösten Körpers. Unsere allgemeinere Gleichung (6) lässt erkennen, wie weit die Analogie mit dem Gaszustande zutrifft und was wir aus ihr schliessen dürfen. Denn bilden wir die osmotische Arbeit, welche geleistet wird, wenn wir aus einer sehr grossen Masse einer sehr verdünnten Lösung 1 g des Lösungsmittels durch eine halbdurchlässige Mebran zu reinem Lösungsmittel überführen, so ist:

$$\Pi_s = R\vartheta \, . \log \frac{p_\omega}{p_s} = R\,\vartheta \, . \frac{p_\omega - p_s}{p_\omega}$$

indem das erste Glied der Reihe für den log berücksichtigt ist und R und Π_s sich auf 1 g des Lösungsmittels beziehen. Nach den Raoult'schen Dampfspannungsgesetzen ist nun die „normale" relative Dampfspannungsverminderung verdünnter Lösungen gegeben durch:

$$\frac{p_\omega - p_s}{p_\omega} = \frac{s}{\omega} \cdot \frac{M_\omega}{M_s},$$

wobei s und ω die Gewichtsmengen von gelöstem Körper (Salz) und lösendem Mittel (Wasser), M_s und M_ω die entsprechenden Moleculargewichte sind. Führen wir diese Gleichung in die vorherige ein, indem wir $\omega = 1$ und also s gleich derjenigen Gewichtsmenge Salz setzen, welche in 1 g Wasser gelöst, die angenommene Concentration der Lösung gibt, so wird:

$$\Pi_s = R \, . \, \vartheta \, . \, s \cdot \frac{M_\omega}{M_s}.$$

Diese Gleichung gilt für 1 g des lösenden oder auch für s g des gelösten Körpers: für die Grammmolekel des gelösten Körpers erhalten wir demnach die entsprechende Gleichung durch Multiplication mit M_s / s also:

$$\frac{M_s \cdot \Pi_s}{s} = M_\omega \cdot R \cdot \vartheta .$$

Beachtet man, dass $M_\omega \cdot R$ eine für alle Lösungsmittel gleiche Gasconstante ist, wenn wir bei so niedrigen Temperaturen operiren, dass für die Dämpfe das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz als gültig angenommen werden darf, und dass diese Constante gleich der der idealen Gase ist, so ist sofort ersichtlich, dass unsere Gleichung Avogadro's Hypothese ausspricht; ebenso ersichtlich ist aber auch, dass in dem Ausdruck für die osmotische Arbeit ein Grammmolecül unter den angegebenen Umständen nur deshalb die allgemeine Gasconstante eintritt, weil sie für die lösende Flüssigkeit im Dampfzustande gültig ist, und wir die osmotische Arbeit nur durch die äussere Arbeit, welche bei der Verdampfung der lösenden Flüssigkeit geleistet wird, messen können. Aus dem Auftreten dieser allgemeinen Gasconstante in unserer Rechnung und der dadurch hervortretenden Analogie des Gas- und gelösten Zustandes, dürfen wir also nicht etwa schliessen, dass jene Gasconstante eine Constante des gelösten Körpers sei, letzterer sich folglich im Gaszustande befinde und somit der osmotische Druck ein kinetischer Gasdruck sei.

Ich hebe hervor, dass die osmotische Arbeit nach der Avogadro'schen Hypothese nur berechnet werden darf für den Fall der Verdünnung einer schon sehr verdünnten Lösung unter der Voraussetzung, dass keine Wärmelösung bei der Verdünnung auftritt. Diese Bedingungen sind erfüllt bei der Berechnung, welche van't Hoff an den Beobachtungen des osmotischen Druckes einer einprocentigen Zuckerlösung von Pfeffer, ausführt. Die Berechnung gilt aber nicht für die osmotische Arbeit, welche beim Auflösen einer noch so kleinen Salzmenge in einer gegebenen Wassermenge geleistet wird. Für diese sind weiter unten die nöthigen Formeln gegeben. Bei unserer Deduction tritt die Dampfspannung bez. ihre Ver-

minderung als primär den osmotischen Druck zweier Flüssigkeiten gegeneinander bedingend auf. Van't Hoff verfuhr umgekehrt; bei ihm sind die Dampfspannungsgesetze Folgerung der osmotischen Sätze.

Es ist schon im Eingang unserer Betrachtungen darauf hingewiesen, dass uns dieser Gang der Untersuchung deshalb gerechtfertigt erscheint, weil man auf unserem Wege von den experimentell bekannten Erscheinungen ausgehend, strenge Schlüsse für die unbekannten Erscheinungen zieht. Wir können so die Dampfspannungsgesetze Raoult's einfach als Erfahrungsthatsache hinnehmen. Will man sich aber hierbei nicht begnügen, sondern auch von ihrem Zustandekommen sich eine Vorstellung machen, so kann man das, wie mir scheint, auf einfache Weise erreichen durch Anschauungen, welche der kinetischen Theorie der Gase entlehnt sind.

Das Raoult'sche Dampfspannungsgesetz schrieben wir vorher in der Form

$$\frac{p_\omega - p_s}{p_\omega} = \frac{s}{M_s} \cdot \frac{M_\omega}{W}.$$

Bedenkt man, dass s / M_s die Zahl S der Molecüle des gelösten Körpers (Salz) und ω / M_ω die Zahl W der Molecüle des Lösungsmittels (Wasser) bedeutet, welche zusammen die Lösung bilden, so wird unsere Gleichung:

$$\frac{p_\omega - p_s}{p_\omega} = \frac{S}{W}$$

oder

$$\frac{p_s}{p_\omega} = \frac{W - S}{W}.$$

Diese Gleichung verwirft Raoult, weil, wenn sie das wahre Gesetz enthielte, es Lösungen geben müsse, für welche $p_s = o$ wird, nämlich wenn $S = W$ ist und zieht die Gleichung

$$\frac{p_s}{p_\omega} = \frac{W}{W + S}$$

vor. Es ist aber offenbar erstens, dass für W sehr gross gegen S, d. h. für verdünnte Lösungen beide Formen zusammenfallen, zweitens, dass der Fall auf den sich Raoult's Einwand bezieht, weit ausserhalb des Gültigkeitsbereiches

seines Gesetzes liegt und drittens, dass, soweit ich sehe, wegen der beschränkten Löslichkeit eine Lösung, in welcher $W = S$ wäre, überhaupt nicht vorkommt. Es ist also wohl auch die erstere Form des Gesetzes, welche übrigens auch van't Hoff benutzte, gerechtfertigt.

Wir wissen nun, dass die Dampfspannung in einem Raume unabhängig ist von der Menge Flüssigkeit, welche mit dem Dampfe in Berührung ist; dieser Satz unterliegt aber einer gewissen Beschränkung, denn fragen wir nach der kleinsten Menge Salzlösung, welche in einen mit Dampf von der Spannung p_s erfüllten Raum gebracht, den Zustand nicht stört, so ist diese Menge dadurch bestimmt, dass sie die Zusammensetzung oder Concentration der Lösung von der Dampfspannung p_s darstellen muss, also mindestens ein S Molecül und n Molecüle des Lösungsmittels enthalten muss und es ist

$$n = \frac{W}{S}$$

und somit wird

$$p_s : p_\omega = n - 1 : n,$$

oder nach der Originalform des Gesetzes von Raoult:

$$p_s : p_\omega = n : n + 1.$$

Beide Gleichungen lassen eine einfache Deutung zu; wenn wir uns die Vorstellung der kinetischen Theorie der Gase vergegenwärtigen, dass in der Flüssigkeitsoberfläche ein Zustand dynamischen Gleichgewichts besteht zwischen der molecularen Bewegung der Dampf- und Flüssigkeitstheilchen. Die erstere Gleichung sagt dann aus, dass von den n Flüssigkeitstheilchen, welche in dem Elemente der Lösung vorhanden sind und welche an der Verdampfung theilnehmen können, eines inactiv, also gefesselt ist und dass hierdurch die Dampfspannungsverminderung veranlasst ist. Diese Anschauung kann für die Hydrattheorie gedeutet werden.

Die zweite Gleichung sagt aus, dass, wenn wir Elemente gleicher Molecülzahlen von Lösung und Lösungsmittel vergleichen, die Dampfspannung der ersteren in demselben Maasse verringert ist, gegen die zweite als die Zahl verdampfbarer Molecüle verringert ist. Die Annahme eines unelastischen Zusammenstosses der Dampfmolecüle mit den S Molecülen in

der Flüssigkeit, würde im Stande sein, das Raoult'sche Gesetz kinetisch zu erklären. Auf die verschiedene Grösse der S Molecüle kommt es dabei nicht an, wenn nur die Weglänge ihrer fortschreitenden Bewegung gross ist, gegen die Grösse der Molecüle selbst.

Bei dem unentwickelten Zustande der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten, genügt es, diese Anschauungen anzudeuten und darauf hinzuweisen, dass auch die anomale Dampfspannungsverminderung der Electrolyte sich anf diesem Wege wird erklären lassen, ohne nothwendig eine Dissociation anzunehmen.

Man mag über die gegebene Erklärungsweise der Raoult'schen Dampfspannungsgesetze denken, wie man will, unberührt von ihr bleibt die Ableitung der osmotischen Sätze aus den Dampfspannungen. Kehren wir zu diesen zurück, so wollen wir, bevor die Berechnung der osmotischen Drucke der Lösungen gegen reines Lösungsmittel für welche uns die nöthigen Daten zur Hand sind, gegeben wird, noch die sich aufdrängenden Schlüsse über die Lösungswärmen folgern.

Die Lösungswärme einer gegebenen Salzmenge zu concentrirter Lösung in 1 g Wasser, war:

$$J \,.\, l_c = J(\varrho_\omega - \varrho_c) = R\,\vartheta^2 \cdot \frac{d}{d\vartheta} \log \frac{p_\omega}{p_c}$$

indem wir die Grössen l, ϱ und R auf 1 g der lösenden Substanz berechneten. Nun war nach Gleichung (6):

$$P_c \,.\, V = R\,\vartheta \log \frac{p_\omega}{p_c},$$

also:

$$\vartheta \frac{d(P_c \,.\, V)}{d\vartheta} = P_c \,.\, V + R\,\vartheta^2 \cdot \frac{d}{d\vartheta} \log \frac{p_\omega}{p_c},$$

folglich:

$$J \,.\, l_c = \vartheta \cdot \frac{d(P_c V)}{d\vartheta} - P_c \,.\, V. \text{ [1]}$$

Diese Gleichung erinnert an eine bekannte aus der mechanischen Wärmetheorie; denn betrachten wir in ihr V als zweite unabhängige Variable, welche den Zustand des Systems bedingt, und entsinnen uns, dass V die Volumen-

1) Vgl. Pupin, l. c.

differenz zwischen V_c dem Volumen von 1 g Wasser in der Lösung oder auch des Salzes in derselben und S dem Volumen des trocknen Salzes bedeutete, so erkennen wir, dass in der Gleichung:

$$(7) \qquad J \, . \, l_c = (V_c - S) \, \vartheta \, . \, \frac{d P_c}{d \vartheta} - P_c (V_c - S),$$

das erste Glied ganz analog ist, dem Ausdruck für eine jede mit einer Volumenänderung verbundene Zustandsänderung also ganz analog dem Ausdruck für die Schmelz- oder Verdampfungswärme einer Substanz unter constantem Druck. Die Gleichung (7) stellt also die Lösungswärme dar, als Analogon zur inneren Verdampfungswärme einer Flüssigkeit, wenn wir diese von der ganzen Verdampfungswärme durch Abzug der nach Aussen geleisteten Arbeit nach dem Vorgange von Zeuner trennen. Da nun die Gleichung der mechanischen Wärmetheorie auf der Umkehrbarkeit des Processes beruht, so zeigt Gleichung (7), dass und warum der Lösungsvorgang so, wie er sich gewöhnlich vollzieht, nicht umkehrbar ist. Denn bei der Lösung kann eine gewisse äussere Arbeit $P_c (V_c - S)$, die osmotische Arbeit, geleistet werden; bei dem gewöhnlich gebräuchlichen Verfahren des Zusammenmischens von Salz und Wasser, wird dieselbe aber nicht geleistet, ihr calorisches Aequivalent muss also von der Wärme abgezogen werden, welche nach der Gleichung der mechanischen Wärmetheorie zu erwarten wäre. Allerdings könnten wir den Lösungsprocess so bewerkstelligen, dass die Gleichung der Zustandsänderung rein in Anwendung kommt. Denn denken wir uns trockenes Salz unter den Druck P_c gebracht, lassen dann das zu seiner Lösung nöthige Wasser zutreten, indem es jenen Druck überwindet, und fragen nun nach der Wärme, welche zur Constanterhaltung der Temperatur zuzuführen ist, so würde in diesem Falle die Gleichung:

$$J \, . \, Q = (V_c - S) \, . \, \vartheta \, . \, \frac{d P_c}{d \vartheta}$$

am Platze sein, sie enthält ausser der gewöhnlich beobachteten Lösungswärme auch noch die osmotische Arbeit.

Die Gleichung der Lösungswärme für eine verdünnte Lösung wird unter Einführung der durch Gleichung (6) definirten osmotischen Arbeit:

$$J . l_s = \vartheta . \int_0^1 \frac{d\Pi}{d\vartheta} . dy - \int_0^1 \Pi . dy$$

und hierin ist Π als Function der zu der gegebenen Salzmenge hinzugesetzten Wassermasse y zu betrachten. Ebenso wie im ersten Abschnitte sind auch hier zwei Integrationsintervalle zu unterscheiden, während des ersteren variirt y von 0 bis m_c, wenn m_c die Wassermasse bedeutet, welche die gegebene Salzmenge gerade zu lösen vermag; während dieses Intervalles ist $\Pi = \Pi_c$ und

$$\frac{d\Pi}{d\vartheta} = \frac{d\Pi_c}{d\vartheta} = \frac{\partial \Pi_c}{\partial S} . \frac{\partial S}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Pi_c}{\partial \vartheta}$$

worin, wie vorn, S die Sättigung bedeutet.

Im zweiten Intervalle, während y von m_c bis 1 zunimmt, ändert sich Π und $d\Pi/d\vartheta$ in complicirter, aber aus den Dampfspannungsbeobachtungen berechenbarer, Weise mit der Concentration, also auch mit y. Es wird also:

$$(7a) \qquad J . l_s = m_c . J . l_c + \vartheta \int_{m_c}^1 \frac{d\Pi}{d\vartheta} dy + \int_{m_c}^1 \Pi . dy.$$

Die hier durchgeführte Analyse sagt über die Natur des Zustandes, in welchen das Salz bei der Lösung übergeht, nichts Näheres aus. Nur soviel erhellt, dass das Salz, entsprechend der Menge des zu seiner Lösung verwendeten Wassers jedes beliebige Volumen innerhalb der Sättigungsgrenze annehmen kann. Das Salz ist also nicht volumenbeständig in der Lösung, und hierin liegt der Grund für das Zutreffen der Analogie mit dem Gaszustande, denn auch die Gase vermögen ja innerhalb der Verflüssigungsgrenze jedes beliebige Volumen anzunehmen. Die Analogie berechtigt aber nicht zur Annahme des wirklichen Vorhandenseins des Gaszustandes.

Bemerkenswerth ist, dass unsere Behandlung der Theorie der Lösungswärmen hervortreten macht, dass beim Lösungsprocess ein gewisser Betrag an äusserer Arbeit geleistet werden kann. Wir werden fragen müssen, welche Kräfte es denn sind, welche diese beträchtliche osmotische Arbeit leisten, und können die Antwort aus unseren Gleichungen ablesen. Denn

der osmotische Druck P tritt in unseren Gleichungen ganz ebenso auf, wie der Dampfdruck in der Gleichung der Verdampfungswärme; er ist wie dieser ein Oberflächendruck, welcher überall normal auf der Oberfläche des Salzes oder der Lösung wirken muss, um die Lösung bez. Verdünnung zu verhindern. Die Kräfte, welche diesen Druck überwinden, werden also ebenso wie die Dampfspannung als moleculare Druckkräfte kinetischen Ursprunges anzusehen sein.

6. In der folgenden Tabelle IV sind die Resultate der Berechnung der osmotischen Drucke und ihrer Temperaturzunahme für die wässrigen Lösungen von K Cl, K Br, K J, $NaNO_3$ und Na Cl zusammengefasst. Die erste Spalte enthält neben der Angabe des Salzes die Concentration in Vielfachen von n der Concentration der Normallösung; hierauf folgt unter s die Gewichtsmenge Salz in Grammen, welche in 1 g Wasser gelöst, die vorher angegebene Concentration gibt. p_s bezeichnet die Dampfspannung der Lösung bei 0° C. in mm Hg. Die Spalte, welche $(1/p_s . dp_s / d\vartheta)_{s=\text{const.}}$ überschrieben ist, stellt die Ungenauigkeit des Babo'schen Gesetzes dar; denn wenn letzteres streng gültig wäre, müssten die Zahlen dieser Columne constant sein; die Beobachtungen der Lösungswärmen setzten uns im ersten Abschnitt dieser Arbeit in den Stand die Abweichungen in Form einer Gleichung darzustellen; mit Hülfe der vorn angegebenen Constanten sind aus ihr die aufgeführten Zahlen berechnet. P_s enthält die osmotischen Drucke der Lösungen gegen reines Wasser bei 0° in (kg cm^{-2}) berechnet nach Gleichung (6), indem in ihr $V = V_s - S = 1$ cm³ gesetzt, also von der beim Lösen des Salzes auftretenden Volumencontraction abgesehen ist. Die in Gleichung (6) vorkommende Constante ist, wie vorn angegeben $R = 4{,}7095$ (kg cm / ° C.) gesetzt. Die letzte Spalte endlich gibt die Temperaturzunahme des osmotischen Druckes, also in kg cm^{-2} per ° C.; zu ihrer Berechnung dient die Gleichung (6a), die numerische Berechnung benutzt die Zahlen der Spalte $(1/p_s, dp_s/d\vartheta)_{s=\text{const.}}$

Tabelle IV.

Concentration	s	p_s	$\left[\frac{1}{p_s}\cdot\frac{dp_s}{d\vartheta}\right]_{s=\text{const.}}$	P_s	$\left[\frac{dP_s}{d\vartheta}\right]_{s=\text{const.}}$
KCl	0	4,620	0,07354	0	0
$\frac{1}{16}n$	0,00466 g	4,610	0,07354	2,572	0,0094
$\frac{1}{8}n$	0,00932 „	4,601	0,07354	5,142	0,0188
$\frac{1}{4}n$	0,01865 „	4,583	0,07353	10,28	0,0377
$\frac{1}{2}n$	0,0373 „	4,546	0,07354	20,69	0,0874
n	0,0746 „	4,472	0,07350	41,78	0,204
$2n$	0,1492 „	4,326	0,07340	84,35	0,489
$3,6n$	0,2686 „	4,113	0,07312	149,5	1,088
$3,83n$	0,285 „	4,083	0,07308	158,3	1,172
KBr					
$\frac{1}{16}n$	0,00744 g	4,611	0,07354	2,41	0,0088
$\frac{1}{8}n$	0,01488 „	4,602	0,07354	4,82	0,0177
$\frac{1}{4}n$	0,02975 „	4,584	0,07354	9,64	0,0354
$\frac{1}{2}n$	0,0595 „	4,548	0,07354	19,80	0,0725
n	0,119 „	4,476	0,07352	40,50	0,1741
$2n$	0,238 „	4,324	0,07340	84,98	0,491
$4n$	0,476 „	4,037	0,07287	173,2	1,509
$4,5n$	0,5355 „	3,962	0,07269	197,4	1,829
KJ					
$\frac{1}{16}n$	0,0104 g	4,610	0,07354	2,57	0,0094
$\frac{1}{8}n$	0,0208 „	4,601	0,07353	5,14	0,0316
$\frac{1}{4}n$	0,0415 „	4,582	0,07351	10,28	0,0762
$\frac{1}{2}n$	0,0830 „	4,544	0,07348	20,95	0,154
n	0,166 „	4,468	0,07343	42,93	0,299
$2n$	0,332 „	4,316	0,07332	87,30	0,603
$4n$	0,664 „	4,012	0,07302	181,30	1,333
$7,5n$	1,246 „	3,474	0,07241	366,5	2,796
$7,717n$	1,281 „	3,440	0,07238	378,7	2,879
$NaNO_3$					
$\frac{1}{16}n$	0,0053 g	4,611	0,07354	2,38	0,0087
$\frac{1}{8}n$	0,0106 „	4,602	0,07352	4,76	0,0431
$\frac{1}{4}n$	0,0212 „	4,585	0,07349	9,52	0,0992
n	0,0849 „	4,483	0,07335	38,44	0,3851
1,5	0,1274 „	4,423	0,07327	55,93	0,552
$4n$	0,3396 „	4,146	0,07303	139,1	1,1651
$8n$	0,6792 „	3,749	0,07314	268,5	1,491
$8,356n$	0,7094 „	3,712	0,07318	281,2	1,493
NaCl					
$\frac{1}{16}n$	0,00366 g	4,610	0,07353	2,79	0,0359
$\frac{1}{8}n$	0,00731 „	4,600	0,07350	5,59	0,0719
$\frac{1}{4}n$	0,01462 „	4,580	0,07346	11,19	0,144
$\frac{1}{2}n$	0,02925 „	4,540	0,07338	22,24	0,287
n	0,0585 „	4,460	0,07325	45,25	0,539
$2n$	0,1170 „	4,301	0,07307	91,80	0,941
$4n$	0,2340 „	3,930	0,07305	207,80	1,391
$5,9n$	0,3451 „	3,524	0,07343	348,3	1,409
$,072n$	0,3551 „	3,490	0,07347	360,7	1,411

Die Zahlenreihen dieser Tabelle erheischen einige wenige Bemerkungen. Uebersieht man die Reihe der osmotischen Drucke und vergegenwärtigt sich, dass diese Zahlen in kg cm^{-2}, also nahezu Atmosphären angegeben sind, so fällt ihre ausserordentliche Grösse auf; man erkennt daraus, dass es nur bei ausserordentlich grossen Verdünnungen gelingen kann, die osmotischen Drucke gegen reines Lösungsmittel direct unter Anwendung einer halbdurchlässigen Membran zu beobachten, denn keine Membran würde im Stande sein, die bei stärkeren Concentrationen auftretenden Drucke auszuhalten. Bei den starken Verdünnungen unterhalb der Normallösung sind die Drucke der Concentration nahezu proportional und nahezu bei allen wässrigen Salzlösungen einander gleich; bei den stärkeren Concentrationen sind die Abweichungen bedeutend.

Die Druckzunahmen mit der Temperatur $dP_s/d\vartheta$ zeigen nicht ein so gleichmässiges Verhalten, wie die Drucke selbst. Allerdings ist auch hier für eine Reihe von Salzen bei sehr starken Verdünnungen die Proportionalität erkennbar, oder mit anderen Worten, die Verdünnungswärmen dieser Salzlösungen ist verschwindend klein.

Eine merkliche Ausnahme machen die Lösungen von $NaNO_3$, welche nach den Beobachtungen des Hrn. Scholz bis zu den äussersten hier erreichten Verdünnungen noch merkliche Verdünnungswärmen ergeben. Die Druckzunahmen bei höheren Concentrationen zeigen ein unregelmässiges Verhalten; hierzu mag beitragen die Unsicherheit der Rechnung, auf welche schon vorn hingewiesen ist.

Aus den Druckzunahmen kann man rückwärts nach den Gleichungen (7) und (7a) wieder die Lösungswärmen berechnen; ich habe es nicht für nöthig gehalten, diese noch beizufügen, denn die Druckzunahmen sind ja aus den Lösungswärmen berechnet.

Die Berechnung der Zahlenreihen für Π_s und $d\Pi_s/d\vartheta$ benutzt die angegebenen Werthe der Dampfspannungen p_s. Diese sind in meiner letzten Arbeit direct gemessen nur bis zur Concentration der Normallösung; für geringere Concentration reichte die angewendete Beobachtungsmethode nicht aus. Um für die niedrigeren Concentrationen, für welche die Lö-

sungswärmen doch mit Sicherheit beobachtet sind, die Dampfspannung zu gewinnen, habe ich, wie aus der Spalte p_s ersichtlich, zwischen dem Werthe der Dampfspannung von reinem Wasser und der Normallösung linear interpolirt. Man muss fragen, ob die lineare Interpolation gerechtfertigt ist. Vom rein empirischen Standpunkte aus, wird niemand Bedenken tragen, zu schliessen, dass, wenn die Dampfspannungsverminderung bei den Concentrationen n, $2n$, $3n$ dem Salzgehalte proportional ist, sie auch zwischen den Concentrationen o und n sich linear ändert. Jedes Bedenken wird aber widerlegt durch den Nachweis, dass unter Annahme der linearen Interpolation die Berechnung der für verdünnte Lösungen beobachteten Lösungswärmen zeigt, dass die Abweichungen der Lösungen von dem von Babo'schen Gesetze mit abnehmender Concentration immer kleiner und kleiner werden oder in anderen Worten, dass der Ausdruck $1/p_s . dp_s/d\vartheta$ wie unsere Tabelle zeigt, mit abnehmender Concentration, immer näher und näher gleich wird dem Werthe, den er für reines Wasser hat. So zeigt also die aus den Lösungswärmen fliessende Berechnung, dass die Annahme, die Dampfspannung ändert sich proportional dem Salzgehalte innerhalb der Concentrationen o und n berechtigt ist.

Bei meinen Dampfspannungsmessungen hatte ich darauf hingewiesen, dass jene Messungen den von Arrhenius eingeführten Dissociationscoëfficienten als constant oder nur sehr wenig veränderlich mit der Concentration ergaben; dass also eine mit der Verdünnung zunehmende Dissociation nicht aus jenen Beobachtungen geschlossen werden dürfe. Gegen diese Bemerkung ist von berufenster Seite eingewendet, dass jene Concentrationen viel zu gross waren, als dass die Veränderlichkeit der Dissociation schon eingetreten wäre. Jetzt zeigt es sich aber, dass auch bis zu Verdünnungen von $\frac{1}{16}n$ der Dissociationscoëfficient aus den Dampfspannungen sich als constant berechnen lässt. Sollte auch bei dieser Verdünnung, also bei einer Lösung, welche z. B. nicht ganz 0,4 g NaCl auf 100 g Wasser enthält, die Veränderlichkeit der Dissociation noch nicht eingetreten sein, dieselbe vielmehr erst unterhalb dieser Grenze eintreten, da wo wir selbst unter den günstigsten Bedingungen mit dem Eiscalorimeter gar keine

Wärmetönungen mehr wahrnehmen können? Diese Annahme erscheint wenig wahrscheinlich und deshalb schliessen wir, dass, selbst wenn wir die Dissociationshypothese gelten lassen wollen, zur Erklärung des Umstandes, dass die Electrolyten eine ungefähr doppelt so grosse Dampfspannungsverminderung hervorbringen, als die Nicht-Electrolyte, wir doch nicht eine veränderliche Dissociation aus den Dampfspannungen folgern können, also nicht eine so einfache Annahme der Parallelität zwischen electrischem Leitvermögen und Dampfspannungsverminderung zugeben können, wie sie Arrhenius aufstellte.

Einen interessanten Einblick in die hier in Betracht kommenden Grössen, bildet die Berechnung der Arbeitsleistungen, welche die verschiedenen Salze leisten können, indem sie sich zu concentrirter Lösung in Wasser von 0° lösen. Um vergleichbare Zahlen zu erhalten, berechne ich diese Arbeiten für M g der Salze, wenn M das Moleculargewicht bedeutet, also für die sogenannten Gramm-Molecüle, und gebe diese Arbeitsleistungen in äquivalentem calorischen Maasse, also in Gramm-Calorien an. Dieselbe ist dann:

bei KCl	äquivalent	958,1	cal.
KBr	„	1014,0	„
KJ	„	1134,0	„
$NaNO_3$	„	778,2	„
NaCl	„	1373,0	„

Vergleichen wir damit die Arbeitsleistung, welche M_w g Wasser von 0° leisten können, indem sie in gesättigten Dampf gleicher Temperatur übergehen, so erhalten wir 535 cal. Die Arbeit, welche eine gegebene Zahl von Molecülen eines Salzes leisten kann, indem sie sich zu gesättigter Lösung in Wasser vertheilt, ist also erheblich grösser als die Arbeit, welche die gleiche Zahl Wassermolecüle zu leisten vermögen, indem sie in gesättigten Dampf gleicher Temperatur übergehen. Diese Arbeiten können noch sehr viel grösser werden. So zeigten die Lösungen von LiCl in Wasser eine ausserordentlich grosse Dampfspannungsverminderung; meine Beobachtungen gehen nur bis zur Concentration $10n$ und ergaben eine Dampfspannung $p_s = 2{,}128$ mm Hg. Bei gesättigter Lösung von der Concentration $15n$ würde man ungefähr die Dampfspannung $p_c = 0{,}5$ mm zu erwarten haben. Diese ausserordentlich kleine

Dampfspannung der gesättigten Lösung von LiCl, bedingt ihre Eigenschaft hygroskopisch zu sein. Für die osmotische Arbeit, welche beim Auflösen der Gramm-Molecüle LiCl zu concentrirter Lösung bei 0° geleistet werden kann, erhält man demnach eine Arbeit, welche etwa 4400 cal. äquivalent ist. Für Rohrzucker dagegen erhalte ich nach meinen Beobachtungen 613 cal. Will man dieselben Arbeitsgrössen für verdünnte Lösungen berechnen, so hat man unter Benutzung unserer Zeichen für 1 g des Lösungsmittels (vgl. Gleichung 7a):

$$\Pi_s = \int_0^1 \Pi \, . \, dy = m_c \Pi_c + \int_{m_c}^1 \Pi \, . \, dy$$

zu setzen, oder, indem man die Concentration $h = s/y$ einführt,

$$\Pi_s = m_c \, . \, \Pi_c + s \int_{h_s}^{H} \cdot \Pi \cdot \frac{1}{h^2} \cdot dh,$$

worin H die Concentration im Sättigungszustande h_s diejenige der schliesslich erreichten Verdünnung bezeichnet. Diese Gleichungen gelten für 1 g Lösungsmittel oder s g Salz; für die Gramm-Molecüle des Salzes wird die Arbeit also:

$$A = \frac{M_s}{s} \cdot \Pi_s = m_c \cdot \frac{M_s}{s} \cdot \Pi_c + M_s \cdot \int_{h_s}^{H} \Pi \cdot \frac{1}{h^2} \cdot dh.$$

Π ist unserer Tabelle gemäss als Function von h zu betrachten.

Diese Gleichung zeigt unmittelbar, dass die osmotische Arbeit, welche bei der Auflösung eines Stoffes in einem Lösungsmittel zu sehr verdünnter Lösung geleistet werden kann, im allgemeinen nicht nach der Avogadro'schen Hypothese berechenbar ist. Denn nehmen wir an, dass das Raoult'sche Dampfspannungsgesetz anwendbar auf die Lösung ist, so muss, wie wir vorn sahen, ausserdem noch die Bedingung erfüllt sein, dass der im Ausdruck für Π vorkommende $\log p_\omega / p = (p_\omega - p)/p_\omega$ gesetzt werden darf. Diese selbe Bedingung müsste auch für Π_c, welches in unserer Gleichung für die Auflösungsarbeit vorkommt, erfüllt sein, eine Bedingung, welche nur zutrifft, wenn p_c sich sehr wenig von p_ω unterscheidet, d. h. wenn die

Löslichkeit des Stoffes sehr gering ist. Die Fälle, bei denen beide Bedingungen erfüllt sind, sind selten.

Fassen wir die hauptsächlichsten Resultate in wenigen Sätzen zusammen, so können wir sagen:

1. Die Raoult'schen Dampfspannungsgesetze erscheinen erklärbar aus Anschauungen, welche der kinetischen Gastheorie entlehnt sind.

2. Aus den Sätzen der mechanischen Wärmetheorie folgt dann, dass, wenn zwei mischbare Flüssigkeiten verschiedener Dampfspannung in Diffusionsverbindung treten, ein Diffusionsdruck zwischen beiden statt haben muss, dessen Grösse aus der Dampfspannungsdifferenz berechenbar ist, wenn der Dampf der Mischung nur aus dem Dampfe einer der beiden Flüssigkeiten besteht.

3. Den hydrostatischen Druck, welcher jenem Diffusionsdruck gleich und entgegengesetzt ist, nennen wir mit van't Hoff den osmotischen Druck der Flüssigkeiten gegen einander.

4. Bei grossen Verdünnungen ist derselbe der relativen Dampfspannungsverminderung proportional, bei concentrirteren Lösungen sind die weiteren Glieder der Reihe für $\log(1 - (p_{\omega} - p_s)/p_{\omega})$ zu berücksichtigen.

5. Der Satz: „der osmotische Druck ist proportional der abluten Temperatur" gilt nur für die Temperaturen, bei welchen das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz für den Dampf des Lösungsmittels gilt. Ferner ist es auch bei diesen Temperaturen nur soweit gültig, als das Gesetz von von Babo als richtig angesehen werden kann.

6. Die beiden vorstehenden Sätze rechtfertigen innerhalb der angegebenen Grenzen die Analogie zwischen dem Gaszustande und dem der gelösten Materie; indessen darf daraus nicht der Gaszustand als wirklich bestehend für die gelöste Materie gefolgert und der osmotische Druck als Gasdruck und somit als kinetischer Natur angesehen werden.

7. Beim Auflösen eines Salzes in einem Lösungsmittel kann eine gewisse äussere Arbeit, die osmotische Arbeit, ge-

leistet werden. Bei dem gewöhnlich eingeschlagenen Verfahren des Zusammenmischens von Salz und Lösungsmittel wird dieselbe nicht geleistet und deshalb ist der Lösungsvorgang irreversibel.

8. Als diejenigen Kräfte, welche die osmotische Arbeit leisten, sind moleculare Druckkräfte kinetischen Ursprunges zwischen Salz und Lösungsmittel anzusehen.

Breslau, November 1891.

III. *Ueber Dispersion ultrarother Strahlen;* *von Heinrich Rubens.*

(Hierzu Tafel II—IV.)

Während man über die Aenderung des Brechungsexponenten mit der Wellenlänge im ultravioletten Theile des Spectrums durch die Untersuchungen von Esselbach[1]), Mascart[2]), Soret[3]) Sarasin[4]) und anderer hinreichend oriéntirt ist, sind Messungen der Dispersion im Ultrarothen bisher nur in geringer Zahl gemacht worden. Es existiren auf diesem Gebiete meines Wissens nur die Arbeiten der Hrn. Monton[5]) und Langley[6]), in welchen Dispersionsbestimmungen an Quarz, Flintglas und Steinsalz vorgenommen werden.

Hrn. Monton gelang es mit Hülfe eines wenig einfachen, aber sehr sinnreichen Verfahrens die Dispersion im Quarz und Flintglas bis 2,14 μ, also etwa bis zu der dreifachen Wellenlänge der Linie a zu verfolgen, während Hr. Langley an der Hand der von ihm ersonnenen Methode, welche im Wesentlichen auf der Vergleichung des Diffractions- und Dispersionsspectrums beruht, seine Messungen im Steinsalz bis 5,3 μ, also nahezu der zehnfachen Wellenlänge der grünen E-Linien ausdehnen konnte.

Dieses werthvolle Resultat konnte jedoch nur durch Anwendung ausserordentlicher Hülfsmittel erreicht werden. Die Benutzung eines eigens zu diesem Zweck hergestellten Rowland'schen Gitters und einer Wärmequelle von ungewöhnlich grosser Energie, sowie eine bisher unübertroffene Empfindlichkeit des Bolometer waren bei diesen Versuchen unerlässlich.

---

1) Esselbach, Pogg. Ann. **98**. p. 513 und p. 527, 1865.
2) Mascart, Ann. de l'école **1**. p. 263. 1864 u. **4**. p. 7. 1867.
3) Soret, Ann. de Chim. et de Phys. (5) **11**. p. 72. 1875.
4) Sarasin, Arch. des sc. phys. (3) **10**. p. 303. 1883.
5) Monton, Compt. rend. p. 1078 und 1189. 1879.
6) Langley, Wied. Ann. **22**. p. 598, 1884 und Ann. de Chim. et de Phys. (6) **9**. p. 433. 1886.

Bei den nachfolgenden Messungen habe ich mich einer Methode bedient, welche auch bei Anwendung geringerer Hülfsmittel es gestattet, den Gang der Dispersion im Ultrarothen messend zu verfolgen und es möglich macht, zu noch grösseren Wellenlängen fortzuschreiten.

Beschreibung der Methode.

Die Strahlen einer intensiven Lichtquelle A wurden durch eine Linse (l_1) parallel gemacht und dann unter 45°

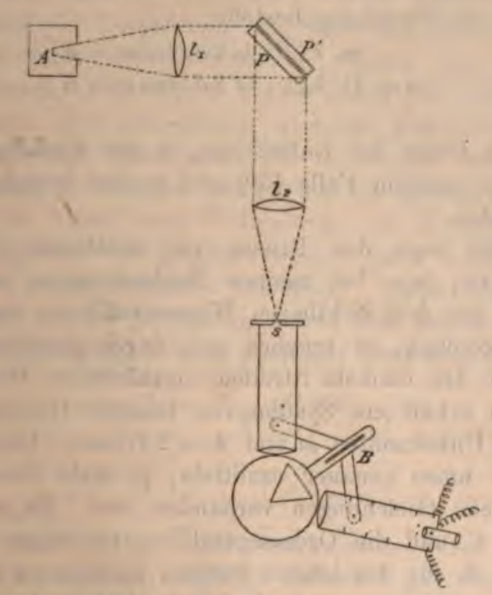


Fig. 1.

an zwei aufeinander gepressten ebenen Glasplatten (P und P') reflectirt, zwischen welchen sich eine planparallele Luftschicht von geringer Dicke befand. Durch eine zweite Linse (l_2) wurden die Strahlen in der Spaltebene eines Spectrometers wieder vereinigt. Es entstehen auf diese Weise vier Bilder der Lichtquelle, welche ihren Ursprung von den vier reflectirenden Flächen der beiden Glasplatten P und P' haben. Die beiden mittleren Bilder, welche von der Reflexion an der Rückwand der vorderen und der Vorderwand der hinteren Platte herrühren und wegen der geringen Dicke der Luft-

schicht für das Auge vollkommen zusammenfallen, bedecken den Spalt (s) des Spectrometers gleichmässig auf seiner ganzen Länge, während die beiden übrigen Bilder rechts und links von dem Spalt sichbar sind.

Im Fernrohr des Instrumentes gewahrt man alsdann das Spectrum durchzogen von verticalen Interferenzstreifen, welche von dem Gangunterschied der beiden an den Grenzflächen der dünnen Luftschicht reflectirten Strahlenbüschel herrühren, und zwar erscheinen die Strahlen aller Wellenlängen λ ausgelöscht, für welche die Beziehung besteht:

$$m \,.\, \lambda_m = 2\,d \,.\, \cos \alpha = K$$
$$(m+1) \,.\, \lambda_{m+1} = 2\,d \,.\, \cos \alpha = K$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

worin d die Dicke der Luftschicht, α den Einfallswinkel der Strahlen (in unserem Falle 45^0) und m eine bestimmte ganze Zahl bedeuten.

Calibrirt man das Prisma im sichtbaren Gebiet auf Wellenlängen, was bei meinen Beobachtungen regelmässig mit Hülfe der drei sichtbaren Wasserstofflinien und der Natriumlinie geschah, so ergeben sich durch graphische Interpolation die den dunkeln Streifen zugehörenden Wellenlängen λ und man erhält ein System von linearen Gleichungen mit den beiden Unbekannten m und $K = 2\,d \,.\, \cos \alpha$. Diese Grössen lassen sich umso genauer ermitteln, je mehr Streifen, also auch je mehr Gleichungen vorhanden sind. Es sei nun die Constante K und die Ordnungszahl m für einen beliebigen Streifen, z. B. für den letzten Streifen im Roth an der Grenze des sichtbaren Spectrums nach dieser Methode berechent, so ist die Wellenlänge des ersten Streifens im Ultraroth gegeben $\lambda_{m-1} = K/(m-1)$, die des zweiten $\lambda_{m-2} = K/(m-2)$ und so fort.

Wenn man das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs durch den temperaturempfindlichen Widerstand eines Linearbolometers ersetzt, so gelingt es ohne Schwierigkeit, die Lage dieser Interferenzstreifen auch im Ultrarothen genau zu bestimmen. Man erhält so eine Reihe von Brechungsexponenten, von welchen die zugehörigen Wellenlängen bekannt sind und ist in der Lage, den Gang der Dispersion auch im Ultrarothen zu verfolgen.

Beschreibung der Apparate.

Bei meinen Untersuchungen standen mir zwei Spectrometer gleicher Construction von Schmidt und Hänsch zur Verfügung. Das eine davon wurde lediglich zu optischen Messungen benutzt; es wurden mit Hülfe desselben die brechenden Winkel sämmtlicher Prismen, sowie der absolute Betrag des Brechungsexponenten für eine Linie des Spectrums ermittelt. Das andere Instrument diente ausschliesslich zur Bestimmung der Dispersion. An Stelle des Oculars im Beobachtungsfernrohr enthielt dasselbe ständig das Linearbolometer, dessen Construction weiter unten beschrieben werden soll. Durch eine automatisch wirkende Vorrichtung (B) war der Prismentisch gezwungen, die Drehungen des Bolometerarmes genau in halbem Betrag mit zu machen, sodass das Prisma, für irgend eine Wellenlänge auf Minimum der Ablenkung gestellt, die Minimumstellung auch in allen übrigen Lagen des Bolometerarmes beibehielt. Diese Einrichtung gestattete es, aus der Ablenkung α und dem brechenden Winkel C den Brechungsexponenten nach der einfachen Formel:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{C+\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$$

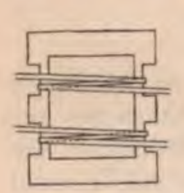
zu berechnen.

An dem Theilkreis des Instrumentes waren Ablesungen bis auf 10 Secunden möglich. Indessen geschahen aus rein practischen Gründen die Einstellungen des Bolometerarmes auf bestimmte Winkel gewöhnlich mit Hülfe einer mit Trommeltheilung versehenen Mikrometerschraube. Durch Vergleichung mit der Kreistheilung des Instrumentes waren die Kopftheile derselben genau im Bogenmaass ausgewerthet; trotzdem wurden während einer jeden Versuchsreihe auch Ablesungen am Theilkreis vorgenommen, um die Richtigkeit der Einstellung zu controliren. Es ergaben sich hierbei niemals Abweichungen, welche eine Minute überstiegen.

Die Fassung für die Bolometerwiderstände war einem im Besitze des Instituts befindlichen Langley'schen Bolometer entnommen. Sie bestand aus einem Tubus von Ebonit,

auf dessen Innenfläche vier Contactstifte angebracht waren, die mit vier aussen befindlichen Klemmschrauben in leitender Verbindung standen, einem Ocular und einigen kreisförmigen Dosen aus Hartgummi, in der Mitte mit rechteckigem Ausschnitt versehen, in welche die Bolometerwiderstände einzusetzen waren. Die vier Enden der beiden Widerstände, von denen sich der zur Belichtung bestimmte genau in der Mitte der Dose, also gegenüber den Diaphragmen befand, während der andere seitlich angebracht war, wurden durch kreisrunde Metallhülsen gebildet. Diese konnten über die erwähnten vier Contactstifte geschoben werden, wodurch gleichzeitig die Befestigung der Dose und leitende Verbindung der Drahtenden mit den äusseren Klemmen bewirkt wurde.

Als Material für die Bolometerwiderstände wurde nach Maassgabe des Umstandes, ob in dem betreffenden Fall auf grosse Empfindlichkeit oder geringe Breite des Bolometers besonderer Werth zu legen war, ein ca. 0,04 mm dicker Eisendraht oder ein Platindraht vom Durchmesser 0,005 mm verwendet. Bei den untersuchten Stoffen mit hoher Dispersion, bei welchen sich die durch den Spalt eintretende Energiemenge auf eine sehr grosse Fläche vertheilt, leistete mir ein Eisenbolometer wegen seiner hohen Empfindlichkeit gute Dienste. Der erwähnte Eisendraht wurde auf einem kleinen Ambos platt geschlagen, sodass er eine Breite von ungefähr 0,2 mm erhielt und dann auf ein rechteckiges Rähmchen von Glimmer in der in der nebenstehenden Figur angedeuteten Weise in dreifacher Lage aufgezogen. Danach wurde das Rähmchen in der Dose befestigt und die vier Drahtenden mit den Messinghülsen verlöthet. Die Schwärzung des Belichtungswiderstandes geschah mittelst Kerzenflamme.



Bei den Körpern mit schwacher Dispersion ist bei gleicher Spaltbreite die Energie an den einzelnen Stellen des Spectrums grösser; es sind andererseits die Interferenzstreifen unter sonst gleichen Umständen einander näher als bei stark dispergirenden Medien. Hier erscheint also die Anwendung eines weniger empfindlichen Bolometers zulässig, die eines schmäleren geboten. Es zeigte sich, dass das Platinbolometer in letzterer Beziehung

allen Anforderungen entsprach und eine für diese Versuche ausreichende Empfindlichkeit besass.

Die Anfertigung dieser Bolometerwiderstände verdanke ich der Güte und Geschicklichkeit des Hrn. B. W. Snow. Der Wollastondraht wurde in seiner Silberhülle zu einem feinen Bände ausgehämmert, dann das Silber durch Säure entfernt, schliesslich zwei geradlinige Stücke des übrig bleibenden äusserst feinen Platinstreifchens auf einem Glimmerrähmchen befestigt und durch Löthcontact mit den Metallhülsen verbunden.

In der folgenden Tabelle sind die für die beiden Bolometer charakteristischen Grössen zusammengestellt.

	Bolometer Nr. I dreifach a. Eisen	Bolometer Nr. II einfach. a. Platin
Breite in Millimetern	0,6	0,09
Scheinbare Breite in Minuten	6	1
Widerstand eines Zweiges in S. E.	3	80
Bei gewöhnlicher Stärke des Hülfsstromes entsprach 1 mm Ausschlag einer Temperaturerhöhung von	$5 \cdot 10^{-6}$ Celsiusgrad	$8 \cdot 10^{-6}$ Celsiusgrad
Eine Kerze in 1 m Entfernung gab einen Scalenausschlag von	600 mm	120 mm

Durch Combination der beiden letzten Angaben erkennt man, dass sich das Platinbolometer unter dem Einfluss der gleichen Bestrahlung bedeutend weniger stark erwärmt als das Eisenbolometer. Es ist mir nicht gelungen, für diese Thatsache eine ausreichende Erklärung zu finden.

Das benutzte Galvanometer Thomson'scher Construction, dessen Vorzüge ich bei früheren Untersuchungen bereits hervorzuheben Gelegenheit hatte, war durch Einführung einer Quarzsuspension für den vorliegenden Zweck erheblich verbessert worden. Waren die 4 Rollen hintereinander geschaltet, der Gesammtwiderstand also gleich 80 Ohm, so entsprach bei einem Scalenabstand von 5 m 1 mm Ausschlag einer Stromintensität von $3{,}2 \cdot 10^{-10}$ Amp. Es bedeutet dies keineswegs das Maximum der erreichbaren Empfindlichkeit; jedoch erwies sich dieselbe in allen Fällen als ausreichend und eine Steigerung wäre oft lästig gewesen. Bei der angewandten Stärke

der Astasirung hielt sich der Nullpunkt des Instruments durch mehrere Monate soweit constant, dass am Richtmagneten keine Aenderungen vorgenommen zu werden brauchten. Auch habe ich keinerlei Umstände wahrgenommen, welche auf eine elastische Nachwirkung des Fadens hätten schliessen lassen, obwohl die Länge desselben nur 1,5 cm betrug.

Als Lichtquelle diente bei sämmtlichen Versuchen der Linnemann'sche Zirkonbrenner, welcher gegenüber der Gaslampe den Vorzug grösserer Energie und bei einigermaassen unverändertem Gasdruck im Gegensatz zu dem electrischen Bogenlicht, eine nahezu vollkommene Constanz besitzt. Auf diese letztere Eigenschaft war aber bei den hier beschriebenen Versuchen besonderer Werth zu legen; denn kleine Aenderungen in der Lage des leuchtenden Punktes, wie solche bei Bogenlampen fast unvermeidlich sind, müssen bei der geschilderten Versuchsanordnung eine Verschiebung des auf dem Spalt des Spectrometers von der Lichtquelle entworfenen Bildes bewirken, wodurch die an einer Stelle des Spectrums beobachtete Strahlung in nicht zu übersehender Weise geändert wird. Durch diese Schwankungen aber kann das zu beobachtende Phänomen vollkommen verdeckt werden.

Nächst dem Bolometer wird der wichtigste Theil des Apparates durch die beiden ebenen Platten gebildet, welche die dünne Luftschicht zwischen sich einschliessen. Bei der grösseren Zahl der folgenden Versuche bediente ich mich der beiden von Schmidt und Hänsch seiner Zeit für Hrn. R. Ritter angefertigten Platten, von denen die eine aus Quarz, die andere aus Glas bestand. Eine ausführliche Beschreibung der Platten, sowie des Schraubenapparats, welcher dazu diente, die Dicke der Luftschicht beliebig variiren zu können, ist von Hrn. R. Ritter bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Phasenänderung des Lichts bei Reflexion an Glas und Quarz gegeben worden.[1]) Ich kann mich daher darauf beschränken, Hrn. Ritter's Urtheil über die vorzügliche Ausführung der Platten zu bestätigen, bei welchen es ohne Schwierigkeit zu erreichen war, auf ihrer gesammten Fläche von $(4^1/_2 \text{ cm})^2$ die gleiche Farbe zu erzielen. Um Complicationen, welche durch Doppelbrechung in der Quarzplatte ent-

1) R. Ritter, Wied. Ann. **36.** q. 236. 1889.

stehen könnten, zu vermeiden, wurde der Apparat so benutzt, dass stets die Glasplatte dem Spectrometer und der Lichtquelle zugekehrt war.

Bei der Untersuchung der stark wärmedurchlässigen Stoffe, wie Flussspath und Steinsalz, bei welchen die Möglichkeit vorhanden war, die Messungen bis zu Strahlen von beträchtlicher Wellenlänge auszudehnen, wurden sämmtliche Glastheile des Apparats durch entsprechende Stücke aus Steinsalz oder Flussspath ersetzt. An Stelle der beiden Concentrationslinsen aus Crownglaus (l_1 und l_2 Fig. 1) gelangten solche aus Steinsalz zur Anwendung, während die Objective des Spectrometers durch Flussspathlinsen von passender Brennweite gebildet wurden. Auch war bei diesen Versuchen die eine der beiden ebenen Platten, welche alle in das Spectrometer gelangenden Strahlen unter schiefem Winkel zweimal zu durchdringen hatten, durch eine Flussspathplatte von (2 cm)^2 Fläche und 6 mm Dicke ersetzt. Durch die geringere Grösse der Platte fielen zwar die Ausschläge in den für Glas wärmedurchlässigen Gebieten des Spectrums erheblich kleiner aus, hingegen konnten alsdann die Messungen so weit ausgedehnt werden, als die Lichtquelle ausreichend Energie gab.

Die Versuche.

Zur Untersuchung gelangten im Ganzen 16 Stoffe, nämlich 5 Crowngläser von verschiedener Zusammensetzung und möglichster Mannigfaltigkeit der optischen Eigenschaften, 4 Flintgläser mit wachsendem Bleigehalt, ferner Wasser, Xylol, Benzol, Schwefelkohlenstoff und schliesslich Quarz, Steinsalz und Flussspath.

Die Flussspathpräparate waren mir von der optischen Werkstätte von Carl Zeis, die sämmtlichen Gläser von der Fabrik von Schott und Genossen geliefert, und ich hatte es daher nur mit Stoffen von wohl definirter chemischer Zusammensetzung zu thun, die sich hinsichtlich ihrer optischen Eigenschaften in grosser Annäherung jederzeit reproduciren lassen. [1]) Gern erfülle ich bei dieser Gelegenheit die angenehme

1) Auf meine Anfrage hin hat mir Hr. Dr. Schott in bereitwilligster Weise die chemische Zusammensetzung der untersuchten Gläser mitgetheilt. Einige dieser Daten, welche für die Arbeit nicht ohne Interesse sind, werde ich in meinem Nachtrag wiedergeben.

Pflicht, den Hrn. Dr. Schott und Dr. Czapski für die ausserordentliche Liebenswürdigkeit und Liberalität, mit welcher sie meine Untersuchungen durch Ueberlassung des genannten werthvollen Materials unterstützt haben, meinen besten Dank auszusprechen.

Sämmtliche untersuchten festen Körper waren in Prismen von meist 60° brechendem Winkel und 4—5 cm Kantenlänge vorhanden. Zur Untersuchung der Flüssigkeiten diente ein grosses Flüssigkeitsprisma mit planparallelen Crownglaswänden.

Da bei der Bestimmung der Dispersion an jedem der genannten 16 Stoffe die Art und Reihenfolge der Manipulationen vollkommen die nämliche war und da ferner stets das gleiche Rechenverfahren in Anwendung gebracht wurde, genügt es, die Beschreibung der Einzelheiten an einen Beispiel durchzuführen und von allen übrigen Substanzen nur die Resultate der Beobachtung und Rechnung in Form von Tabellen und graphischen Darstellungen wiederzugeben. Wir sind hierzu berechtigt, da die Uebereinstimmung der Versuchsreihen in sich bei allen Körpern eine nahezu gleich vollkommene war.

Wir wählen als Beispiel:

Prisma Nr. 2.

Schweres Silicat Flint, schwach gelblich gefärbt.
Schmelznummer der Fabrik: O. 500.
Brechender Winkel: $C = 59° 59'$.

Die Ablesungen am Theilkreis des Instrumentes ergaben:

für $H\gamma$ die Ablenkung $\alpha = 66° 46'$,
„ F „ „ $\alpha = 64° 37'$,
„ D „ „ $\alpha = 62° 15'$,
„ C „ „ $\alpha = 61° 22'$.

Interferenzstreifen wurden im sichtbaren Gebiet durch Oculareinstellung beobachtet bei α gleich:

Vor Beginn der Versuchsreihe:	Nach Beendigung der Versuchsreihe:
66° 15′	66° 17′
64° 44′	64° 45′
63° 30′	63° 29′
62° 26′	62° 25′
61° 30′	61° 30′

Während des etwa $1^1/_2$ stündigen Zeitintervalls, welches zwischen den Beobachtungen der ersten und zweiten vor-

stehenden Serie von Streifenablesungen lag, wurden die bolometrischen Messungen im Ultrarothen ausgeführt. An der Uebereinstimmung der nebeneinander stehenden Zahlen erkennt man, dass sich während der Versuchsdauer die Dicke der Luftschicht nicht wesentlich änderte, eine Beobachtung, die ich auch in allen übrigen Versuchsreihen bestätigt fand.[1])

Aus der bekannten Wellenlänge der vier beobachteten Spectrallinien ergeben sich die den fünf Interferenzstreifen zukommenden Wellenlängen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0{,}446\,\mu \\ \lambda_2 &= 0{,}484\,\text{,,} \\ \lambda_3 &= 0{,}527\,\text{,,} \\ \lambda_4 &= 0{,}579\,\text{,,} \\ \lambda_5 &= 0{,}644\,\text{,,} \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Ordnungszahl des ersten Streifens im Ultraroth mit m, so folgt:

$$0{,}644\,(m + 1) = 0{,}446\,(m + 5)$$

und

$$0{,}579\,(m + 2) = 0{,}484\,(m + 4)$$

hieraus durch Addition:

$$\begin{aligned} 1{,}223\,m + 1{,}802 &= 0{,}930\,m + 4{,}166 \\ 0{,}323\,m &= 2{,}334 \\ m &= 7{,}96 \end{aligned}$$

Wir erhalten also 8 als Ordnungszahl des ersten ultrarothen Streifens und für die Constante K aus sämmtlichen Streifenablesungen die Werthe:

$$\begin{aligned} K = 0{,}644 \,.\, 9 &= 5{,}796\,\mu \\ 0{,}579 \,.\, 10 &= 5{,}790\,\text{,,} \\ 0{,}527 \,.\, 11 &= 5{,}797\,\text{,,} \\ 0{,}484 \,.\, 12 &= 5{,}808\,\text{,,} \\ 0{,}446 \,.\, 13 &= 5{,}798\,\text{,,} \\ \hline \text{Mittel} &= 5{,}796\,\mu \end{aligned}$$

Die Beobachtungen im Ultrarothen wurden in der Weise angestellt, dass man die Stellung des Bolometerarmes, an der Grenze des sichtbaren Spectrums beginnend, mit Hülfe der erwähnten Alhidadenschraube um bestimmte Winkel verschob und die an der betreffenden Stelle des Spectrums vorhandene Energie durch einen Galvanometerausschlag feststellte. War man im Ultrarothen bis an die Grenze der messbaren Aus-

1) Aenderungen des Plattenabstandes während einer Versuchsreihe konnten in einigen Fällen mit Sicherheit constatirt werden; sie erreichten jedoch nicht den Betrag von 0,5 Proc.

schläge vorgedrungen, so wurden die gesammten Beobachtungen in umgekehrter Reihenfolge wiederholt. Die Uebereinstimmung der für gleiche Winkelstellungen des Bolometerarmes beobachteten Ausschläge gibt dann ein Urtheil über den glatten Verlauf der Versuchsreihe. Da sich bei diesen und den folgenden Beobachtungen niemals wesentliche Unterschiede in den entsprechenden Ausschlägen ergaben, habe ich mich bei einer Reihe von späteren Bestimmungen auf die vorher erwähnte Controle der unveränderten Lage der sichtbaren Streifen beschränkt.

Die erste Spalte der folgenden Tabelle enthält die Winkelstellungen des Bolometerarmes, bei welchen die in der zweiten und dritten Spalte gegebenen Ausschläge gemessen wurden, und zwar sind die beiden Reihen in der bereits angedeuteten, in Bezug auf die Zeit symmetrischen Weise beobachtet.

Die Messungen wurden mit Bolometer Nr. 1 ausgeführt. Wegen der starken Dispersion des Prismas und der damit zusammenhängenden beträchtlichen Breite der Interferenzstreifen war es ausreichend, die Energiemessungen in Winkelabständen von je acht Minuten aufeinander folgen zu lassen. Bei allen andern Stoffen war die Zahl der Energiemessungen pro Grad eine grössere. Bei einzelnen (z. B. Flussspath und Wasser) musste im Spectrum minutenweise vorgegangen werden, um trotz geringer Dispersion die Interferenzstreifen mit gewünschter Genauigkeit zu erhalten.

α	J_1	J_2	Mittel J	α	J_1	J_2	Mittel J
61° 2′	29	30	30	58° 38′	320	310	315
60° 54′	20	22	21	30′	250	266	258
46′	8	9	9	22′	120	125	123
38′	16	18	17	14′	170	170	170
30′	41	38	40	6′	325	325	325
22′	59	64	62	57° 58′	345	365	355
14′	45	50	48	50′	270	273	272
6′	21	19	20	42′	110	117	114
59° 58′	31	28	30	34′	57	63	60
50′	90	95	93	26′	87	85	86
42′	110	107	109	18′	112	110	111
34′	80	75	78	10′	110	112	111
26′	40	41	41	2′	84	87	86
18′	110	117	114	56° 54′	67	67	67
10′	182	182	182	46′	50	46	48
2′	150	148	149	38′	27	27	27
58° 54′	70	70	70	30′	10	9	10
46′	170	175	173	22′	1	3	2

In Fig. 1 Taf. II ist der Inhalt dieser Tabelle in graphischer Form wiedergegeben. Die Winkelstellungen α des Bolometerarmes sind als Abscissen, die Ausschläge J als Ordinaten aufgetragen. Die Curve $J = f(\alpha)$ weist sechs scharf ausgeprägte Minima und ebensoviele Maxima auf, welche den Stellen kleinster und grösster Energie im Spectrum entsprechen. Da die Maxima in der Figur nicht weniger deutlich hervortreten als die Minima, wurden auch diese zur Bestimmung der Dispersion verwendet; die den Abscissen der Maxima zukommende Wellenlänge ist bekanntlich:

$$\lambda = \frac{K}{n + \frac{1}{2}}$$

wenn n und $n + 1$ die Ordnungszahlen der benachbarten Minima sind.

Man erkennt ferner, dass die Streifenabstände in der Nähe von $\alpha = 59^{0}$ ein Minimum erreichen und von da mit wachsender Wellenlänge wieder zunehmen. Diese Erscheinung tritt nicht bei allen Stoffen ein; wir werden später hierauf zurückkommen.

Aus Gründen der einfachen Darstellung haben wir bisher die Minima und Maxima, d. h. die tiefsten und höchsten Punkte der Curve $J = f(\alpha)$ als die charakteristischen bezeichnet, für welche die Gleichungen:

$$(1) \quad m . \lambda = K, \quad \text{resp.} \quad (2) \quad (m + \tfrac{1}{2}) \lambda = K$$

gelten. Mit grosser Annäherung ist dies in der That der Fall; streng erfüllt wären die Gleichungen (1) und (2) für die Abscissen der Minima und Maxima jedoch nur dann, wenn in dem untersuchten Spectrum, von der Wirkung der Interferenz abgesehen, die Energievertheilung eine vollkommen gleichmässige wäre. In dem vorliegenden Fall aber bedingt das Anwachsen der mittleren Energie im ersten Theil der Curve eine Verschiebung der Minima nach grösseren, der Maxima nach kleineren Winkeln; andererseits erfolgt aus ähnlichem Grund auf dem absteigenden Theil der Curve eine Verschiebung der Minima und Maxima im entgegengesetzten Sinne.

Von diesen an und für sich geringfügigen Fehlern kann man sich jedoch durch Anwendung des folgenden Verfahrens leicht frei machen. Man construire die innere und äussere

Enveloppe der Curve $J = f(\alpha)$. — Die Linie $R = f(\alpha)$, welche die Energievertheilung im Spectrum darstellt, wenn keine Interferenzstreifen vorhanden sind, wird mit ausreichender Schärfe erhalten, wenn man an jeder Stelle ihre Ordinaten dem arithmetischen Mittel derjenigen der beiden Enveloppen gleich macht. Die gesuchten charakteristischen Punkte sind alsdann diejenigen, an welchen die Curve $J = f(\alpha)$ mit der senkrecht darunter oder darüber liegenden $R = f(\alpha)$ gleiche Richtung hat. Es gelingt leicht, die Genauigkeit in der Bestimmung der Lage dieser Punkte soweit zu treiben, dass die hierbei noch vorkommenden Fehler gegen die Ungenauigkeiten der übrigen Messungen klein sind.

Die nachstehende Tabelle enthält für das untersuchte Prisma die in der eben beschriebenen Weise corrigirte Lage α der Minima (a) und Maxima (b), ferner die zugehörigen, aus α und C bestimmten Brechungsindices n, sowie die entsprechenden, mit Hülfe der Constanten $K = 5{,}796\,\mu$ berechneten Wellenlängen λ. Der Vollständigkeit halber sind die vier beobachteten sichtbaren Linien nochmals mit aufgeführt.

Benennung	α	n	λ	Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	66° 46′	1,7884	0.434 μ	a_3	59° 27′	1,7274	0.966 μ
F	64° 37′	1,7714	0.486 „	b_3	11′	1,7250	1.054 „
D	62° 15′	1,7517	0.590 „	a_4	58° 54′	1,7227	1.159 „
C	61° 22′	1,7442	0.656 „	b_4	37′	1,7200	1.278 „
a_1	60° 44′	1,7387	0·724 „	a_5	20′	1,7176	1.449 „
b_1	24′	1,7359	0.773 „	b_5	57° 57′	1,7144	1.657 „
a_2	4′	1,7329	0.828 „	a_6	35′	1,7110	1.932 „
b_2	59° 46′	1,7303	0.892 „	b_6	8′	1,7070	2.316 „

In Fig. 6b ist mit Benutzung dieser Zahlen die Dispersionscurve des Prismas, $n = f(\lambda)$ entworfen.

Bevor wir uns jedoch der Besprechung derselben zuwenden, wollen wir erst die in gleicher Weise erhaltenen Dispersionstabellen der übrigen Stoffe folgen lassen.

Die zugehörigen graphischen Darstellungen finden sich in den Figuren 2—7 und zwar enthalten die Figuren 2 und 3 die Energiecurven $J = f(\alpha)$ für zwei weitere Stoffe, nämlich Steinsalz und Schwefelkohlenstoff. In den Figuren 4—7 sind die sämmtlichen Dispersionscurven $n = f(\lambda)$ wiedergegeben.

Prisma Nr. 1.

Schwerstes Silicat Flint, stark gelb gefärbt.

Schmelznummer: S. 163.

Brechender Winkel: 45° 0′.

$K = 5{,}924\,\mu$; a_1 ist 8. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	50° 58′	1,9414	0.434 μ
F	49° 25′	1,9174	0.485 „
D	47° 38′	1,8897	0.590 „
C	56° 54′	1,8781	0.656 „
a_1	22′	1,8696	0.740 „
b_1	8′	1,8660	0.790 „
a_2	45° 52′	1,8616	0.846 „
b_2	38′	1,8579	0.912 „
a_3	25′	1,8542	0.978 „
b_3	14′	1,8515	1.085 „
a_4	2′	1,8483	1.185 „
b_4	44° 49′	1,8446	1.316 „
a_5	37′	1,8418	1.481 „
b_5	23′	1,8381	1.692 „
a_6	8′	1,8337	1.975 „
b_6	43° 50′	1,8289	2.368 „

Prisma Nr. 3.

Schweres Silicat Flint.

Schmelznummer: O. 469.

Brechender Winkel $C = 60°\,0′$.

$K = 6{,}265\,\mu$; a_1 ist 8. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	53° 48′	1,6755	0.434 μ
F	52° 33′	1,6633	0.458 „
D	51° 10′	1,6499	0.590 „
C	50° 37′	1,6443	0.656 „
a_1	49° 58′	1,6380	0.784 „
b_1	46′	1,6360	0.836 „
a_2	34′	1,6340	0.896 „
b_2	24′	1,6323	0.965 „
a_3	13′	1,6306	1.045 „
b_3	3′	1,6286	1.138 „
a_4	48° 52′	1,6269	1.252 „
b_4	41′	1,6248	1.392 „
a_5	27′	1,6225	1.566 „
b_5	9′	1,6194	1.790 „
a_6	47° 48′	1,6160	2.090 „
b_6	27′	1,6122	2.502 „

Prisma Nr. 4.

Leichtes Silicat Flint.

Schmelznummer: O. 451.

Brechender Winkel: $C = 60°\,0′$.

$K = 6{,}223\,\mu$; a_1 ist 8. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	45° 41′	1,5941	0.434 μ
F	44° 54′	1,5857	0.485 „
D	43° 58′	1,5757	0.590 „
C	36′	1,5716	0.656 „
a_1	7′	1,5665	0.778 „
b_1	0′	1,5652	0.830 „
a_2	42° 52′	1,5638	0.890 „
b_2	44′	1,5623	0.958 „
a_3	36′	1,5608	1.038 „
b_3	28′	1,5594	1.132 „
a_4	20′	1,5580	1.246 „
b_4	10′	1,5561	1.382 „
a_5	0′	1,5540	1.556 „
b_5	41° 44′	1,5514	1.780 „
a_6	23′	1,5477	2.076 „
b_6	4′	1,5430	2.490 „

Prisma Nr. 5.

Silicat-Crown mit hoher Dispersion.

Schmelznummer: O. 1151.

Brechender Winkel: $C = 60°\,0′$.

$K = 6{,}373\,\mu$; μ_1 ist 8. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	40° 7′	1,5334	0.434 μ
F	39° 36′	1,5276	0.485 „
D	38° 57′	1,5202	0.590 „
C	43′	1,5176	0.656 „
a_1	20½′	1,5132	0.798 „
b_1	14′	1,5121	0.851 „
a_2	8′	1,5110	0.912 „
b_2	3′	1,5098	0.982 „
a_3	37° 56′	1,5087	1.063 „
b_3	49½′	1,5075	1.160 „
a_4	42½′	1,5060	1.275 „
b_4	34′	1,5045	1.415 „
a_5	23½′	1,5025	1.593 „
b_5	8′	1,4985	1.820 „
a_6	36° 48½′	1,4956	2.120 „

Prisma Nr. 6.

Schweres Baryum-Silicat-Crown.

Schmelznummer: O. 1143.

Brechender Winkel: $C = 60^0\,0'$.

$K = 6{,}338\,\mu$; a_1 ist 8. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	$45^0\ 1'$	1,5869	0.434 μ
F	$44^0\ 28'$	1,5810	0.485 „
D	$43^0\ 51'$	1,5744	0.590 „
C	$32'$	1,5714	0.656 „
a_1	$13'$	1,5676	0.791 „
b_1	$7'$	1,5665	0.845 „
a_2	$0'$	1,5652	0.905 „
b_2	$42^0\ 54'$	1,5641	0.975 „
a_3	$48'$	1,5630	1.055 „
b_3	$41'$	1,5622	1.150 „
a_4	$33'$	1,5603	1.267 „
b_4	$24'$	1,5587	1.406 „
a_5	$15'$	1,5571	1.584 „
b_5	$41^0\ 58\frac{1}{2}'$	1,5539	1.811 „
a_6	$36'$	1,5499	2.113 „

Prisma Nr. 7.

Borat-Crown.

Schmelznummer: S. 204.

Brechender Winkel: $C = 59^0\,58'$.

$K = 5{,}944\,\mu$; a_1 ist 8. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	$38^0\ 59\frac{1}{2}'$	1,5212	0.434 μ
F	$33'$	1,5160	0.485 „
D	$3'$	1,5103	0.590 „
C	$37^0\ 48'$	1,5075	0,656 „
a_1	$38'$	1,5056	0.741 „
b_1	$33'$	1,5046	0.792 „
a_2	$27'$	1,5034	0.847 „
b_2	$21'$	1,5023	0.913 „
a_3	$13\frac{1}{2}'$	1,5010	0.990 „
b_3	$6'$	1,4994	1.080 „
a_4	$36^0\ 59'$	1,4981	1.185 „
b_4	$49\frac{1}{2}'$	1,4963	1.320 „
a_5	$36\frac{1}{2}'$	1,4937	1.484 „
b_5	$19'$	1,4903	1.695 „
a_6	$35^0\ 52'$	1,4851	1.977 „

Prisma Nr. 8.

Mittleres Phosphat-Crown.

Schmelznummer: S. 179.

$K = 6{,}061$; $C = 60^0\,0'$.

a_1 ist 8. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	$43^0\ 36\frac{1}{2}'$	1,5727	0.434 μ
F	$11\frac{1}{2}'$	1,5674	0.485 „
D	$42^0\ 42\frac{1}{2}'$	1,5620	0.590 „
C	$24'$	1,5587	0.656 „
a_1	$12'$	1,5565	0.757 „
b_1	$6'$	1,5554	0.810 „
a_2	$0'$	1,5543	0.867 „
b_2	$41^0\ 54\frac{1}{2}'$	1,5532	0.933 „
a_3	$49'$	1,5523	1.010 „
b_3	$42\frac{1}{2}'$	1,5510	1.100 „
a_4	34	1,5495	1.213 „
b_4	$26'$	1,5480	1.364 „
a_5	$16'$	1,5462	1.515 „
b_5	$1'$	1,5434	1.732 „
a_6	$40^0\ 35'$	1,5386	2.020 „

Prisma Nr. 9.

Kalk-Silicat-Crown.

Schmelznummer: O. 1092.

Brechender Winkel: $C = 60^0\,0'$.

$K = 5{,}499\,\mu$; a_1 ist 7. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	$39^0\ 36'$	1,5276	0.434 μ
F	$11'$	1,5229	0.485 „
D	$38^0\ 40'$	1,5170	0.590 „
C	$25'$	1,5141	0.656 „
a_1	$7'$	1,5107	0.786 „
b_1	$1'$	1,5096	0.846 „
a_2	$37^0\ 55'$	1,5084	0.917 „
b_2	$49'$	1,5073	1.000 „
a_3	$42\frac{1}{2}'$	1,5060	1.100 „
b_3	$35'$	1,5046	1.222 „
a_4	$27'$	1,5031	1.375 „
b_4	$16\frac{1}{2}'$	1,5010	1.572 „
a_5	$3'$	1,4985	1.832 „
b_5	$36^0\ 42'$	1,4944	2.200 „

Nr. 10.

Wasser.[1] (12° C.)

Brechender Winkel des Flüssigkeitsprismas $C = 60° 12'$.

$K = 5{,}662\,\mu$; a_1 ist 8. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	24° 16½′	1,3404	0.434 μ
F	2′	1,3373	0.485 „
D	23° 42½′	1,3330	0.590 „
C	34′	1,3312	0.656 „
a_1	28′	1,3299	0.708 „
b_1	24′	1,3291	0.755 „
a_2	20′	1,3282	0.808 „
b_2	14½′	1,3270	0.871 „
a_3	9′	1,3258	0.943 „
b_3	3′	1,3245	1.028 „
a_4	22° 56′	1,3230	1.130 „
b_4	47′	1,3210	1.256 „

Nr. 11.

Schwefelkohlenstoff. (15° C.)

$C = 60° 12'$.

$K = 6{,}987\,\mu$; a_1 ist 9. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	54° 27′	1,6784	0.434 μ
F	52° 1′	1,6550	0.485 „
C	49° 32′	1,6307	0.590 „
D	48° 38′	1,6217	0.656 „
a_1	47° 32′	1,6104	0.777 „
b_1	16′	1,6077	0.823 „
a_2	0′	1,6049	0.873 „
b_2	46° 46′	1,6025	0.931 „
a_3	31′	1,6000	0.999 „
b_3	19′	1,5978	1.073 „
a_4	8′	1,5960	1.164 „
b_4	45° 57′	1,5940	1.270 „
a_5	47′	1,5923	1.396 „
b_5	37′	1,5905	1.552 „
a_6	27′	1,5888	1.745 „
b_6	18′	1,5872	1.998 „

Nr. 12.

Xylol. (14° C.)

$C = 60° 12'$.

$K = 6{,}584\,\mu$; a_1 ist 8. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	38° 52′	1,5170	0.434 μ
F	2′	1,5075	0.485 „
D	37° 4′	1,4965	0.590 „
C	36° 42′	1,4922	0.656 „
a_1	8½′	1,4857	0.823 „
b_1	2′	1,4845	0.878 „
a_2	35° 56′	1,4834	0.940 „
b_2	50′	1,4822	1.012 „
a_3	43′	1,4808	1.096 „
b_3	36½′	1,4795	1.195 „
a_4	31½′	1,4784	1 316 „
b_4	26′	1,4775	1.461 „
a_5	22′	1,4768	1.645 „
b_5	17½′	1,4760	1,881 „

Nr. 13.

Benzol. (12° C.)

$C = 60° 12'$.

$K = 6{,}483\,\mu$; a_1 ist 8. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	39° 51′	1,5281	0.434 μ
F	38° 55′	1,5276	0.485 „
D	37° 51′	1,5054	0.590 „
C	26′	1,5008	0.656 „
a_1	36° 49½′	1,4938	0.810 „
b_1	42′	1,4922	0.864 „
a_2	34′	1,4907	0.926 „
b_2	28′	1,4896	0.997 „
a_3	21′	1,4882	1.080 „
b_3	15′	1,4870	1.178 „
a_4	10′	1,4861	1.297 „
b_4	4½′	1,4849	1.439 „
a_5	35° 59½′	1,4840	1.621 „
b_5	54½′	1,4832	1.850 „

1) Der starken Absorption wegen konnte die Dispersion nur bis $\lambda = 1{,}256\,\mu$ verfolgt werden.

Nr. 14.

Quarz [1] (ordinärer Strahl).

$C = 60^0\ 2'$.

$K = 5{,}871\ \mu$; a_1 ist 7. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	$41^0\ 59\frac{1}{2}'$	1,5538	0.434 μ
F	38′	1,5499	0.485 „
G	7′	1,5442	0.590 „
C	$40^0\ 54'$	1,5419	0.656 „
a_1	31′	1,5376	0.839 „
b_1	25′	1,5364	0.904 „
a_2	19′	1,5353	0.979 „
b_2	$12\frac{1}{2}'$	1,5342	1.067 „
a_3	4′	1,5325	1.174 „
b_3	$39^0\ 56'$	1,5310	1.305 „
a_4	$44\frac{1}{2}'$	1,5287	1.468 „
b_4	27′	1,5257	1.679 „
a_5	5′	1,5216	1.957 „
b_5	$38^0\ 35'$	1,5160	2.348 „

Nr. 15.

Steinsalz [2],

$C = 60^0\ 2'$.

$K = 5{,}746\ \mu$; a_1 ist 7. Ordnung.

Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	$42^0\ 37'$	1,5607	0.434 μ
F	$41^0\ 56'$	1,5531	0.485 „
D	7′	1,5441	0.590 „
C	$40^0\ 47'$	1,5404	0.656 „
a_1	18′	1,5350	0.819 „
b_1	$10\frac{1}{2}'$	1,5335	0.883 „
a_2	4′	1,5323	0.955 „
b_2	$39^0\ 58'$	1,5313	1.043 „
a_3	52′	1,5302	1.147 „
b_3	47′	1,5292	1.275 „
a_4	42′	1,5283	1.434 „
b_4	37′	1,5273	1.640 „
a_5	33′	1,5265	1.914 „
b_5	27′	1,5255	2.296 „
a_6	20′	1,5242	2.870 „
b_6	9′	1,5221	3.826 „
a_7	$38^0\ 47'$	1,5179	5.746 „

Nr. 16.

Flussspath. [3]

$C = 59^0\ 59'$.

$K = 6{,}655\ \mu$; a_1 ist 9. Ordnung.

Benennung	α	n	λ	Benennung	α	n	λ
$H\gamma$	$32^0\ 5'$	1,4398	0.434 μ	a_4	$7\frac{3}{4}'$	1.4284	1.110 μ
F	$31^0\ 52'$	1,4372	0.485 „	b_4	5′	1.4279	1.212 „
D	36′	1,4340	0.590 „	a_5	2′	1.4273	1.332 „
C	29′	1,4325	0.656 „	b_5	$30^0\ 59'$	1.4267	1.480 „
a_1	$21\frac{1}{3}'$	1,4312	0.740 „	a_6	55′	1.4260	1.666 „
b_1	$19\frac{1}{2}'$	1,4308	0.784 „	b_6	50′	1.4248	2.902 „
a_2	$17\frac{1}{2}'$	1,4304	0.834 „	a_7	44′	1.4234	2.221 „
b_2	$15\frac{1}{2}'$	1,4300	0.889 „	b_7	32′	1.4214	2.663 „
a_3	$12\frac{3}{4}'$	1,4295	0.952 „	a_8	13′	1.4170	3.332 „
b_3	$10\frac{1}{2}'$	1,4289	1.024 „				

1) Das untersuchte Prisma war so geschliffen, dass bei der Minimumstellung die Strahlen dasselbe in der Richtung der optischen Axe durchliefen. Seine Kantenlänge betrug nur 23 mm.

2) Die Flächen des Prismas waren so weit eben, dass der brechende Winkel auf 1′ genau bestimmt werden konnte.

3) Die Kantenlänge des Prismas betrug 5,5 cm.

Discussion der Versuchsergebnisse.

Eine eingehende Betrachtung der vorstehenden Tabellen oder ein Blick auf die Dispersionscurven lehrt uns, dass die untersuchten Stoffe hinsichtlich ihres optischen Verhaltens im Ultrarothen beträchtliche Verschiedenheiten aufweisen.

Bei den leichteren Flintgläsern (O. 451 und O. 561) sowie bei dem Steinsalz besitzt die Dispersionscurve für längere Wellen nahezu constante Neigung gegen die horizontale Axe der λ; eine Eigenschaft, die bereits von Hrn. Langley am Flintglas und Steinsalz beobachtet wurde. Dagegen zeigen Quarz, Fluorit und die sämmtlichen Crown-Gläser in ihren Dispersionscurven deutlich erkennbare Inflexionspunkte, welche insbesondere bei den Borat- und Phosphat-Gläsern (S. 179 und S. 204) stark hervortreten.

Bemerkenswerth ist ferner die Dispersionscurve des Wassers wegen der ausserordentlich geringen Abnahme der Dispersion mit wachsender Wellenlänge.

Vor allem aber sind es drei Stoffe, deren Dispersionscurven sich dem Charakter nach vollkommen von denen aller übrigen Substanzen unterscheiden. Schon bei der Aufnahme des Energiespectrums von Schwefelkohlenstoff (s. Fig. 5), Xylol und Benzol hatte sich die merkwürdige Thatsache ergeben, dass die Abstände der Interferenzstreifen, anstatt wie bei den übrigen Substanzen ein Minimum der Breite zu erreichen, mit wachsender Wellenlänge ständig abnahmen. In den mit Hülfe der Energiespectren entworfenen Dispersionscurven documentirte sich diese Erscheinung dadurch, dass mit wachsender Wellenlänge der Brechungsindex mehr und mehr einem constanten Werth zustrebte.

Es wurde hierdurch nahe gelegt, auf die Dispersion dieser drei Stoffe die zweiconstantige Cauchy'sche Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad n = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\lambda^2}$$

anzuwenden. Zur Berechnung der Constanten α_1 und α_2 wurden nur die Berechnungsindices zweier Linien (meist F und C) herangezogen. Die mit Hülfe der Gleichung (a) berechneten Werthe sind in der folgenden Tabelle neben die beobachteten gestellt. Des Contrastes halber, sind noch für zwei

weitere Stoffe, nämlich Wasser und eines der Crowngläser (S. 179) die entsprechenden Angaben hinzugefügt.

	Schwefelkohlenttoff		Xylol		Benzol		Glas (S. 179)		Wasser	
α_1	1,5835		1,4736		1,4808		1,5475		1,3238	
α_2	0,01680		0,00810		0,00870		0,00485		0,00318	
n	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber
$\lambda = 0,5\ \mu$	1,6507	1,6507	1,5059	1,5060	1,5152	1,5154	1,5663	1,5669	1,3365	1,33[illegible]
$\lambda = 0,75$ „	1,6032	1,6032	1,4880	1,4880	1,4960	1,4960	1,5566	1,5562	1,3292	1,32[illegible]
$\lambda = 1,0$ „	1,6002	1,6003	1,4822	1,4817	1,4895	1,4893	1,5522	1,5524	1,3249	1,32[illegible]
$\lambda = 1,5$ „	1,5910	1,5910	1,4772	1,4772	1,4844	1,4845	1,5463	1,5497	—	—
$\lambda = 2,0$ „	1,5875	1,5877	1,4756	1,4756	1,4830	1,4828	1,5390	1,5487	—	—

Man erkennt, dass für Schwefelkohlenstoff, Xylol und Benzol die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten Werthen eine nahezu vollkommene ist, während die Gleichung (a) durchaus nicht den Verlauf der Dispersion in den übrigen Stoffen richtig wieder gibt.

Bekanntlich führt Maxwell's electromagnetische Lichttheorie zu dem Satz, dass die Dielectricitätsconstante eines Körpers gleich dem Quadrat seines Brechungsexponenten für unendlich lange Wellen sein muss. Man war bis vor Kurzem darauf angewiesen, diesen Brechungsexponenten durch Extrapolation aus einer Dispersionsformel zu bestimmen und hat sich zu diesem Zweck allgemein der Cauchy'schen Gleichung (a) bedient. Hierbei hat sich für eine grosse Zahl der untersuchten Stoffe, z. B. Glas, Quarz, Flussspath, Steinsalz, Wasser die geforderte Uebereinstimmung nicht ergeben.

Aus unseren Versuchsergebnissen folgt aber, dass für diese Stoffe die Extrapolation nach der Cauchy'schen Gleichung schon innerhalb des Bereiches der beobachteten Wellenlängen durchaus unzulässig ist. Es lässt sich also aus der erwähnten Abweichung kein Beweis gegen die Richtigkeit der Maxwell'schen Theorie ableiten.[1])

1) In zwei kürzlich erzchienenen Abhandlungen gelang es Hrn. L. Arons und mir den Nachweis zu liefern, dass bei Benutzung sehr langer, d. h. electrischer Wellen, dass Maxwell'sche Gesetz auch für diese Stoffe erfüllt ist. Wied. Ann. **42.** p. 581 u. **44.** p. 206. 1891.

Andererseits zeigen die mitgetheilten Messungen an Schwefelkohlenstoff, Xylol und Benzol, dass bei diesen Stoffen gegen die Extrapolation, wenigstens auf dem unseren Beobachtungen zugänglichen Gebiet, nichts einzuwenden ist; in diesen Fällen aber führt auch die besagte Extrapolation bis $\lambda = \infty$ zu Werthen, die der Maxwell'schen Beziehung genügen.

Einige diesbezügliche Daten sind in dem Folgenden zusammengestellt. Die Dielectricitätsconstanten sind von Hopkinson[1]), Arons und Rubens[2]) und Silow[3]) beobachtet; ihre Quadratwurzeln unterscheiden sich nicht wesentlich von den Constanten a_1 der Gleichung (a), welche, die Gültigkeit dieser Gleichung vorausgesetzt, dem Werth des Brechungsexponenten für unendlich lange Wellen gleich sind.

Stoff	Dielectricitäts-constante μ	$\sqrt{\mu}$	$a_1 = n_\infty$
Schwefel-Kohlenstoff	2,67	1,63	1,5835
Xylol	2,35	1,53	1,4736
Benzol	2,20	1,48	1,4806

Vergleich der Versuchsergebnisse mit den Beobachtungen von Mouton und Langley.

Da die Versuche der Hrn. Mouton und Langley nach Methoden vorgenommen wurden, die von der hier in Anwendung gebrachten wesentlich verschieden sind, ist es von Interesse, ihre Resultate den unsrigen gegenüber zu stellen.

Es gelang Hrn. Mouton, fünf Punkte der Dispersionscurve des Quarzes im Ultrarothen zu bestimmen; er fand die zugehörigen Brechungsexponenten der Wellenlängen:

$\lambda = 0,88\ \mu$
1,08 „
1,45 „
1,77 „
2,14 „

Aus der von mir entworfenen Dispersionscurve habe ich durch Interpolation die Werthe des Brechungsexponenten für

1) Hopkinson, Proc. Roy. Soc. **43.** p. 156. 1887.
2) Arons u. Rubens, l. c. p. 591.
3) Silow, Pogg. Ann. **156.** p. 389. 1885.

die gleichen Wellenlängen bestimmt, und mit den Angaben des Hrn. Mouton in nachstehender Tabelle verglichen.

λ	Brechungsindex n		$\delta . 10^4$
	Mouton	Rubens	
0,88 μ	1,5371	1,5369	− 2
1,08 „	1,5338	1,5340	+ 2
1,45 „	1,5289	1,5289	0
1,77 „	1,5247	1,5245	− 2
2,14 „	1,5191	1,5190	− 1

In einer zweiten Tabelle sind Hrn. Langley's Beobachtungen am Steinsalz enthalten, und die von mir durch Interpolation gefundenen entsprechenden Werthe des Brechungsindex diesen an die Seite gestellt.

λ	Brechungsindex n		$\delta . 10^4$
	Langley	Rubens	
0,485 μ	1,5532	1,5531	− 1
0,590 „	1,5442	1,5441	− 1
0,656 „	1,5405	1,5404	− 1
1,178 „	1,5301	1,5300	− 1
1,767 „	1,5272	1,5269	− 3
2,356 „	1,5254	1,5253	− 1
2,945 „	1,5243	1,5241	− 2
3,534 „	1,5227	1,5227	0
4,123 „	1,5215	1,5214	− 1
4,712 „	1,5201	1,5202	+ 1
5,301 „	1,5186	1,5189	+ 3

Ich darf wohl sagen, dass in beiden Fällen die Uebereinstimmung eine recht gute zu nennen ist.

Bestimmung der Absorption.

Um zu untersuchen, ob sich das abweichende Verhalten der Mehrzahl der untersuchten Stoffe von der Cauchy'schen Theorie durch die Absorption erklären lasse, habe ich diese sämmtlichen Substanzen auf ihre Durchlässigkeit für ultrarothe Strahlen von verschiedener Wellenlänge geprüft.

Die Strahlen eines Argandbrenners wurden durch eine Concentrationslinse aus Steinsalz auf dem Spalt des Spectrometers vereinigt, dessen Linsen und Prisma aus Flussspath-

stücken bestanden. Auf einem Schlitten konnte nach Belieben eine dickere oder dünnere planparallele Platte des zu untersuchenden Materials vor den Spalt geschoben und auf diese Weise in den Strahlengang eingeschaltet werden. Durch Benutzung zweier Platten von verschiedener Dicke wurden die infolge der Reflexion auftretenden Fehler eliminirt und das Verhältniss der beim Einschalten der beiden Platten beobachteten Ausschläge lieferte in Combination mit der sphärometrisch gemessenen Dickendifferenz der beiden Platten, ohne weiteres die Absorptionsconstante k.

k ist durch die Gleichung definirt:

$$i = J \,.\, e^{-k.d},$$

worin d die Dickendifferenz der beiden Platten in Centimetern, i und J die Intensitäten der Strahlung, resp. die ihnen proportionalen Ausschläge des Galvanometers bedeuten, wenn sich die dickere, resp. dünnere Platte vor dem Spalt befindet. k ist somit gleich der reciproken Weglänge in Centimetern, welche ein Strahl in dem betreffenden Medium zurücklegen muss, um auf $1/e$ seiner Intensität geschwächt zu werden.

Zur Untersuchung der Absorption in den Flüssigkeiten, verwendete ich ein planparalleles, etwa 1 cm weites Absorptionsgefäss. Auf der einen Seite desselben war als Schulz'scher Körper eine Flussspathplatte, deren Flächen parallel zu den Wänden des Gefässes standen, in die Flüssigkeit eingelassen. Da sich die Absorption im Flussspath innerhalb der beobachteten Spectralgebiete als unmerklich klein erwies[1]) und der Brechungsindex der Flüssigkeiten nicht wesentlich von demjenigen des Fluorits verschieden war, ging die Dicke der Flussspathplatte ohne weitere Correction als Dickendifferenz der beiden Flüssigkeitsschichten in die Rechnung ein.

Die Resultate sämmtlicher Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle (p. 260) zusammengestellt.

Man erkennt, dass die drei Stoffe Schwefelkohlenstoff, Xylol und Benzol, deren Dispersion sich durch die Cauchy'sche Gleichung (a) darstellen liess, hinsichtlich ihrer Absorption den anderen Körpern gegenüber durchaus keine Sonder-

1) Das Gleiche wurde für Steinsalz festgestellt.

stellung einnehmen. Schwefelkohlenstoff ist auf dem untersuchten Spectralgebiet nahezu vollkommen durchlässig, während Xylol und Benzol stärkere Absorption zeigen, als die untersuchten Borat- und Phosphatgläser, in deren Dispersionscurven stark hervortretende Inflexionspunkte vorhanden sind.

Wellenlänge λ		$0{,}7\,\mu$	$0{,}95\,\mu$	$1{,}1\,\mu$	$1{,}4\,\mu$	$1{,}7\,\mu$	$2{,}0\,\mu$	$2{,}3\,\mu$	$2{,}5\,\mu$	$2.7\,\mu$	$2{,}9\,\mu$	$3{,}1\,\mu$
S. 163	Flintgläser	0,00	—	0,02	—	0,01	—	0,01	—	0,06	0,25	0,51
O. 500	Flintgläser	0,00	—	0,00	—	0,00	—	0,00	0,01	0,08	0,30	0,63
O. 469	Flintgläser	0,00	—	0,02	—	0,01	0,02	0,02	0,03	0,11	0,41	0,69
O. 451	Flintgläser	0,00	—	0,01	—	0,02	0,05	0,08	0,18	0,25	0,62	1,09
O. 1143	Crowngläser	0,02	—	0,03	—	0,05	0,07	0,11	0,17	0,34	0,75	1,31
O. 1151	Crowngläser	0,02	—	0.01	0,01	0,02	0,06	0,11	0,23	0,29	0,79	1,15
S. 204	Crowngläser	0,00	0,01	0,06	0,10	0,16	0,21	0,37	0,85	1,25	1,73	—
O. 1092	Crowngläser	0,01	0,04	0,05	0,01	0,01	0,09	0,20	0,34	0,51	0,73	1,24
S. 179	Crowngläser	—	0,02	0,05	0,10	0,18	0,40	0,71	0,14	1,69	—	—
Quarz		0,00	—	0,00	—	0.00	—	0,02	—	0,08	0,13	0,21
Wasser		0,08	0,11	0,38	1,09	—	—	—	—	—	—	—
Schwefelkohlenst.		0,00	—	0,02	—	0,02	—	0,00	—	0,07	—	0,05
Xyol		0,01	—	0,12	0,25	0,37	0,85	0,87	0,95	—	—	—
Benzol		0,03	0,05	0,07	0,14	0,42	0,63	0,83	1,05	—	—	—

Auf den ersten Anblick scheint dieses Resultat mit der von Hrn. H. von Helmholtz entwickelten Dispersionstheorie in Widerspruch zu stehen; indessen lehrt eine eingehendere Betrachtung der vorstehenden Zahlen, dass bei sämmtlichen untersuchten Substanzen und für alle Wellenlängen, für welche die Brechungsindices bestimmt werden konnten, die Absorption nicht hinreichend gross ist, um die Dispersion merklich zu beeinflussen.

Bekanntlich führt die genannte Theorie zu der Beziehung zwischen Brechungsexponent n, Extinctionscoëfficient x und Wellenlänge λ:

$$\text{(b)} \qquad n^2 - x^2 = 1 - P\lambda^2 + Q\,\frac{\lambda^4(\lambda^2 - \lambda_m^{\,2})}{(\lambda^2 - \lambda_m^{\,2})^2 + \alpha^2\lambda^2}.$$

Nun ergeben sich aber die Extinctionscoëfficienten x aus den in der Tabelle enthaltenen Constanten k durch Division durch 4π und Multiplication mit λ, worin λ in Centimetern zu rechnen ist. Die Zahlen x würden also auf dem ganzen, unserer Untersuchung zugänglichen Gebiet, nicht den Betrag von $\frac{1}{1000}$ erreichen. Es ist daher in allen Fällen x^2 gegen n^2 vollkommen zu vernachlässigen.

Die Gleichung (b) liefert uns alsdann eine Beziehung zwischen dem Brechungsexponenten und der Wellenlänge.

Ich halte es für unzweifelhaft, dass man bei Benutzung einer genügenden Zahl von Punkten der Dispersionscurve und durch Anwendung eines geeigneten Rechenverfahrens, die vier Constanten P, Q, λ_m und α so wird bestimmen können, dass die Gleichung (b), innerhalb der Fehlergrenzen, den sämmtlichen Beobachtungen genügt. Indessen wäre auf eine derartige Bestätigung nicht viel Werth zu legen, da ohne Zweifel auch anders gebildete vierconstantige Gleichungen dasselbe leisten würden.

Chemische Zusammensetzung der Gläser von Schott und Genossen.

S. 179 Mittleres Phosphat-Crown	Wesentlicher Bestandtheile: Ueberwiegend Phosphorsäure, dann Baryt und Thonerde	
S. 204 Borat-Crown	Wesentliche Bestandtheile: Ueberwiegend Borsäure, dann Alkalie, Thonerde und etwas Bleioxyd	
O. 1143 Schweres Baryt-Crown	Etwa 50 Proc. Kieselsäure, ferner Baryt, Alkalie und Zinkoxyd	
O. 1092 Leichtes Baryt-Crown	K_2O 15,0 Proc. Na_2O 5,0 „ BaO 9,6 „ ZnO 2,0 „	Mn_2O_3 0,1 Proc. As_2O_3 0,4 „ B_2O_3 2,5 „ SiO_2 65,4 „
O. 1151 Silicat-Crown mit hoher Dispersion	PbO 13,3 Proc. ZnO 2,0 „ Na_2O 15,7 „	As_2O_5 0,2 Proc. MnO_2 0,1 „ SiO_2 68,7 „
O. 451 Gewöhnliches Leichtflint	PbO 36,0 Proc. K_2O 8,3 „ Na_2O 1,0 „	Mn_2O_3 0,06 Proc. As_2O_3 0,3 „ SiO_2 53,7 „
O. 469 Schweres Silicat-Flint	PbO 52,6 Proc. K_2O 6,5 „ Na_2O 0,5 „	Mn_2O_3 0,09 Proc. As_2O_5 0,3 „ SiO_2 40,0 „
O. 500 Schweres Silicat-Flint	PbO 67,5 Proc. K_2O 3,0 „ Mn_2O_3 0,04 „	As_2O_3 0,2 Proc. SiO_2 29,26 „
S. 163 Schwerstes Silicat-Flint	PbO 78,0 Proc. SiO_2 21,9 „ As_2O_5 0,1 „	

Berlin, Physik. Inst. d. Univ., December 1891.

IV. *Ueber Härtemessung, insbesondere an plastischen Körpern; von F. Auerbach.*

Vor Jahresfrist habe ich[1]) eine Methode angegeben und einen sie realisirenden Apparat beschrieben, mittelst dessen es möglich ist, exacte und vergleichbare Werthe für die Härte der Körper zu erhalten. An einigen Beispielen habe ich dies erläutert, ohne die dabei gefundenen Zahlen bereits als endgültige hinstellen zu wollen. Dieselbe Bemerkung bleibt auch für die hier mitzutheilenden Versuche in Geltung, auch die hier anzugebenden Zahlen werden möglicher Weise noch, wenn auch wahrscheinlich nur unwesentlich, zu modificiren sein. Der Zweck derselben ist vielmehr der, zu zeigen, wie sich die Härtemessung gestaltet, wenn die betreffenden Stoffe nicht, wie die in der ersten Abhandlung untersuchten, spröde, sondern plastisch sind. Solche Stoffe sind Steinsalz und Flussspath. Presst man eine ebene Fläche und eine Kugelfläche aus einem dieser beiden Stoffe in der bei meinem Apparat stattfindenden Weise gegeneinander, so erhält man nicht, wie bei Glas oder Quarz, einen *Sprung*, sondern eine bleibende Deformation von stetigem Charakter, nämlich auf der Platte eine *Mulde*, auf der Linse eine *Abplattung*. Diese Deformation wächst mit dem Drucke, ein kritischer Punkt (wie bei den spröden Körpern der Eintritt des Sprunges) ist nicht vorhanden, und man sieht nicht ein, wie man hier die als Druck auf die Flächeneinheit im kritischen Augenblick definirte Härte solle ermitteln können. Zwar ist nach der Auffassung von Hertz der kritische Punkt bei plastischen Körpern derjenige, wo die bleibende Deformation beginnt. Es ist aber schon von vornherein einzusehen — und die Beobachtungen bestätigen es — dass die Lage dieses Punktes in hohem Grade von der Feinheit der Beobachtung abhängt, dass sie nur, ähnlich wie die Elasticitätsgrenze bei der Dehnung, durch eine Uebereinkunft geregelt werden könnte, während, wenn man hiervon absehen wollte, die Härtemessung wieder

1) F. Auerbach, Gött. Nachr. p. 518. 1890. Wied. Ann. 43. p. 61. 1891.

auf die Stufe des Schätzens, ähnlich wie bei der Methode des Ritzens, herabgedrückt wird; in keinem Falle aber könnte man eine derartige Härtemessung für plastische Körper der für spröde Körper nunmehr gesicherten ebenbürtig zur Seite stellen. Trotzdem würde man sich hierein finden müssen, wenn, wie es den Anschein hat, ein anderer brauchbarer Druckwerth als der der beginnenden Deformation entsprechende bei plastischen Körpern nicht existirte. Dass ein solcher existirt, dass man infolge dessen die Härtemessung bei plastischen Körpern ebenso exact wie bei spröden ausführen kann, und dass dabei die Uebereinstimmung des Härtebegriffs gewahrt bleibt, soll im Folgenden gezeigt werden.

Flussspath.

Das Material rührte aus den Vorräthen der hiesigen Firma Zeiss her und stammte aus dem Berner Oberland. Die Platten und die ebenen Grundflächen der Linsen entsprachen den Oktaëderflächen, die Krümmungsradien ϱ dreier verschiedener Linsen betrugen bez. 3, 5 und 10 mm.

Zunächst sei für zwei Werthe von ϱ je eine vollständige Versuchsreihe angeführt. Sie entsprechen den auf p. 86 der ersten Abhandlung stehenden, auf Glas und Quarz bezüglichen Tabellen, enthalten wie dort die in willkürlichen Einheiten ausgedrückten und deshalb in Klammern eingeschlossenen Grössen p (Gesammtdruck), d (Durchmesser der Druckfläche), q (Quotient p/d^3), ausserdem aber noch den durch den Quotienten p/d^2 dargestellten Druck p_1 auf die Flächeneinheit, den Durchmesser d_0 der Druckfläche nach jedesmaligem Aufheben des Druckes und nach Verschwinden der elastischen Nachwirkung; auch der Werth von d ist nicht der unmittelbar nach Herstellung des betreffenden Druckes beobachtete, sondern derjenige, welcher sich nach Ablauf der positiven Nachwirkungserscheinung einstellte und eine weitere Zunahme nicht erkennen liess; es muss jedoch bemerkt werden, dass nur in einigen Fällen das Eintreten der Constanz abgewartet wurde, wozu mehrere Stunden und bis zu einem Tage erforderlich war, dass in diesen Fällen festgestellt wurde, welcher Bruchtheil der ganzen Nachwirkung — es war dies der bei weitem grösste — auf einen bestimmten Zeitraum, z. B. die ersten 15 Minuten

entfiel, und dass hiernach in den übrigen Fällen aus dem nach 15 Minuten beobachteten Werthe von d sein wahrer Werth berechnet wurde. Der Werth von d_0 ist nur für die ersten Beobachtungen angegeben, weil bei den späteren Drucken Platte und Linse infolge der beträchtlichen Deformation nach der Entlastung nicht mehr zur Berührung gelangen und das mikroskopische Bild hier wesentlich modificirt wird.

1. $\varrho = 3$.

Anfangswerth von $d_0 = 1{,}2$.

$[p]$	$[d]$	$100\,[q]$	$10\,[p_1]$	$[d_0]$
11	2,0	138	28	1,4
38	3,4	97	33	1,8
88	5,0	70	35	2,2
188	6,8	61	41	2,5
354	9,5	41	39	3,0
554	10,8	44	48	—
854	12,9	39	52	—
1354	15,8	34	54	—
1987	19,1	28	54	—
2487	21,3	25	54	—

2. $\varrho = 10$.

Anfangswerth von $d_0 = 1{,}8$.

$[p]$	$[d]$	$100\,[q]$	$10\,[p_1]$	$[d_0]$
11	3,0	41	12	1,9
38	4,8	35	17	2,5
138	7,9	27	22	2,7
354	11,5	23	27	2,8
654	14,7	20	30	3,0
1154	18,4	18	34	3,8
1987	23,5	15	36	—
2687	27,4	13	36	—

Wie man sieht, ist hier die Grösse q nicht, wie bei spröden Körpern, constant, sie nimmt vielmehr sehr stark und (bis auf einen einzigen vielleicht auf Beobachtungsfehler zurückzuführenden Fall) ununterbrochen ab, in der ersten Reihe bis auf $^1/_6$, in der zweiten bis auf $^1/_3$ des ersten Werthes, und diese Abnahme würde bei weiterer Ausdehnung der Reihen sich unverändert fortsetzen. Mit anderen Worten, *die Druckfläche wächst hier viel schneller* als nach dem bei spröden Körpern bis hart an die Sprungbildung giltigen Gesetze; ein Verhalten, über welches man sich nicht wundern darf, da man

sich hier, wie die veränderte Grösse von d_0 beweist, schon von der ersten Zeile der Tabellen ab *ausserhalb des Gebietes der elastischen Vollkommenheit* bewegt. Die Druckfläche während des Druckzustandes entspricht eben hier nicht ausschliesslich dem herrschenden Drucke, sondern sie setzt sich aus zwei Theilen, einem permanenten und einem temporären, zusammen, und wenn man auch nicht sagen kann, in welcher Weise diese Superposition stattfindet, so folgt doch unmittelbar, dass das Wachsthum ein schnelleres sein muss, als die Theorie für elastisch vollkommene Körper fordert. Nach welchem Gesetze dieses Wachsthum sich regelt, lehrt das Verhalten von p_1. Diese Grösse nimmt zwar anfangs, wenn auch langsamer als bei spröden Körpern, zu, *nähert sich aber mehr und mehr einem constanten Werthe, welchen sie schliesslich erreicht;* in dem weiten Intervalle von $p = 1200$ bis $p = 2500$ (erste Tabelle), bez. von $p = 1600$ bis $p = 2700$ (zweite Tabelle) ist der Druck auf die Flächeneinheit constant. Das Material verändert sich also successive derart dauernd, dass es nie in die Lage kommt, eine grössere als eine ganz bestimmte Beanspruchung (d. h. Druck auf die Flächeneinheit) erdulden zu müssen. Wenn es also auch bei Flussspath nicht zur Trennung der Theilchen, zur Bildung eines Sprunges kommt, so gibt es doch auch hier eine kritische Beanspruchung, welche derjenigen bis auf unendlich Kleines entspricht, bei welcher man die Trennung der Theilchen zu erwarten haben würde. Diese Auffassung erhält eine greifbare Bestätigung in der Thatsache, dass, wenn man die Drucksteigerung zu rasch oder stossweise vornimmt, Sprungfragmente auftreten, und dass der Werth von p_1, bei welchem dies der Fall ist, so ziemlich mit dem obigen Grenzwerth von p_1 übereinstimmt — eine gute Uebereinstimmung ist nicht zu verlangen, da die letztgedachte Behandlungsweise sich mit der gewöhnlich geübten, exacten und vorsichtigen, nicht messen kann.

Ein plastischer Körper hat ausser dem hier gefundenen noch einen anderen kritischen Punkt, nämlich denjenigen Werth von p_1, bei welchem die bleibende Deformation beginnt, und dieser Werth würde bei strengem Anschluss an die Auffassung von Hertz bei plastischen Körpern als Härte zu bezeichnen sein. Die obigen Tabellen weisen schon bei

der kleinsten benutzten Belastung, für welche eigens zu diesem Zwecke besondere Einrichtungen vorgesehen werden mussten, eine bleibende Veränderung von d_0 auf. Sie ist allerdings geringfügig, in einigen anderen Versuchsreihen liess sie sich sogar überhaupt nicht constatiren, und es ist daher zu schliessen, dass z. B. für den Fall $\varrho = 10$ die Elasticitätsgrenze sehr nahe durch den Werth $[p_1] = 12$, vielleicht durch den Werth $[p_1] = 11$ gegeben sei. Diese Feststellung bezieht sich aber nur auf den vorliegenden Apparat, insbesondere auf das Mikroskop desselben, und es liegt kein Grund zu der Annahme vor, dass sich nicht bei noch günstigerer Beobachtungsweise eine bleibende Veränderung schon bei einem weit kleineren Druck, vielleicht bei dem halben, würde constatiren lassen. Man müsste also, um einen Anhaltspunkt zu gewinnen, ebenso verfahren, wie es z. B. für die Feststellung der Elasticitätsgrenze bei der Längsdehnung geschieht, nämlich diejenige dauernde Veränderung, welche man schon als solche betrachten will, durch Uebereinkunft festzusetzen. Damit würde aber die Härtenmessung diejenige Bedeutung, welche sie bei spröden Körpern nach der neuen Definition und Methode gewonnen hat, bei plastischen Körpern wieder völlig einbüssen. Die angestellte Betrachtung ist so naheliegend, dass wohl auch Hertz die Heranziehung der Elasticitätsgrenze zur Definition vermieden haben würde, wenn er in der Lage gewesen wäre, über einen anderen brauchbaren Werth von p_1 zu verfügen. Das war aber nicht der Fall, da man gar nicht von vornherein mit Bestimmtheit vermuthen konnte, dass den plastischen Stoffen ein vollkommenes Anpassungsvermögen an die höchste zulässige Beanspruchung zukomme; erst das Experiment konnte zeigen, dass nur zwei Fälle möglich sind: entweder, die Beanspruchung (p_1) wächst immer weiter, und dann muss einmal ein Sprung eintreten, oder sie erreicht einen constanten Werth, dann tritt ein Sprung nicht, oder gewissermaassen erst im Unendlichen ein; der kritische Werth von p_1 aber ist in beiden Fällen exact bestimmbar, die Härtemessung ist stets möglich.[1])

1) Wie ich bei nochmaliger Durchsicht ersehe, weist Hertz in Crelle J. **92.** p. 165 doch ziemlich deutlich auf die Vollkommenheit des Anpassungsvermögens hin.

Schliesslich sind noch zwei Bemerkungen zu Gunsten der Definition zu machen, d. h. zu Gunsten der Wahl der *Eindringungs-Festigkeitsgrenze* an Stelle der *Eindringungs-Elasticitätsgrenze* behufs Definition der Härte. Bei absolut spröden Körpern fallen beide Grenzen zusammen und die Frage ist daher hier irrelevant; es ist aber anzunehmen, dass auch die meisten spröden Körper eine gewisse Plasticität haben, die erste bleibende Veränderung also schon etwas früher als der Sprung auftritt; alsdann würde aber auch bei den spröden Körpern der Eintritt des Sprunges viel schärfer zu beobachten sein, als der Eintritt der ersten bleibenden Veränderung. Zweitens schliesst man sich auf die gedachte Weise dem gewöhnlichen Härtebegriff noch strenger an; denn bei den praktisch gebräuchlichen Methoden findet in Folge stossweisen oder kinetischen Verfahrens auch bei plastischen Körpern meist Loslösung von Theilchen statt, ein Vorgang, welcher auf die Festigkeits- und nicht auf die Elasticitätsgrenze Bezug hat.

Die vorstehenden Betrachtungen rechtfertigten es, wenn man den Satz aufstellt: *Härte ist diejenige Eindringungs-Beanspruchung, bei welcher bei spröden Körpern Trennung der Theile, und an welche bei plastischen Körpern stetige Anpassung stattfindet.*

Um hiernach die absolute Härte des Flussspathes zu finden, muss man noch die Zahlen auf absolutes Maass umrechnen, d. h. wegen der Umrechnung von p von Gramm in Kilogramm mit 1000 dividiren, wegen des Verhältnisses der Hebelarme mit 9,8 multipliciren, wegen des Werthes der Scalentheile die d mit 27, also die p_1 mit 729 multipliciren, wegen der Kreisform der Druckfläche d^2 mit $\pi / 4$, also p_1 mit $4 / \pi$ und endlich zur Gewinnung des maximalen Einheitsdrucks, der im Mittelpunkte der Druckfläche herrscht, mit $3 / 2$ multipliciren. Für den constanten Endwerth von p_1, welcher P_1 heissen möge, liefern dann die obigen beiden und die übrigen Versuchsreihen folgende Werthe:

ϱ	3	5	10
P_1	76,4	61,4	49,1
	77,6		49,1
	73,7		
	73,7		

Von den vier Werthen für $\varrho = 3$ sind, wie man sieht, die beiden ersten nicht unwesentlich kleiner als die identischen beiden letzten; sie entsprechen den beiden ersten überhaupt mit einem plastischen Material ausgeführten Versuchsreihen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass bei diesen das Verschwinden der elastischen Nachwirkung nicht vollständig abgewartet wurde, sodass die benutzten d zu klein sind, die erhaltenen P_1 also zu gross; es soll daher der gemeinschaftliche Werth der beiden letzten Zahlen benutzt werden. Die Mittelwerthe sind dann:

ϱ	3	5	10
P_1	73,7	61,4	49,1

Es zeigt sich also hier dieselbe Erscheinung, wie bei spröden Körpern. Die so gefundene Härte ist für verschiedene Krümmungen der benutzten Linsen eine verschiedene, und es liegt nahe, die dort zur Erzielung gleicher Werthe vorgenommene Manipulation auch hier zu wiederholen, d. h. mit den Cubikwurzeln aus ϱ zu multipliciren. Das Ergebniss ist:

ϱ	3	5	10
$P_1 \sqrt[3]{\varrho}$	106	105	106

Die Uebereinstimmung ist eine überraschend gute (eine so gute jedenfalls nur zufällig), und schliesslich erhält man:

$$H = 106,$$

mit einem Fehler, der wahrscheinlich kleiner als eine Einheit ist. Wollte man für $\varrho = 3$ alle Werthe benutzen, so würde man $P_1 = 75{,}4$, $P_1 \sqrt[3]{3} = 109$ und damit im Mittel $H = 107$, also auch nicht viel anders erhalten.

Die Härte des Flussspaths ist hiernach nicht ganz halb so gross wie diejenige des Glases und nur etwas mehr als $^1/_3$ von der des Quarzes bei Beanspruchung senkrecht zur Axe. Für das letztgenannte Verhältniss fand Pfaff $^1/_8$, Franz sogar $^1/_{12}$.

Steinsalz.

Die Planfläche entsprach hier der Würfelfläche, ebenso die ebene Grundfläche der Linsen, letztere hatten Krümmungsradien von 3 bez. 10 mm. Das Material wurde mir von Hrn. Prof. Kalkowsky aus dem mineralogischen Institut freundlichst geliefert. Obwohl reines Steinsalz an sich nicht hygroskopisch ist, erwiesen sich doch in dem Raume, in welchem die Untersuchungen stattfanden, die Präparate als äusserst unbeständig, es mussten daher hinsichtlich des Polirens, Trocknens und hinsichtlich des Ganges der Beobachtungen besondere Vorkehrungen getroffen werden, welche noch vervollkommnet werden sollen. Dazu kommt, dass hier von noch kleineren Drucken ausgegangen werden muss, als beim Flussspath, wenn man vollständige Versuchsreihen erhalten will, und gerade in diesem ersten Versuchsbereiche begegnet man eigenartigen Schwierigkeiten. Für die eigentliche Härtemessung kommt dieser Bereich jedoch nicht in Betracht, und es genüge daher die folgende Tabelle beispielsweise anzuführen.

$\varrho = 3.$

$[p]$	$[d]$	$1000\,[q]$	$100\,[p_1]$
227	15,8	57	91
354	19,1	51	97
554	24,6	37	92
754	28,6	32	92
1054	33,9	26	92
1554	40,6	23	95
2054	46,3	21	96

Der Druck auf die Flächeneinheit ist also hier innerhalb des ganzen verfolgten Intervalles, d. h. noch bei Drucken, die sich wie 1 : 9 verhalten, constant. Die Ausrechnung ergibt schliesslich: $H = 18{,}5$ für $\varrho = 3$ und $H = 21{,}1$ für $\varrho = 10$. Dass diese Zahlen weit stärker voneinander abweichen als die für Flussspath oder spröde Stoffe gefundenen, darf nach den vorangestellten Bemerkungen nicht eben Wunder nehmen. Der Mittelwerth ist abgerundet:

$$H = 20.$$

Hiernach ist Quarz 15 mal, Flussspath etwa 5 mal so hart wie Steinsalz, während das Verhältniss der betreffenden Mohs'schen Nummern nur $7:4:2^1/_2$ ist.

Kalkspath.

Es wurden Präparate benutzt, welche theils nach der Spaltfläche, theils nach der Axe, theils senkrecht zu ihr orientirt waren; hier soll aber nur von den an Stücken der ersten Art ausgeführten Messungen, die verhältnissmässig am leichtesten sich gestalten, die Rede sein.

Der Kalkspath bietet insofern, auch nach den Versuchen an Glas und Quarz einerseits, an Flussspath und Steinsalz andererseits, ein principielles Interesse dar, als er, wie die Versuche in sehr bezeichnender Weise lehren, eine gewisse Mittelstellung zwischen den spröden und den plastischen Stoffen, wenn auch deutlich nach der Seite der ersteren hin, einnimmt. Es tritt zwar ein *Sprung* auf, er bildet sich aber nicht, wie bei Glas und Quarz plötzlich, sondern *ganz successive*, derart, dass zunächst nur ein kleines Stück sichtbar wird, das sich bei weiterer Drucksteigerung ausbreitet und zuletzt meist schliesst; die Grundform des Sprunges ist ein Rhombus mit abgerundeten Ecken, und es bildet sich zuerst ein stumpfer Winkel aus, dessen Schenkel sich dann verlängern u. s. w. Die Allmählichkeit der Sprungbildung macht sich noch auf eine andere Weise bemerklich, sie kündigt sich nämlich durch ein eigenthümliches Knistern dem Ohre schon im voraus an, bei einem Drucke, bei welchem man, auch bei starker Vergrösserung, mit dem Auge noch keine Unstetigkeit wahrzunehmen vermag. Der Gesammtdruck, bei welchem der Sprung eintritt, ist ferner von Versuch zu Versuch sehr verschieden, die Schwankungen sind weit stärkere, als bei Glas oder Quarz, für $\varrho = 5$ sind z. B. die Extreme [272] und [705], und man würde daher die Versuche als aussichtslos betrachten müssen, wenn man nicht bei Ausrechnung der wirklich maassgebenden Grösse P_1, d. h. des Endwerthes des Druckes auf die Einheit der Druckfläche, fände, dass diese Grösse, selbst für die gedachten überaus verschiedenen Werthe von P, Werthe besitzt, die nicht sehr beträchtlich voneinander abweichen. Bei spröden Körpern wächst p_1 ununterbrochen bis zu seinem Sprungwerthe P_1, bei plastischen wächst es nur anfangs und geht schliesslich in den bei weiterer Drucksteigerung constanten Grenzwerth P_1 über; bei Kalkspath ist das Verhalten ein mittleres, die Zunahme von p_1 wird hier schwächer und

schwächer, völlige Constanz tritt aber nicht ein, es erfolgt daher eine Sprung, aber wann er erfolgt, dass hängt in hohem Maasse von feinen Zufälligkeiten ab. Damit ist zugleich gezeigt, dass diese Unsicherheit sich auf die maassgebende Grösse P_1 nicht oder doch nicht in einem Grade erstreckt, welcher die Härtemessung unmöglich machte.

Auch hier genüge es, eine Versuchsreihe als Beispiel anzuführen:

$\varrho = 3.$

$[p]$	$[d]$	$100\,[q]$	$10\,[p_1]$
27	3,1	90	28
47	3,9	79	31
67	4,5	73	33
87	4,8	79	38
117	5,3	79	42
157	6,15	68	42
197	6,7	66	44
202	6,75	66	45

Bei der letztaufgeführten Belastung trat der erste Sprungansatz hervor.

Im ganzen wurden hier, um eine grössere Genauigkeit zu erzielen, zahlreiche Versuchsreihen durchgeführt, nämlich sechs mit Linsen von $\varrho = 3$ und acht mit Linsen von $\varrho = 5$. Die Berechnungsweise konnte sich hier nicht an die bei anderen spröden Körpern geübte, den Mittelwerth von q benutzende (vgl. die letzte der Formeln (4) der ersten Abhandlung) anschliessen, weil hier, im Zusammenhange mit dem oben Gesagten, q nicht constant ist, sondern abnimmt, wie auch unser Beispiel erkennen lässt, es ist daher (entsprechend der ersten der citirten Formeln (4)) hier wie bei plastischen Körpern zu verfahren, d. h. ohne weiteres der Sprungwerth P_1 zu benutzen. Die Ergebnisse sind folgende:

1. $\varrho = 3.$

$P_1 = 63{,}3$ 78,2 61,3 68,7 67,2 63,3.

2. $\varrho = 5.$

$P_1 = 59{,}3$ 61,5 48,5 54,8 56,2 56,4 52,5 57,8.

Von den Zahlen der ersten Reihe weicht die zweite, von denen der zweiten Reihe ebenfalls die zweite stärker von den übrigen ab, und der Entschluss, diese Werthe nicht zu berücksichtigen,

würde durch gewisse, im Beobachtungsbuch angemerkte, Umstände gestützt werden können; trotzdem soll hiervon abgesehen, die Werthe also mit benutzt werden, da das Endergebniss dadurch nicht merklich beeinflusst wird. Man erhält dann folgende Mittelwerthe:

$$\text{für } \varrho = 3: \ P_1 = 67{,}0,$$
$$\text{für } \varrho = 5: \ P_1 = 55{,}9.$$

Multiplicirt man die erste Zahl mit $\sqrt[3]{3}$, die letztere mit $\sqrt[3]{5}$, so erhält man die Zahlen 96,6 und 95,6, also sehr gute Uebereinstimmung, und die absolute Härte des Kalkspaths bei Beanspruchung senkrecht zur Spaltungsfläche wird schliesslich:

$$H = 96.$$

Der Kalkspath ist also nur um ein weniges weicher als der Flussspath, was mit der Nachbarschaft dieser Stoffe in der Mohs'schen Scala übereinstimmt. Wie verschiedenen Werth aber die einzelnen Stufen derselben haben, ersieht man daraus, dass der Stufe von 2 bis 3 (Steinsalz bis Kalkspath) der Werth 96—20, also 76, dagegen der Stufe von 3 bis 4 (Kalkspath bis Flussspath) der Werth 106—96, also nur 10, und schliesslich der Doppelstufe von 4 bis 6 (Flussspath bis Quarz) der Werth 295—106, also 189 entspricht.

Glassorte IV.

Das Interesse, welches dieses durch seine intensiv gelbe Farbe auch äusserlich charakterisirte Material, ein Bleisilicat mit hohem Bleioxydgehalt, bietet, ist ein ähnliches wie beim Kalkspath. Auch hier tritt der Sprung meist ganz allmählich auf, ja in einigen Fällen blieb ein eigentlicher Sprung überhaupt aus, und es wurde nur eine Art von feinen Rillen sichtbar, in welchen Fällen dann auch q sich nicht als constant erwies, sondern nicht unbeträchtlich abnahm, während dafür p_1 sich allmählich einem, wenigstens nahezu constanten Werthe, näherte. Bei einigen Versuchsreihen, und zwar gerade bei besonders sorgfältig ausgeführten, trat aber noch eine besondere Erscheinung auf, welche, wenn unrichtig interpretirt, zu falschen Härtewerthen führen musste. Bei dem Druckwerthe nämlich, bei welchem etwa der Eintritt des Sprunges zu erwarten war, blieb dieser aus, erst bei einem sehr viel

grösseren Drucke entstand ein Sprung und zwar ein Sprung von viel grösserem Durchmesser, als man hätte erwarten sollen; entlastete man aber nunmehr, sodass sich der der Druckfläche entsprechende schwarze Fleck zusammenzog, so wurde innerhalb des gedachten Sprunges ein kleinerer sichtbar, der offenbar gleichzeitig mit ihm entstanden und gewissermassen durch ihn ausgelöst worden war. Auch bei Glas und Quarz treten bei hinreichender Drucksteigerung mehrere concentrische Ringe auf, aber stets der kleinste zuerst; und da dieser das Zahlenmaterial für die Härtebestimmung bereits bietet, so verblieb es bei den früheren Versuchen bei diesem einen Sprung. Auf die Bedeutung der bei dem vorliegenden Material beobachteten Anomalie für die Plasticität wird an anderer Stelle eingegangen; für die Härtemessung kommt wiederum lediglich der innerste Sprung in Betracht. Der ihm entsprechende Druck ist zwar hier der directen Beobachtung entgangen, er lässt sich aber aus dem Sprungdurchmesser nachträglich berechnen und führte dann zu einer genügenden Uebereinstimmung mit den Fällen in welchen die Anomalie nicht auftrat.

Alle diese Umstände bringen es mit sich, dass die Einzelwerthe hier stärker schwanken als bei den früher untersuchten Glassorten. Es ergaben sich nämlich folgende Zahlen für die Beanspruchung P_1 bei Eintritt des Sprunges:

	Einzelwerthe			Mittelwerth
$\varrho = 4$	115	116	129	120
$\varrho = 1$	170	204	—	187

Multiplicirt man wieder die erstere Zahl mit $\sqrt[3]{3}$, die zweite mit $\sqrt[3]{1}$, so erhält man:

191, bez. 187,

und im Mittel mit Rücksicht auf das Gewicht der Einzelwerthe:

$$H = 190.$$

Dieses Glas ist also noch weicher als das weichste der früher untersuchten (I), der Spielraum der Härte bei Gläsern wird damit bis zu den Grenzen 190 und 239 vorgeschoben, und als mittlere Härte des Glases kann man die runde Zahl 220 ansetzen.

Der Eindringungsmodul.

Für jede Art von Beanspruchung gibt es bekanntlich drei charakteristische Grössen, z. B. für die Beanspruchung auf Längszug den Dehnungsmodul (meist schlechthin Elasticitätsmodul genannt), den Modul der Dehnungsvollkommenheit (Elasticitätsgrenze oder Tragmodul) und den Modul der absoluten Festigkeit; für eine andere Art der Beanspruchung haben diese Grössen andere Werthe, aber zwischen der entsprechenden Bedeutung, z. B. zwischen dem Dehnungsmodul und dem Torsionsmodul, bestehen gewisse Beziehungen. Die hier vorliegende Art der Beanspruchung ist die auf Eindringung, und der Festigkeitsmodul für diesen Fall ist die Härte. Gleichzeitig geben die Beobachtungen, soweit sie mit der nöthigen Vollständigkeit vorliegen, die Daten an die Hand, um auch den Elasticitätsmodul E' für diesen Fall, der kurz *Eindringungsmodul* genannt werden möge, zu bestimmen. Zwischen dieser Grösse und dem Dehnungsmodul E besteht ferner die Beziehung:

$$E' = \frac{E}{1 - \mu^2},$$

sodass man auch E berechnen kann, falls man μ kennt. Wäre μ, wie man früher glaubte, für alle Stoffe und für alle Grade der Beanspruchung gleich $^1/_4$, so würde stets die Gleichung $E = {}^{15}/_{16}\ E' = 0{,}94\ E'$ gelten; thatsächlich ist beides nicht der Fall, vielmehr variirt μ etwa zwischen den Grenzen $^1/_8$ und $^1/_2$, und folglich E zwischen den Grenzen 0,99 E' und 0,75 E'. Für Quarz wurde in der ersten Abhandlung geradezu $E = E'$, für Glas auf Grund der von Voigt erhaltenen μ-Werthe $E = 0{,}97\ E'$, für andere Stoffe ist man vielfach auf Schätzungen angewiesen, und es muss daher betont werden, *dass unser Verfahren direct nur den Eindringungsmodul, den Dehnungsmodul aber nur indirect und ungefähr liefert.*

Was nun den Eindringungsmodul betrifft, so gilt die einfache Formel:

$$E' = 12\,\varrho\,q';$$

für die früher untersuchten Stoffe Glas und Quarz war q constant, irgend eine Schwierigkeit trat demgemäss nicht auf. Bei den nunmehr behandelten Stoffen nimmt q ab, und es frägt sich daher, welcher Werth zu benutzen sei. Diese Frage

beantwortet sich auf Grund der Erwägung, dass der Elasticitätsmodul jeder Art, also auch unser E', der Widerstand gegen vorübergehende Veränderungen unterhalb der Elasticitätsgrenze ist. Da nun beim Steinsalz dieses Gebiet nicht zur Beobachtung gelangte, muss für dieses Material die Bestimmung von E' noch hinausgeschoben werden. Für Flussspath sind im Mittel aus den zur Verfügung stehenden Versuchsreihen die in Betracht kommenden Werthe $[q] = 1{,}45$ für $\varrho = 3$, bez. $[q] = 0{,}43$ für $\varrho = 10$ (die Einzelwerthe in den oben mitgetheilten Tabellen sind, etwas abweichend, 1,38, bez. 0,41, liegen aber auch schon ein wenig jenseits der Elasticitätsgrenze); in absolutem Maasse wird also $q = 280$ für $\varrho = 3$, bez. $q = 82{,}7$ für $\varrho = 10$, somit $\varrho q = 840$ bez. 827 und folglich $E' = 10080$, bez. 9924, im Mittel für Flussspath (Oktaëderfläche):

$$E = 10002.$$

Nach dem Verhalten des Flussspathes in Bezug auf Härte und seine Elasticitätsconstanten kann man die Grösse μ (die an sich für Krystalle natürlich keine Bedeutung hat) etwa gleich 0,30 setzen, sodass $E = 0{,}91\ E'$, also $E = 9102$ wird, was mit dem Voigt'schen Werthe zufällig fast ganz genau übereinstimmt.

Für Kalkspath ergeben die allerdings ziemlich schwankenden Einzelzahlen den Mittelwerth $\varrho q = 780$, also den Eindringungsmodul senkrecht zur Spaltfläche:

$$E' = 9360$$

und, wenn hier $\mu = 0{,}33$ gesetzt wird, was den Verhältnissen am besten entsprechen dürfte, $E = 8320$; der aus den Beobachtungen von Baumgarten sich berechnende Werth ist wesentlich kleiner, der neuere und einwurfsfreiere von Voigt etwas grösser.

Was endlich die Glassorte IV betrifft, so ergibt sich im Mittel aus allen Versuchsreihen (soweit sie verwerthet werden können)

$$E' = 5532.$$

Nun ist für diese Glassorte die Grösse μ jedenfalls nicht so klein, wie sie für hartes Glas von Voigt gefunden und demgemäss bei den Gläsern I bis III zu Grunde gelegt wurde;

man wird vielmehr $\mu = 0,25$ setzen dürfen und erhält dann $E = 0,94\ E'$, also $E = 5200$.

Schluss.

Zum Schluss sollen die bisherigen Ergebnisse übersichtlich zusammengestellt und einige Bemerkungen daran geknüpft werden.

Stoff	Härte-Nummer	Härte H	E'	$100\frac{H}{E'}$	E
Quarz, senkr. z. Axe	7	295	10164	2,9	10164
Glas III	6	239	7764	3,1	7531
„ II	6	226	6960	3,2	6751
„ I	5	214	5592	3,8	5424
„ IV	5	190	5332	3,6	5200
Flussspath, Okt. F.	4	106	10002	1,1	9102
Kalkspath, Spaltfl.	3	96	9360	1,0	8320
Steinsalz, Würfelfl.	$2^1/_2$	20	—	—	4110

Wie man sieht, stimmt für alle acht Stoffe die Reihenfolge in der alten und neuen Scala überein, und das ist das Einzige, was zu erwarten und zu verlangen war. Ferner zeigt sich, dass die Härte stets nur ein oder einige Procent der Elasticität beträgt, eine Erscheinung, die sich bei anderen Festigkeitsarten wiederholt. Dagegen lässt sich der am Schlusse der ersten Abhandlung für die dort behandelten Stoffe aufgestellte Satz allgemein nicht aufrecht erhalten, wonach der grösseren Elasticität auch die grössere Härte entspricht; denn Flussspath und Kalkspath sind weit elastischer und doch sehr viel weicher als die Gläser. Dieses Verhalten wird sofort verständlich, wenn man bedenkt, dass die für die Elasticität maassgebende Grösse der Werth von q für kleine Drucke ist, in die Härte dagegen der Werth von q für grosse Drucke eingeht, und dass diese beiden Werthe zwar für spröde Körper einander gleich, für plastische aber sehr verschieden sind. Man wird hiernach den in Rede stehenden Satz auf spröde Körper und zwar — wie das Verhalten des Kalkspaths zeigt — auf hervorragend spröde Körper beschränken müssen.[1])

Jena, November 1891.

1) Man vgl. hierüber auch die Bemerkungen von Beckenkamp, Z. f. Kryst. **12.** p. 423. 1887.

V. *Plasticität und Sprödigkeit; von F. Auerbach.*

§ 1. Die Eigenschaften der festen Körper.

Die dem festen Aggregatzustande angehörigen Körper weisen trotz dieser ihrer Zusammengehörigkeit eine so grosse qualitative und quantitative Verschiedenheit des Verhaltens gegenüber äusseren Einwirkungen auf, dass es erforderlich gewesen ist, ihnen eine ganze Reihe von charakteristischen Eigenschaften beizulegen. Im Wesentlichen sind es die folgenden:

1) Die *Elasticität*, d. h. die zur Hervorbringung einer bestimmten *temporären* Deformation erforderliche äussere Kraft, oder kurz: der Widerstand gegen vorübergehende Veränderung.

2) Die *elastische Vollkommenheit*, d. h. die zur Hervorbringung einer durch Uebereinkunft geregelten *bleibenden* Veränderung eben erforderliche Kraft (häufig Elasticitätsgrenze genannt), oder kurz: der Widerstand gegen bleibende Veränderung.

3) Die *Festigkeit*, d. h. die zur Trennung der Theile des Körpers erforderliche äussere Kraft, oder kurz: der Widerstand gegen Trennung der Theile.

4) Die *Härte*, d. h. der Widerstand gegen das Eindringen eines convexen Körpers (Spitze) in eine ebene Fläche des betreffenden Körpers.

5) *Sprödigkeit* und *Nachgiebigkeit (Plasticität)*, d. h. die Eigenschaft gewisser Körper, nämlich der spröden, bei äusseren Einwirkungen, die ein gewisses Maass überschreiten, den Zusammenhang der Theile durch ein *plötzliches* Ereigniss aufzugeben, bez. die Eigenschaft anderer Körper, nämlich der nachgiebigen oder plastischen, in entsprechenden Fällen ebenfalls bleibende, aber *allmähliche* und *stetige* Veränderungen zu erfahren.

6) Die *Zähigkeit* (innere Reibung), d. h. der Widerstand gegen innere Bewegungen, in Folge dessen diese Bewegungen erlahmen und in den Ruhezustand übergehen.

Ein Blick auf diese Zusammenstellung lehrt, dass es sich hier um sehr verschiedene Begriffsarten handelt, verschieden in mehrfacher Hinsicht. Zunächst sind die drei ersten und der fünfte Begriff entschieden statischer, der sechste, auf den hier im übrigen nicht weiter eingegangen werden soll, entschieden dynamischer Natur. Bei der Härte herrscht in dieser Hinsicht keine Einheitlichkeit, insofern die Beanspruchung bald durch statischen Druck, bald durch den Bewegungsvorgang des Ritzens ausgeübt gedacht wird; einfacher ist jedenfalls die statische Definition, und da sie das Wesentliche der Charakteristik liefert, ist sie vorbehaltlich der später an sie anzuknüpfenden Feststellung des lateralen Richtungseinflusses, der dynamischen vorzuziehen.

Ferner ist zu beachten, dass die drei ersten und der fünfte Begriff nicht individuelle Begriffe, sondern *Begriffskategorien* sind, insofern bei ihrer Aufstellung die Art der äusseren Beanspruchung gänzlich offen geblieben ist. Für jede spezifische Beanspruchung ergiebt sich ein besonderer individueller Begriff in jeder Kategorie, beispielsweise für Beanspruchung durch Zug: 1) Zugelasticität, 2) zugelastische Vollkommenheit, 3) Zugfestigkeit, 5) Zugplasticität (Dehnbarkeit, Ductilität), analog für andere Einwirkungsarten, wie Biegung, Drillung, Scherung u. s. w. Die betreffenden Begriffe sind von vornherein völlig selbständige, die Untersuchung der dabei stattfindenden Vorgänge liefert aber natürlich Beziehungen zwischen ihnen, derart, dass z. B. bei isotropen Körpern sämmtliche Widerstände gegen temporäre Veränderung, sei es nun Dehnung, Biegung u. s. w., sich auf zwei Grössen zurückführen lassen.

Im Gegensatz hierzu ist die Härte keine Begriffskategorie, sie ist vielmehr, da sie sich auf eine ganz bestimmte Art der Beanspruchung bezieht, ein individueller Begriff, und zwar, insofern man a) darunter den Widerstand gegen vorübergehende Eindrücke convexer Körper verstehen wollte, eine Art der Elasticität (Eindringungs-Elasticität), b) insofern es sich um eben eintretende bleibende Veränderungen handelt, eine Art von elastischer Vollkommenheit, endlich c) nach der gewöhnlichen Fassung des Begriffs, bei der es sich um Lostrennung von Theilen handelt, eine Art von Festigkeit (Ein-

dringungsfestigkeit). Aus der obigen Zusammenstellung ist demgemäss die Härte als besondere Nummer auszuscheiden.

§ 2. Plasticität und Sprödigkeit. Definitionen.

Der wichtigste Umstand jedoch, welcher bei Betrachtung der Zusammenstellung in die Augen fällt, ist der folgende. Alle aufgeführten Begriffe mit Ausnahme von 5) sind *quantitative Grössen,* welche einer Messung zugänglich sind. Streng genommen ist dies zwar bei der elastischen Vollkommenheit nicht der Fall, weil als Messung nur die Einschliessung einer Grösse in *zwei* Grenzen, eine obere und eine untere, zu bezeichnen ist, hier aber, wo es sich um eine eben eintretende dauernde Veränderung handelt, nur die obere Grenze mit Bestimmtheit, die untere jedoch nur nach Uebereinkunft angegeben werden kann; (bei der Dehnung geht diese Uebereinkunft z. B. dahin, nur bleibende Dehnungen von 0.5 mm und mehr zu berücksichtigen) — die wahre untere Grenze liegt im Princip und wahrscheinlich auch in der Wirklichkeit bei null. Immerhin lässt sich auch hier durch eine Uebereinkunft der erwähnten Art eine Messung ermöglichen. Dagegen scheint man es bei der Sprödigkeit und Plasticität mit zwei einander *qualitativ gegenüberstehenden Begriffen* zu thun zu haben, derart, dass ein Körper entweder schlechthin spröde oder schlechthin plastisch ist.

Dass es sich jedoch wirklich so verhalte, ist schon von vornherein und nach Analogie anderer Fälle nicht anzunehmen, in welchen sich der Gegensatz zwischen zwei Eigenschaften bei näherem Zusehen auf eine einzige, quantitative Eigenschaft reducirt. So giebt es, um mit den nächstverwandten Erscheinungen zu beginnen, nicht harte und weiche, sondern nur Körper verschiedener Härtegrade, nicht elastische und unelastische, sondern nur Körper von verschiedener Elasticität; es giebt ferner nicht Wärme und Kälte, sondern nur Wärme verschiedener Grade, und ähnlich dürfte es sich mit den Erscheinungen des Magnetismus und Diamagnetismus verhalten. Man wird hiernach vermuthen, dass sich auch der Gegensatz von Nachgiebigkeit und Sprödigkeit auf Nachgiebigkeit verschiedener Grade reduciren wird.

Diese Vermuthung wird durch die bisher gemachten Erfahrungen vielfach bestätigt. Eine exakte Untersuchung der Frage scheint zwar noch für keine Art von Beanspruchung ausgeführt worden zu sein, aus der Technik weiss man aber, dass ein und derselbe Körper nach einander die charakteristischen Erscheinungen der Nachgiebigkeit und der Sprödigkeit aufweisen kann. In dieser Hinsicht sei hier nur an die Längsdehnung der Metalle erinnert. Ein Kupferdraht von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt erfährt z. B. bei einem Zug von etwa 12 Kilo eine bleibende Verlängerung, bei Steigerung des Zugs nimmt diese Verlängerung zu, der Draht verhält sich also plastisch; wenn aber der Zug den Betrag von 40 Kilo erreicht, reisst der Draht, er erweist sich also als spröde. Man entfernt sich also gleichermaassen von der Wahrheit, wenn man sagt: Kupfer ist gegen Dehnung nachgiebig, wie wenn man sagt: Kupfer ist gegen Dehnung spröde; man wird vielmehr unabweislich zu dem Schlusse geführt: Kupfer hat eine gewisse, aber begrenzte Nachgiebigkeit. Gleichzeitig erhält man auch schon Anhaltspunkte für die Definition dieser Eigenschaft als einer mathematischen Grösse; es erübrigt nur, die Betrachtung zu verallgemeinern, etwa in der folgenden Weise.

Wenn ein Körper einer wachsenden Beanspruchung irgend welcher Art unterworfen wird, so wird er bei einem gewissen Werthe derselben die durch Uebereinkunft festgesetzte Elasticitätsgrenze erreichen, d. h. er wird eine bleibende Veränderung von einer bestimmten, sehr kleinen, aber schon sicher nachweisbaren Grösse erfahren; dieser Werth der einwirkenden Kraft, natürlich auf die Einheit der Angriffsfläche berechnet, ist die elastische Vollkommenheit des Körpers für die betreffende Art der Beanspruchung, er werde mit V bezeichnet. Bei weiterer Steigerung der Beanspruchung wird der Körper den Zusammenhang seiner Theile an irgend einer Stelle aufgeben, er hat seine Festigkeitsgrenze erreicht, dieser Werth der Kraft, also seine Festigkeit für die vorliegende Art der Einwirkung, sei F. Denkt man sich nun den extremen Fall eines absolut spröden Körpers, also eines Körpers, welcher sich nicht dauernd zu verändern vermag, ohne gleichzeitig Trennungsstellen aufzuweisen, so werden die beiden betrachteten kritischen Momente in einen einzigen zusammenfallen.

Daraus folgt, dass ein mögliches, und zwar das einfachste Maass der Plasticität N die Differenz $F - V$ ist, in Formel:

$$N = F - V,$$

in Worten: *Die Plasticität ist der Ueberschuss der Festigkeit über die elastische Vollkommenheit.* Sie ist null für einen absolut spröden Köper, nicht so einfach aber sind die Bedingungen, unter denen sie einen maximalen Werth erreicht. Es kann dies nämlich auf zweierlei Weise geschehen, nämlich einmal, wenn V sehr klein, und zweitens, wenn F sehr gross wird; am grössten wird die Plasticität, wenn beide Eventualitäten zugleich eintreten, und numerisch am grössten, nämlich unendlich, wenn $F = \infty$ ist — ein Fall, der jedoch, vorbehaltlich des weiter unten Auszuführenden, in der Wirklichkeit nicht eintreten wird. Wie man sieht, ist die so definirte Plasticität keine selbständige Eigenschaft der Körper, sie ist vielmehr eine Consequenz zweier anderer, verwandter Eigenschaften.

Die Differenzbildung führt, wie gesagt, zu der einfachsten Definition der Plasticität; es können aber noch andere Definitionen aufgestellt werden, und von diesen haben zwei eine gewisse Berechtigung, insofern sie sehr wohl geeignet sein können, bestimmte Eigenthümlichkeiten im Verhalten der Körper zu charakterisiren. Der Deutlichkeit halber soll die bisher definirte Grösse, dem Umstande entsprechend, dass sie die Differenz zweier Modulen ist (bei der Längsdehnung z. B. des absoluten Festigkeitsmoduls und des absoluten Tragmoduls), *Plasticitätsmodul* genannt werden. Zu der einen der beiden weiteren Definitionen gelangt man, wenn man sich die Frage vorlegt, welcher Bruchtheil des Festigkeitsmoduls der Plasticitätsmodul ist, d. h. es ist die „Plasticitätszahl“:

$$n = \frac{F - V}{F},$$

in Worten: *Die Plasticitätszahl ist der in Bruchtheilen der Festigkeit ausgedrückte Ueberschuss der Festigkeit über die elastische Vollkommenheit.*

Ein dritter Begriff endlich geht aus der Auffassung hervor, die Plasticität sei nicht zu messen durch den Bereich der angreifenden *Kraft*, innerhalb dessen plastisches Verhalten auftritt, sondern durch die Grösse der innerhalb dieses Bereiches

auftretenden plastischen *Wirkung*. Diese neue Grösse hängt in einfacher Weise mit der erstgenannten zusammen, und zwar sieht man unmittelbar ein, dass man, um von der Kraft auf die Wirkung überzugehen, nur mit dem Verhältniss von Deformation und Kraft zu multipliciren oder mit dem Verhältniss von Kraft und Deformation zu dividiren braucht; wäre der in Betracht kommende Bereich derjenige der vollkommenen Elasticität, so würde dieses Verhältniss offenbar der Elasticitätsmodul sein, in Wirklichkeit wird es einen etwas anderen Werth haben, aber von derselben Natur und Grössenordnung sein. Man kann diesen Begriff *Plasticitätsverhältniss* oder auch (aus leicht ersichtlichen Gründen) *praktische Plasticität* nennen und erhält die Definition:

Praktische Plasticitat ist die Grösse der Veränderung, welche ein Körper von der Elasticitätsgrenze bis zur Festigkeitsgrenze erfährt.

Theoretisch ist dieser Begriff, wie man sieht, von geringerer Bedeutung als die vorhergehenden, dagegen ist ihm praktische Wichtigkeit nicht abzusprechen. Es findet hier ein ähnliches Verhältniss statt, wie bei dem Begriffe der Elasticität; im volksthümlichen Sprachgebrauche heisst nämlich, wie ich anderwärts ausgeführt habe[1]), ein Körper elastisch, nicht wenn er einen grossen Elasticitätsmodul, auch nicht, wenn er eine hohe Elasticitätsgrenze hat, sondern wenn die Grenzveränderung, welche er erleiden kann, ohne eine dauernde Veränderung zu erfahren, bei ihm gross ist (z. B. beim Kautschuk die Grenzdehnung, sodass dieser Stoff nach dem populären Begriff sehr elastisch ist, während er nach dem wissenschaftlichen Begriff einen sehr kleinen Elasticitätsmodul hat, also sehr wenig elastisch ist). In der That scheint man in der Technik da, wo von der Plasticität — freilich meist in ziemlich unklarer Weise — die Rede ist, vorzugsweise die praktische Plasticität oder das Plasticitätsverhältniss im Sinne zu haben.

§ 3. Erläuterungen und Zusätze.

Zur Erläuterung der drei eingeführten Begriffe diene das schon einmal benutzte Beispiel; die Beanspruchung sei Längs-

1) F. Auerbach, Jahresber. d. Schles. Ges. p. 132. 1887.

zug, der Körper ein Kupferdraht. Auf Grund der vorliegenden Messungen erhält man hier folgende Werthe:

Elast. Vollkommenheit (Tragmodul)	12	kg
Absol. Festigkeit	40	„
Plasticitätsmodul für Dehnung (40—12)	28	„
Plasticitätszahl „ „ (28/40)	0,7	
Plasticitätsverhältniss für Dehnung (28/9000, wobei der Elasticitätsmodul zwischen Elasticitäts- und Festigkeitsgrenze zu rund 9000 angesetzt ist) . .	0,003	

Dass diese letzte Zahl hier wie meistens sehr klein ausfällt, rührt natürlich nur daher, dass der Elasticitätsmodul als eine Kraft definirt wird, welcher eine ganz unnatürlich grosse Wirkung (Verlängerung auf das Doppelte) entspricht, eine Wirkung, wie sie thatsächlich fast nie vorkommt.

Ein und derselbe Stoff hat natürlich, wie er verschiedene Festigkeitsmoduln hat, so auch verschiedene Plasticitätsmoduln, und man muss jedesmal angeben, ob man den gegen Zug, Biegung, Druck, Scherung, Stoss, Eindringung von Spitzen u. s. w. meint. Diese Moduln werden zum Theil sogar sehr verschiedene Werthe besitzen, und es wird nicht einmal die Reihenfolge der Stoffe, nach dem einen oder dem anderen Modul geordnet, die gleiche sein; es sei in dieser Hinsicht nur an die bekannten Thatsachen betreffend die Duktilität, Walzbarkeit, Hämmerbarkeit u. s. w. erinnert.

Diejenige Form der Plasticität, welche bisher vorwiegend untersucht und mit diesem Namen belegt worden ist, ist die Plasticität bei allseitgem Druck. So hat, um von den Erscheinungen, die manche Gebirgsarten darbieten, einerseits und von den Versuchen über das Eis andererseits hier abzusehen, Kick[1]) Marmor, Steinsalz, Flussspath u. s. w. allseitigem Druck unterworfen und diese Art ihrer Plasticität in schöner Weise zur Anschauung gebracht; er hat auch das Bedürfniss empfunden, der quantitativen Seite der Frage näher zu treten, und zwar durch eine, freilich nur vermuthungsweise aufgestellte Definition, welche den zur dauernden Deformation eben erforderlichen Druck, durch die Härte dividirt, als Maass hinstellt. Dieser Definition ist vorzuwerfen, dass sie im Zähler den Anfangspunkt eines Bereichs statt dieses Bereiches selbst

1) Kick, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbfleisses p. 11. 1890.

wählt, namentlich aber, dass sie in den Nenner die Härte, d. h. die Festigkeit gegen Eindringen einer Spitze setzt, während doch dieser Vorgang mit demjenigen des allseitigen Drucks nichts zu thun hat; bringt man aber die beiden entsprechenden Aenderungen an, so erhält man, wie man sieht, unsere Plasticitätszahl für allseitigen Druck. Ferner erscheint es nach dem Obigen als eine nicht zutreffende Ausdrucksweise, wenn gesagt wird, durch allseitigen Druck (und nur durch diesen) könne ein spröder Körper in den plastischen Zustand übergeführt werden; es müsste vielmehr heissen, ein Körper, der gegen andere Beanspruchungsarten spröde ist, kann gegen allseitigen Druck sich plastisch verhalten — ein Ausspruch, der jedoch, wie sogleich gezeigt werden soll, für Steinsalz und Flusspath nicht einmal richtig ist, da diese Stoffe z. B. auch gegen Eindringung einer convexen Fläche sich plastisch verhalten.

Wenn die Plasticität eine quantitative Eigenschaft der Körper ist, so ist doch von vorn herein immerhin die Möglichkeit zuzugestehen, dass sich die Stoffe nach den Werthen dieser Grösse nicht in eine gewissermaassen stetige Reihe ordnen, sondern schroff getrennte Gruppen bilden. Die Dichte und das elektrische Leitungsvermögen sind z. B. auch quantitative Eigenschaften; da aber das schwerste Gas unter gewöhnlichen Umständen immer noch sehr viel leichter ist, als der leichteste unter den flüssigen oder festen Körpern, so entstehen zwei Gruppen, die man, wenn man damit keinen falschen Sinn verbindet, als „leichte" und „schwere" bezeichnen kann; und da gewisse Stoffe den elektrischen Strom sehr viel besser leiten als andere, so gelangt man zu der Unterscheidung von „Leitern" und „Nichtleitern". So ist es auch in unserem Falle möglich, dass es im Wesentlichen nur Stoffe von sehr geringer und Stoffe von sehr grosser Plasticität gibt, man würde dann jene als spröde, diese als plastisch bezeichnen dürfen, ohne dass damit ein Gegensatz des Vorzeichens ausgedrückt würde. Die Entscheidung hierüber kann natürlich nur die Beobachtung liefern.

Bei der oben angestellten Betrachtung des Deformationsverlaufes ist ein Vorgang ausser Acht geblieben, welcher in gewissen Fällen von ganz wesentlichem Einflusse auf die Erscheinung ist, nämlich die *Aenderung der Angriffsfläche der*

Kraft in Folge der dauernden Deformation. Wenn ein Draht bei der Dehnung die Elasticitätsgrenze überschreitet, so erfährt er nicht nur eine dauernde Verlängerung, sondern auch eine dauernde Verkleinerung des Querschnitts, demselben Gesammtzuge entspricht daher ein grösserer Zug auf die Querschnittseinheit; die Folge davon wird in diesem Falle indessen nur die sein, dass der Process beschleunigt wird und das Zerreissen schon bei einem früheren Gesammtzuge eintritt. Denkt man sich dagegen, zunächst abstract, den Fall, dass durch die Deformation die Angriffsfläche vergrössert wird, so wird derselben Gesammtkraft ein kleinerer Werth der Kraft auf die Flächeneinheit entsprechen, und es kann der Fall eintreten, dass bei immer weiter gehender Steigerung der Gesammtkraft die Einheitskraft schliessich nicht mehr steigt, sondern einen constanten Werth annimmt. Dieser Werth ist der für die Festigkeit maassgebende Werth, er geht also auch in die Plasticität als Diminuendus ein, für die *Messung* derselben ergibt sich also nichts Neues und keine Schwierigkeit. Wohl aber wird die *Erscheinung* eine wesentlich andere, indem nämlich die Trennung der Theile nicht bei einigen Körpern früher, bei anderen später eintritt, sondern bei einigen eintritt, bei anderen überhaupt ausbleibt. Es ist das ein, wie aus dem Gesagten folgt, nur scheinbarer Gegensatz, die letzteren Körper haben nicht etwa eine unendlich grosse, sondern sie haben eine endliche und angebbare Plasticität, und der Unterschied ist nur der, dass bei jenen Körpern die Trennung der Theile während der Periode des Ansteigens der Einheitskraft erfolgt, bei diesen jedoch innerhalb dieser Periode noch nicht und somit überhaupt nicht, weil die Gefahr ihren Höhepunkt bereits erreicht hat. Um es noch deutlicher zu sagen: Der Plasticitätsmodul würde auch in diesem Falle endlich sein, dagegen würde die plastische Veränderung, also das Plasticitätsverhältniss (in dessen Nenner der mehr und mehr abnehmende Elasticitätsmodul steht) allerdings in's Unbegrenzte wachsen können. Ob der hier betrachtete Fall in der Wirklichkeit, wenn auch nur angenähert, vorkommt, darüber lässt sich von vornherein natürlich nichts sagen.

Das Ergebniss der angestellten theoretischen Betrachtungen lässt sich in folgende Sätze zusammenfassen:

1) Die Plasticität (Nachgiebigkeit) ist eine quantitative Eigenschaft der Körper.

2) Sie ist keine neue und selbständige Eigenschaft, sondern durch die elastische Vollkommenheit und die Festigkeit mitbestimmt.

3) Als Maass der Plasticität kann man drei verschiedene Grössen einführen, nämlich entweder den Kraftbereich, in welchem stetige Veränderung stattfindet (Pl.-Modul), oder diese Grösse in Bruchtheilen der Festigkeit (Pl.-Zahl) oder die Grösse der stetigen Veränderung selbst (Pl.-Verhältniss, praktische Pl.).

4) Für einen absolut spröden Körper sind alle drei Grössen null, für einen absolut plastischen ist der Modul so gross wie der Festigkeitsmodul (wird also mit diesem unendlich), die Pl.-Zahl gleich eins, das Pl.-Verhältniss von einem bestimmten, nicht allgemein angebbaren Werthe.

5) Für jede Art der Beanspruchung gibt es eine besondere Plasticität (Zug-, Druck-, Biegungs-, Drillungs-, Scheerungs-, Eindringungs-Pl. u. s. w.).

6) Ob es absolut spröde und absolut plastische Körper gibt, inwieweit die Uebergänge wirklich vorhanden sind, wie sich die Stoffe hinsichtlich der verschiedenen Plasticitäten ordnen, welche Beziehungen zwischen den verschiedenen Plasticitäten bestehen und inwieweit dabei Gestalts-Pl. und Volumen-Pl. betheiligt sind, welchen Einfluss das zeitliche Moment, namentlich die Allmählichkeit der Beanspruchung einerseits und ihre Dauer andererseits hat,[1]) — diese und andere Fragen können nur durch die Beobachtung beantwortet werden.

§ 4. Beobachtungen über Eindringungs-Plasticität.

Die Beobachtungen über Plasticität und Sprödigkeit, welche ich nunmehr mittheilen will, beziehen sich auf diejenige Art der Beanspruchung, welche in dem normalen Druck einer convexen, speciell kugelförmigen Endfläche auf eine ebene End-

1) Die Betrachtung der zeitlichen Einflüsse führt, wie hier wenigstens anzudeuten ist, zur Erkenntniss eines gewissen Zusammenhanges zwischen den Begriffen Plasticität, Zähigkeit und Fluidität, wodurch die Frage der Plasticität auch von Wichtigkeit für die strenge Auffassung des festen resp. flüssigen Aggregatzustandes wird. Ein näheres Eingehen darauf würde aber hier zu weit führen.

fläche desselben Materials besteht, also nach der Definition von Hertz[1]) (welche wesentlich eine Präcisirung der alten statischen Definition ist) unter Bestimmung des Grenzdruckes zur Kenntniss derjenigen Art von Festigkeit führt, welche wir Härte nennen; man kann sie, wie oben bereits geschehen, als Eindringungs-Festigkeit bezeichnen und in analoger Bedeutung von Eindringungs-Plasticität sprechen. Wie für die Härtemessung, so hat sich auch für die Beobachtung der Plasticität die Feinheit und Exaktheit der durch meinen Apparat gewährleisteten Untersuchungsmethode in ausserordentlichem Maasse bewährt. Von allen besonderen Einflüssen, die unter Umständen, wie z. B. der zeitliche Einfluss, von besonderem Interesse werden können, soll hier, um jede Complication zu vermeiden, noch abgesehen werden.

Wenn man Versuche der angedeuteten Art in einer alle Fehlerquellen ausschliessenden Weise mit Glas oder Quarz anstellt, so zeigt sich, wie ich ausführlich dargelegt habe[2]), folgendes. Die ursprünglich punktförmige Berührung zwischen Ebene und Kugelfläche verwandelt sich in Folge des Druckes in eine flächenhafte, die Druckfläche ist kreisförmig, und mit steigendem Druck p wächst sie derart, dass, wenn d ihr Durchmesser ist, die Grösse $q = p/d^3$ constant bleibt, und somit derart, dass die Grösse $p_1 = p/d^2$, d. h. (bis auf einen Factor) der Druck auf die Flächeneinheit ebenfalls, wenn auch weit langsamer als p, wächst. Hebt man in irgend einem Stadium des Processes den Druck auf, so tritt wieder punktförmige Berührung ein, ein Zeichen, dass die Elasticitätsgrenze noch nicht erreicht ist. Es ist nun der Druck weiter zu steigern und erstens derjenige Werth von p_1, bei welchem nach der Entlastung dauernde Veränderung sich zeigt, also V, zweitens der Werth p_1, bei welchem Trennung der Theile eintritt, also F zu messen. Die letztere Messung ist sehr leicht auszuführen, weil die Trennung der Theile sehr plötzlich und in Form eines deutlich sichtbaren, kreisförmigen oder polygonalen Sprunges erfolgt; die Genauigkeit geht meist noch beträchtlich über 1 Proc. hinaus. Dass V sich ebenso genau beobachten lassen

1) H. Hertz, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbfleisses p. 441. 1882.
2) F. Auerbach, Wied. Ann. **43.** p. 61. 1891.

würde, war bei dem von der Vollkommenheit des beobachtenden Auges und des Apparates abhängigen Grenzcharakter dieser Grösse von vornherein nicht zu erwarten. Dazu kommt aber noch eine andere Schwierigkeit. Selbst wenn nämlich unmittelbar nach dem Entlasten eine Veränderung gegenüber dem ursprünglichen Zustande constatirt wird, darf man hieraus noch nicht schliessen, dass sie von dauernder Natnr sein werde; sie kann nämlich vom Charakter einer elastischen Nachwirkung sein und erweist sich in der That in allen Fällen mindestens theilweise und in zahlreichen Fällen sogar vollständig als solche, indem sie nach kürzerer oder längerer Zeit theilweise oder gänzlich verschwindet. Dieser Umstand bringt es auch mit sich, dass die Beobachtungen überaus zeitraubend werden, und es muss in Folge dessen bis auf weiteres darauf verzichtet werden, Zahlenangaben zu machen. Soviel ist aber ohnedies zu constatiren, dass eine wirklich dauernde Veränderung vor Eintritt des Sprunges, wenn überhaupt in einem der Beobachtung zugänglichen Maasse, erst kurz vorher erfolgt. Hieraus ist zu schliessen, dass V nicht viel kleiner als F, die Plasticitätszahl für Glas und Quarz eine kleine Zahl ist; will man sich also kurz ausdrücken, so kann man in der That, wie man es zu thun pflegt, sagen: *Glas und Quarz sind spröde Körper.*

Ganz anders gestaltet sich der Verlauf bei *Steinsalz.*[1]) Die Grösse q erweist sich hier nicht als constant, sie nimmt vielmehr, während p steigt, ganz beträchtlich ab, der Druck p_1 auf die Flächeneinheit nimmt nur anfangs ein wenig zu, wird aber alsbald constant, der oben gedachte Fall tritt also hier wirklich ein, ein Sprung erfolgt überhaupt nicht. Dagegen zeigt sich nach der jedesmaligen Entlastung eine anfangs kaum wahrnembare, allmählich aber immer grösser werdende Veränderung, und schliesslich zeigt die Platte an der Druckstelle, nach dem Herausnehmen aus dem Apparat, eine näherungsweise kugelförmige Mulde[2]), welche von Unstetigkeiten ganz frei und so klar ist, dass man z. B., trotz ihrer fast mikroskopischen Kleinheit ihren Krümmungsradius nach optischen

1) Näheres hierüber sehe man in der vorhergehenden Abhandlung.

2) In Wahrheit weicht die Begrenzung ein wenig von der Kreislinie ab und zwar beim Steinsalz (Würfelfläche) im Sinne eines Quadrats, beim Flussspath (Octaëderfläche) im Sinne eines gleichseitigen Dreiecks.

Methoden bestimmen kann. Eine entsprechende Abplattung weist die Kugelfläche auf, und die Krümmung beider neu entstandenen Gebilde ist in Uebereinstimmung mit der Theorie etwa halb so gross wie diejenige der Kugelfläche in ihrem ursprünglichen Zustande.

Das Steinsalz ist hiernach in hervorragendem Maasse plastisch — ein Ergebniss, welches nach dem hierüber Bekannten, insbesondere nach den Biegungs-Versuchen von Voigt im Voraus zu erwarten war. Es fragt sich nun, bei welchem Werthe der Beanspruchung die erste dauernde Veränderung auftritt; dieser Werth würde mit dem constanten Werth, den p_1 schliesslich erreicht, zu combiniren sein, um die Plasticität ihrem Betrage nach zu ermitteln. Es ist jedoch bisher nicht möglich gewesen, jenen Werth ausfindig zu machen, weil er ausserordentlich tief liegt und es deshalb erforderlich ist, die Versuchsreihe mit äusserst kleinen Beanspruchungen zu eröffnen. Ueberdies bietet das Material seiner sonstigen Eigenschaften wegen mannigfache äussere Schwierigkeiten dar, so dass, unter Vorbehalt der Fortsetzung dieser Untersuchungen, zu anderen Materialien übergegangen wurde.

Unter diesen erwies sich eines überraschender Weise als ebenfalls *in hohem Grade plastisch: es ist der Flussspath.* Die Versuche verlaufen hier in ganz ähnlicher Weise wie beim Steinsalz, auch hier bildet sich bei einwurfsfreiem Verfahren eine tadellose Mulde aus, und zahlreiche Exemplare solcher Mulden sind während der seit ihrer Erzeugung vergangenen Monate unverändert geblieben. Nur ist hier der Bereich, innerhalb dessen p_1 noch ansteigt, ehe es constant wird, grösser als beim Steinsalz, und der Punkt, bei welchem die dauernde Veränderung in die Erscheinung tritt, lässt sich feststellen, wenn man mit hinreichend kleinen Beanspruchungen beginnt. Dabei ergibt sich das Resultat, dass die elastische Vollkommenheit etwa ein Drittel der Festigkeit ist, die Plasticitätszahl also etwa den Werth $^2/_3$ hat. Dass bei der bezüglichen Berechnung diejenigen Werthe zu Grunde gelegt sind, bei denen die elastische Nachwirkung nicht mehr betheiligt ist, soll hier nochmals betont werden.

Die geschilderten Versuche haben von den vier Stoffen, welche sie betreffen, zwei, nämlich Quarz und Glas, als ent-

schieden spröde, die beiden anderen, nämlich Steinsalz und Flussspath, als entschieden plastisch erwiesen, und es scheint somit, dass die gewöhnliche Auffassung, wonach man es hier mit einem schroffen Gegensatze zu thun habe, Recht behalte. Jedoch zeigt zunächst schon der Vergleich zwischen Steinsalz und Flussspath, dass es verschiedene Grade von Plasticität giebt. Die Versuche an Flussspath lehren des weiteren, dass man mit grosser Vorsicht zu Werke gehen muss, wenn man selbst einer verhältnissmässig grossen Plasticität auf die Spur kommen will. Wurde nämlich in der entscheidenden Periode der Versuchsreihe die Drucksteigerung nicht allmählich genug ausgeübt oder traten versehentlich Stösse hierbei auf, so stellten sich Sprünge ein, welche die bereits gebildete Mulde durchsetzten, ohne sie freilich im übrigen irgendwie zu beeinträchtigen. Es darf hiernach nicht Wunder nehmen, dass man den Flussspath bisher allgemein für spröde gehalten hat. Für die Continuität des Ueberganges zwischen Plasticität und Sprödigkeit sprechen aber in besonders interessanter Weise Versuche, welche an Kalkspath und an einer eigens zu diesem Zwecke ausgewählten Glassorte angestellt wurden. Bei Kalkspath nämlich trat die Sprungbildung nicht, wie bei Glas und Quarz plötzlich, sondern ganz allmählich ein, der ursprüngliche Zustand wurde meist nicht völlig wieder erreicht, und die Beanspruchung erreichte zwar keinen constanten Werth, nahm aber zuletzt nur noch sehr langsam zu — lauter Anzeichen dafür, dass dieses Material, wenn es sich auch noch als spröde charakterisirt, doch eine gewisse Mittelstellung einnimmt. Sehr eigenartig verhielt sich die erwähnte Glassorte. Wurde nämder Druck mit der äussersten Vorsicht gesteigert, so trat bei demjenigen Werthe, bei welchem nach einer ungefähren Berechnung der Sprung zu erwarten gewesen wäre, ein solcher nicht ein, er erfolgte vielmehr erst bei einem weit grösseren Werthe, und auch sein Durchmesser war viel grösser, als die Theorie verlangte. Man hätte daher vor einem Räthsel gestanden, wenn nicht merkwürdiger Weise gleichzeitig mit dem grossen Sprung und gewissermaassen durch diesen ausgelöst, ein kleinerer, concentrischer, von der gewünschten Grösse sich gebildet hätte. Mir scheint dieses Verhalten die Auffassung nahe zu legen, dass das Material ein gewisses Bestreben hat,

den Zusammenhang seiner Theile auch über die kritische Grenze hinaus zu wahren, dass es schliesslich aber doch nachgeben muss und springt — eine Auffassung, die auch dadurch gestützt wird, dass bei diesen Stoffen zwar p_1 langsam zunimmt, andererseits aber q abnimmt. Je vorsichtiger man operirt, um so sicherer bleibt der Sprung in dem Augenblicke, wo er zuerst auftreten sollte, aus, es ist sogar einige Male gelungen, auch den zweiten Sprung zu vermeiden, und zu beobachten, wie bei weiterer Drucksteigerung mit einem Schlage drei concentrische Ringe sich bildeten. Dieses Verhalten einzelner Stoffe muss, um Klarheit zu gewinnen, noch weiter studirt werden, es ist aber auf Grund desselben schwer, sich von dem Schlusse fern zu halten, dass es absolut spröde Körper nicht gibt, dass es sich vielmehr nur um den Grad von Präcision und Vorsicht handelt, welcher erforderlich ist, um bei dem betreffenden Körper Spuren von Plasticität nachzuweisen.

Schlieslich ist noch eine Bemerkung zu machen über die Beziehung der Plasticität zur Härte. Von den untersuchten Stoffen sind die beiden sprödesten, Quarz und Glas, auch die härtesten, der plastischste, das Steinsalz, auch der weichste. Dass sich trotzdem die Stoffe nicht, wie vielfach angenommen wird, in zwei getrennte Gruppen ordnen, eine spröd-harte und eine plastisch-weiche, lehrt das Beispiel von Flussspath und Kalkspath; denn der härtere Flussspath[1]) ist in der gewöhnlichen Ausdrucksweise als plastisch, der weichere Kalkspath als spröde zu bezeichnen.

Jena, November 1891.

1) Nach der Härteskala Flussspath = 4, Kalkspath = 3; nach meinen Messungen (s. d. vorhergehenden Aufsatz) Flussspath = 106, Kalkspath = 95.

VI. *Ueber die abstossende Kraft strahlender Körper; von Peter Lebedew.*

Von Maxwell[1]) wurde nachgewiesen, dass auf absorbirende Körper von den auffallenden Wärme-(Licht)-Strahlen ein Druck P in der Richtung ihrer Fortpflanzung ausgeübt wird und dass dieser in der Form ausgedrückt werden kann:

$$P = \frac{E}{v}, \tag{1}$$

hierin ist E die Energiemenge, welche dem Körper durch die auffallenden Strahlen pro Zeiteinheit zugeführt wird und v die Lichtgeschwindigkeit in dem Medium, in welchem sich der Körper befindet.

Unabhängig von Maxwell gelangten Bartoli[2]) und Boltzmann[3]) zu analogen Resultaten, indem sie den Fall der Reflexion behandelten. Bartoli fand, dass bei senkrechter Incidenz die Strahlen auf einen Spiegel einen Druck ausüben, welcher doppelt so gross ist wie der, welchen sie nach Maxwell auf einen absorbirenden Körper ausüben würden.

Im Nachfolgenden soll das Verhältniss der durch Strahlung hervorgebrachten Abstossung zu der Newton'schen Anziehung sowohl für unsere Sonne als auch für einen warmen kugelförmigen Körper im allgemeinen abgeleitet werden. Die gewonnenen Ausdrücke gelten nur für absolut schwarze Körper, deren Dimensionen gross sind gegenüber der Wellenlänge der auffallenden Strahlung; demnach können die interessanten Fragen bezüglich der abstossenden Kraft bei Kometenschweifen und der gegenseitigen Wirkung zweier Nachbarmoleküle im Körper nicht gelöst, sondern nur angedeutet werden.

Da nur die Grössenordnung des gesuchten Verhältnisses von Interesse ist, so soll hier der einfachste Fall behandelt werden: der angezogene Körper sei kugelförmig, absorbire die

1) Maxwell, Electr. and Magn. Art. 792.
2) A. Bartoli, Exners Rep. **21.** p. 198. 1885. Siehe auch Boltzmann.
3) L. Boltzmann, Wied. Ann. **22.** p. 31. 1884.

ganze auf ihn fallende Energie und strahle sie dann gleichmässig nach allen Richtungen aus; die numerischen Rechnungen werden mit grossen Abrundungen durchgeführt werden.

Nehmen wir mit Langley die Solarconstante[1]) $C = 3$ Gramm-Calorien und das mechanische Wärmeäquivalent $B = 425$ Gramm-Meter an, so ist die auf 1 qcm in 1 Secunde auffallende Energiemenge E angenähert:

$$E = \frac{c}{60} B = 21 \text{ Gramm-Meter.}$$

Nehmen wir die Lichtgeschwindigkeit $V = 3 \,.\, 10^8$ m an, so können wir nach (1) den Druck P berechnen, welchen ein Strahlenbündel von 1 qcm Querschnitt auf einen absorbirenden Körper in der Erdentfernung ausübt:

$$P = \frac{E}{V} = \tfrac{2}{3} \cdot 10^{-7} \text{ g}^{2)}$$

oder im absoluten Maasssystem:

(2) $$P = 0{,}6 \,.\, 10^{-4} \text{ Dyne.}$$

Wenn wir annehmen:

die Entfernung der Erde von der Sonne $\varrho = 15 \,.\, 10^{12}$ cm,
die Bahngeschwindigkeit der Erde . . $\sigma = 3 \,.\, 10^6$ cm,

so ist die Sonnenacceleration:

$$a = \frac{\sigma^2}{\varrho} = 0{,}6 \text{ cm.}$$

Somit zieht die Sonne 1 g Masse, welche sich in der Erdentfernung befindet, mit der Kraft A an:

(3) $$A = 0{,}6 \text{ Dyne.}$$

Die Wirkung, welche die Sonne auf sie umkreisende Körper ausübt, besteht einerseits in der Newton'schen Anziehung, andererseits in der Abstossung durch Bestrahlung. Ist uns in der Erdentfernung ein kugelförmiger Körper gegeben, welcher die ganze auf ihn fallende Sonnenenergie absorbirt, um sie alsdann gleichmässig nach allen Richtungen auszu-

1) D. h. die Wärmemenge, welche senkrecht auf 1 qcm in 1 Minute auffällt.

2) Der Druck eines Strahlenbündels von 1 qm Querschnitt beträgt $^2/_3$ mg.

strahlen, ist r sein Radius in Centimetern und δ seine Dichte bezogen auf Wasser, so können wir sowohl die Kraft G, mit welcher er angezogen, als auch die Kraft H, mit welcher er abgestossen wird, berechnen:

$$G = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \delta A$$
$$H = \pi r^2 P.$$

Hieraus lässt sich diejenige resultirende Kraft F berechnen und in Bruchtheilen der Gravitationskraft ausdrücken, mit welcher der Körper von der Sonne angezogen wird:

$$(4) \qquad F = \frac{G-H}{G} = 1 - \frac{H}{G} = 1 - \tfrac{3}{4} \cdot \frac{P}{A \cdot r \cdot \delta}.$$

Für den gegebenen Körper repräsentirt F eine charakteristische Constante, welche unabhängig von der Entfernung von der Sonne ist, da P und A in derselben Weise von dieser Entfernung abhängen.

Ersetzen wir in (4) P und A durch ihre numerischen Grössen (2) und (3), so erhalten wir angenähert:

$$(5) \qquad F = 1 - \frac{10^{-4}}{r\delta}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass bei allen Körpern, deren $\delta > 1$ und $r > 10$ m ist, die Abweichungen vom Newton'schen Gesetze unterhalb der Beobachtungsfehler genauster Messungen liegen.

Je kleiner wir r wählen, um so mehr tritt die abstossende Kraft der Sonne in den Vordergrund. Gehen wir zu Kometenschweifen über, welche bekanntlich hauptsächlich aus gasförmigen Kohlenwasserstoffen bestehen [1]), so stellen uns die einzelnen Molecüle Körperchen dar, bei welchen nach F. Exner [2]) $\delta < 10$ und $r < 10^{-8}$ cm ist; auf diesen Fall jedoch lässt sich unsere Formel (5) in voller Strenge nicht anwenden, da die einzelnen Molecüle nicht absolut schwarze Körper sind und ihre Radien sehr klein sind gegenüber den Wellenlängen der auffallenden Strahlung; dennoch lässt die Formel (5) vermuthen, dass in diesem Falle die abstossende Kraft die anziehende um viele

1) Vgl. Scheiner, „Spectralanalyse der Gestirne" Th. III. Cp. 3. Leipzig 1890.

2) F. Exner, Sitzungsber. d. Wien. Acad. (2) **91.** p. 850. 1885. Exner's Rep. **21.** p. 446. 1885. Wied. Beibl. **9.** p. 714. 1885.

Male übersteigen kann, diese für verschiedene Dämpfe verschieden gross sein wird und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von der Sonne abnimmt. Bredichin[1]) hat aus den Krümmungen von 40 Kometenschweifen nach der Methode von Bessel die abstossenden Kräfte berechnet, welche die Sonne auf verschiedene Schweifsubstanzen ausübt, und drei Werthe gefunden: **17,5**, **1,1** und **0,2**; diese Werthe lassen sich ungezwungen auf die mechanische Wirkung der Strahlung zurückführen, ohne mit Zöllner[2]) zu der Annahme einer electrostatischen Ladung der Sonne greifen zu müssen.

Es sei bemerkt, dass schon Faye[3]) die Meinung äusserte, dass die abstossende Kraft der Sonne in ihrer Strahlung zu suchen sei.

Wir wenden uns zu den allgemeinen Betrachtungen: ein jeder Körper, dessen Temperatur vom absoluten Nullpunkte verschieden ist, strahlt und übt auf einen benachbarten Körper ausser der Newton'schen Attraction noch eine Repulsion durch Strahlung aus.

Befindet sich an der Stelle der Sonne ein kugelförmiger Körper, dessen Radius R in Centimetern und Dichte Δ ist und strahlt 1 qcm seiner Oberfläche Q Gramm-Calor. in 1 Secunde aus, so können wir diesen Fall, gestützt auf die für die Sonne gefundenen Resultate behandeln, indem wir berücksichtigen, dass:

der Sonnenradius . . . . . . $R_0 = 7 . 10^{10}$ cm,
die Dichte der Sonne . . . . $\Delta_0 = 1,4$,
die Strahlung von 1 qcm seiner
Oberfläche in 1 Secunde . . $Q_0 = 2000$ Gramm-Calor.[4])

Bezeichnen wir durch s das Verhältniss der abstossenden

1) Th. Bredichin, „Révision des valeurs numériques de la force répulsive" in Comission bei Voss Leipzig 1885.

2) Zöllner, „Ueber die Natur der Kometen" Leipzig 1872.

3) Faye, Compt. rend. **93.** p. 11 u. p. 362. 1881.

4) Wenn in der Erdentfernung $\varrho = 15 . 10^{12}$ cm in 1 Secunde die Wärmemenge von $c/60 = 0,05$ Gramm.-Calor. auf 1 qcm fällt so strahlt 1 qcm der Sonnenoberfläche, welche sich in der Entfernung $R_0 = 7 . 10^{10}$ cm vom Centrum befindet, die Wärmemenge $Q_0 = 0,05 . (\varrho / R_0)^2 = 2000$ Gramm-Calor. in 1 Secunde aus.

Kraft der Strahlung zu der Newton'schen Anziehungskraft, so können wir behaupten, dass s direct proportional mit Q umgekehrt proportional mit Δ und umgekehrt proportional mit R[1]) ist.

Für die Sonne haben wir aus (5) die Grösse s_0:

$$s_0 = \frac{10^{-4}}{r\delta}.$$

Für einen jeden anderen Körper haben wir somit:

$$(6) \qquad s = s_0 \cdot \frac{Q}{Q_0} \cdot \frac{\Delta_0}{\Delta} \cdot \frac{R_0}{R}$$

oder wenn wir die Grössen s_0, Q_0, Δ_0 und R_0 durch die entsprechenden numerischen Grössen ersetzen, so erhalten wir angenähert:

$$(7) \qquad s = 5 \cdot \frac{Q}{r\delta R \Delta} \cdot 10^3.$$

Die Resultante K der Anziehung und Abstossung ist:

$$(8) \qquad K = 1 - s = 1 - 5 \frac{Q}{r\delta R\Delta} \cdot 10^3.$$

Für einen schwarzen Körper fand Christiansen[2]), dass 1 qcm seiner Oberfläche bei 0° C. in 1 Secunde Q' Gramm-Calor. ausstrahlt, angenähert:

$$Q' = (1{,}21 \,.\, 10^{-12}) \,.\, (273)^4 = 0{,}004 \text{ Gramm-Calor.}$$

Somit ist die Kraft K' mit welcher ein kugelförmiger absolut schwarzer Körper, dessen Radius R cm, dessen Dichte Δ und dessen Temperatur 0° ist, im Weltraume einen anderen kugelförmigen Körper, dessen Radius r cm und dessen Dichte δ ist, anzieht, durch den Ausdruck gegeben:

$$(9) \qquad K' = 1 - \frac{20}{r\delta R\Delta}.$$

Demnach würden sich im Weltraume zwei Körper, deren Temperaturen 0°, deren Radien $R = r = 2$ mm und Dichten $\Delta = \delta = 10$ sind, weder anziehen noch abstossen. Lassen wir die Radien der Körper noch kleiner werden, so sehen wir, dass bei ihnen die Abstossung erheblich grösser wird wie die Anziehung: so würden sich Staubtheilchen, deren Radien

1) Da die anziehende Kraft der Masse mit R^3 und die abstossende Kraft der Strahlung mit R^2 proportional ist.

2) Christiansen, Wied. Ann. **19.** q. 272. 1883.

kleiner sind wie ein Tausendstel Millimeter bei einer Temperatur von 0^0 im Weltraume mit einer Kraft abstossen, deren Grössenordnung um eine Million die Grössenordnung der Newton'schen Anziehung übersteigt.

Wählen wir die Radien der Körper noch kleiner, so können wir allmählich zu den Molekulardimensionen übergehen. Auf einzelne Moleküle ist jedoch unsere Formel (8) nicht mehr anwendbar, da die Moleküle nicht absolut schwarze Körper sind und sowohl ihre Dimensionen als auch ihre gegenseitigen Abstände in Körpern klein sind gegenüber den Wellenlängen der Strahlung: die Wirkung zweier Moleküle aufeinander muss demnach in complicirterer Weise, wie die zweier Resonatoren, behandelt werden.

Wenn die Gleichung (8) uns nicht unmittelbar die Wirkung zweier Moleküle aufeinander gibt, so macht sie uns doch darauf aufmerksam, dass wir bei den Untersuchungen des Wesens der sogenannten „Molekularkräfte" nicht ohne weiteres die Kräfte, welche durch gegenseitige Bestrahlung der Moleküle entstehen, vernachlässigen können, ohne zuerst bestimmt zu haben, welchen Bruchtheil der Molekularkräfte sie bedingen.

Moskau, im August 1891.

VII. *Ueber die Wärmeleitung der Gase;* *von L. Graetz.*

I. Seitdem ich im Jahre 1881 Versuche über die Wärmeleitung der Gase publicirt hatte, in denen zuerst gefunden war, dass der Temperaturcoëffient der Wärmeleitung für Luft und Wasserstoff nicht gleich dem der Reibung ist (0,00277), wie man erwarten konnte, und wie ihn Winkelmann gefunden hatte, sondern dass er nahezu gleich dem von der Clausius'schen Theorie geforderten (0,00183) ist, hat Hr. Winkelmann theils selbst, theils durch einen Schüler eine Reihe von Arbeiten publicirt, in denen er Neubestimmungen dieses Coëfficienten nach etwas veränderten Methoden und mit immer grösserer Sorgfalt vornahm.

Diese Versuche haben Hrn. Winkelmann allmählich zu immer grösserer Annäherung an mein Resultat gebracht, was ich deswegen mit Vergnügen constatire, weil dadurch die Einwendungen, die Hr. Winkelmann gegen meine Arbeit erhoben hat, factisch als unerheblich widerlegt sind. Die (mehr als asymptotische) Annäherung an meine Zahlen zeigt sich deutlich in folgender Zusammenstellung:

		Luft:	Wasserstoff:
Winkelmann	1876[1])	0,00277	0,00277
"	1883[2])	0,00208	0,00208
"	1886[3])	0,00206	0,00206
Eichhorn	1890[4])	0,002045	0,002045
Winkelmann	1891[5])	0,00190	0,00175
Graetz	1881[6])	0,00185	0,0016

Die von Hrn. Winkelmann 1891 erhaltenen Zahlen sind innerhalb der möglichen Fehlergrenzen identisch mit meinen 1881 erhaltenen Zahlen, womit, da auch Hr. Christiansen[7])

1) Winkelmann, Pogg. Ann. **159.** p. 177. 1876.
2) Winkelmann, Wied. Ann. **19.** p. 649. 1883.
3) Winkelmann, Wied. Ann. **29.** p. 68. 1886.
4) Eichhorn, Wied. Ann. **40.** p. 697. 1890.
5) Winkelmann, Wied. Ann. **44.** p. 177. 1891.
6) Graetz, Wied. Ann. **14.** p. 232. 1881.
7) Christiansen, Wied. Ann. **14.** p. 23. 1881.

zu demselben Resultat kam, diese Frage wohl endgültig erledigt ist. (In Bezug auf Schleiermacher's Zahlen s. u.)

II. Dagegen erhält Winkelmann in der letzten Arbeit (1891) für die absoluten Werthe der Wärmeleitung von Luft und Wasserstoff bedeutend grössere Zahlen, als ich sie früher gefunden hatte. Es ist nämlich k_0 nach

	Graetz 1881	Winkelmann 1891
Luft	0,00004838	0,0000555
Wasserstoff	0,0003190	0,0003829

Die Zahlen von Winkelmann sind jedoch nicht richtig. Es ist überhaupt meines Erachtens die Form der Apparate von Winkelmann (begrenzte Cylinder) nicht geeignet zu einer absoluten Constantenbestimmung, weil sich die Theorie für sie nicht streng durchführen lässt. Die Formel dagegen, die Winkelmann 1876 aufgestellt und 1891 wieder benutzt hat, lässt sich leicht als unrichtig nachweisen, wodurch seine absolute Constantenbestimmung ihre Grundlage verliert. (Auf die Temperaturcoëfficienten hat das keinen Einfluss.)

Hr. Winkelmann behandelt nämlich 1876 die beiden Endflächen der Cylinder so, als ob sie Stücke der Mantelfläche wären, d. h. er setzt die Wärmemenge, die durch eine zwischen beide begrenzte Cylinder gelegte parallele Fläche hindurchgeht, constant und zwar gleich

$$w = \text{Const.} = -k\{(h + 2(\varrho - r))\,2\,\varrho\,\pi + 2\,\varrho^2\pi\}\frac{d\vartheta}{d\varrho},$$

wo ϑ die Temperatur, r der Radius des innern Cylinders, ϱ ein Abstand von der Axe, h die Höhe des inneren Cylinders ist. Die von den Endflächen ausgehende Wärmemenge ist aber nicht $2\,\varrho^2\pi\,(d\vartheta\,/\,d\varrho)$, sondern $2\,\varrho^2\pi\,(d\vartheta\,/\,d z)$, wo z die Richtung der Cylinderaxe ist. Aus diesem incorrecten Ansatz leitet der Verf. richtig für die pro Zeiteinheit durch Leitung abgegebene Wärmemenge den Ausdruck ab

$$w = \frac{k\,t\,2\,\pi\,.(h - 2\,r)}{\log\text{nat}\,\dfrac{R(r + h)}{r\,(3\,R + h - 2\,r)}}$$

und diesen Ausdruck benutzt er auch jetzt (1891) zur Berechnung der absoluten Werthe der Wärmeleitung.

Richtig wird das Problem gelöst, indem man für d
Temperatur zwischem den mittleren Theilen der Mantelfläch
den aus der Differentialgleichung für die stationäre Bewegu
abzuleitenden Werth

$$\vartheta = \frac{\tau}{\log \operatorname{nat} \frac{r}{R}} \log \frac{\varrho}{R}$$

und für die Temperatur zwischen den mittleren Theilen d
Endflächen den Werth

$$\vartheta = \frac{\tau}{H-h}(H - 2z)$$

annimmt. Für die durch diese mittleren Stücke (deren Grö
von vornherein nicht anzugeben ist) hindurchgehende Wärm
menge erhält man pro Flächeneinheit und Zeiteinheit

$\frac{k\tau}{\log \frac{R}{r}} \frac{1}{\varrho}$ für die Mantelstücke und $\frac{2k\tau}{H-h}$ für die Endstüc

Für den ganzen übrigen Raum, den Randraum, ist j
doch die Temperaturvertheilung viel complizirter. Es lies
sich die Aufgabe wohl in ähnlicher Weise behandeln, wie
Kirchhoff[1]) bei dem Condensator gethan hat und die Lösu
würde dann auf Thetafunctionen führen. Ich habe die imme
hin schwierige Rechnung nicht durchgeführt. Eine angenähe
Berechnung erhält man, wenn man annimmt, dass in d
ganze äussere Mantelfläche eine Wärmemenge eintritt, d
sich nach der ersten, in die ganze äussere Endfläche ei
Wärmemenge, die sich nach der zweiten Formel berechn
Es wird dann

$$\omega = 2\pi k\tau \left\{ \frac{H}{\log \frac{R}{r}} + \frac{2R^2}{H-h} \right\}$$

Eine numerische Ausrechnung mit den von Winkelma
(p. 435) gegebenen Zahlen liefert für den Factor von $k\tau$ d
Zahl 256,0. Winkelmann hat aus seiner Formel für dies
Factor den Werth 234,66 berechnet. Der Unterschied b
trägt 9,1 Proc. Um so viel ist ungefähr der von Winke
mann berechnete Werth von k_0 zu gross. Es würde si

1) Kirchhoff, Ges. Abh. p. 101.

so für Luft statt des von Winkelmann gegebenen Werthes
= 0,0000555 der Werth berechnen

$$k_0 = 0,0000500$$

weit besserer Uebereinstimmung mit meinen Zahlen
,0000484).

Bei meinen Versuchen wurden kugelförmige Gefässe an-
wendet, für welche sich die Theorie streng entwickeln liess,
d diese eignen sich daher weit mehr zu einer absoluten
nstantenbestimmung.

Was die Kohlensäure betrifft, so habe ich schon in meiner
rbeit 1881 darauf aufmerksam gemacht, dass die Absorption
r strahlenden Wärme in ihr die Resultate fälschen muss.
it dieser Zeit ist durch die Versuche von Lecher und
ernter[1]), Lecher[2]), Heine[3]), Röntgen[4]), Keeler[5]), Ang-
röm[6]) gezeigt worden, dass die Absorption durch Kohlen-
ure weit beträchtlicher ist, als man früher annahm. Dies
rd ein Hauptgrund für die grösseren Unterschiede sein, die
rade bei der Kohlensäure zwischen den verschiedenen Beob-
htungsmethoden für die Wärmeleitung und deren Temperatur-
efficienten auftreten.

III. Hr. Schleiermacher[7]) hat vor einigen Jahren einige
rbeiten über Wärmeleitung und Strahlung publicirt, in denen
eine ganz andere Methode anwendete und in denen er so-
hl in Bezug auf die absoluten Werthe, wie in Bezug auf
e Temperaturcoëfficienten zu sehr abweichenden Resultaten
langte. Gegen diese Versuche haben bereits Winkelmann
d Eichhorn (l. c.) einige kleinere Bedenken erhoben, die
doch kaum Wesentliches betreffen. Zu diesen liesse sich
ch hinzufügen, dass erstens die Wärmeableitung durch die
leitungsdrähte wohl einige Procente beträgt, und was wesent-
her ist, dass vermöge des starken Temperaturgefälles die

1) Lecher u. Pernter, Wied. Ann. **12.** p. 180. 1881.
2) Lecher, Wied. Ann. **12.** p. 466. 1881.
3) Heine, Wied. Ann. **16.** p. 444. 1882.
4) Röntgen, Wied. Ann. **23.** p. 259. 1884.
5) Keeler, Am. Journ. **28.** p. 190. 1884.
6) Angström, Wied. Ann. **39.** p. 275. 1890.
7) Schleiermacher, Wied. Ann. **26.** p. 287. 1885. **34.** p. 623. 1888.

Oberflächentemperatur des Drahtes eine andere ist, als die aus den Widerstandsmessungen abgeleitete Mitteltemperatur. Der Haupteinwand gegen die Methode aber ist folgender. Es wird von Hrn. Schleiermacher die gesammte in dem Draht entwickelte Wärme nach dem Joule'schen Gesetz berechnet und diese als durch Leitung und Strahlung abgegeben betrachtet. Dabei ist stillschweigend angenommen, dass die vom Strome abgegebene Energie nur als Wärme in dem Draht erscheint. Wir wissen aber, dass der Strom die Metalle, die er durchfliesst, auch disaggregirt und zerstäubt. Bei grosser Stromstärke lässt sich diese Zerstäubung direct sehen. Ob sie nun eine primäre Wirkung des Stromes ist oder durch occludirte Gase entsteht, jedenfalls muss der Strom dabei eine gewisse Disgregationsarbeit leisten, die von der Joule'schen Wärme abgezogen werden muss. Dadurch verkleinern sich die Werthe für Wärmeleitung und Strahlung, gegen diejenigen, welche Hr. Schleiermacher erhält. Man kann nicht als Gegenargument anführen, dass die Berechnung des mechanischen Wärmeäquivalents aus der Joule'schen Wärme doch richtige Resultate ergeben hat. Denn bei diesen Versuchen geben die abgeschleuderten Theilchen ihre Energie auch wieder an die Calorimetersubstanz ab.

Wenn nun ferner, wie die Versuche von Berliner[1]) lehren, die Zerstäubung wesentlich durch das Freiwerden occludirter Gase bedingt wird, so würde dadurch eine neue Fehlerquelle in die Schleiermacher'schen Versuche hineingebracht, indem die frei werdenden Gase durch Strömung Wärme transportiren. Dadurch würde auch die übergeführte Wärmemenge zu gross erscheinen und zwar im Verhältniss der Wärmeleitungsfähigkeiten, wie es Hrn. Schleiermacher's Resultate thatsächlich zeigen. Was von Berliner für glühende Drähte nachgewiesen ist, muss in geringerem Grade auch bei dunkel erwärmten Drähten auftreten. Durch diese zwei Fehlerquellen lassen sich die Schleiermacher'schen abweichenden Resultate wohl erklären.

Als Resultat dieser drei Bemerkungen möchte ich anführen, dass in Bezug auf die Temperaturcoëfficienten meine

---

1) Berliner, Wied. Ann. **33.** p. 289. 1888.

Bestimmungen von 1881 jetzt voll bestätigt sind und dass die Abweichungen, die von meinen absoluten Zahlen sich anderen Beobachtern ergeben haben, entweder durch falsche Berechnung oder durch nicht einwurfsfreie Versuche hervorgerufen sind, sodass ich heute noch meine damaligen Bestimmungen, die in Bezug auf die absoluten Werthe auch mit denen von Kundt und Warburg übereinstimmen, für die sichersten halten muss.

München, November 1891.

VIII. *Ueber Doppelbrechung in rotirenden Flüssigkeiten; von Karl Umlauf.*

Seit mehr als einem Jahrzehnt ist die Thatsache bekannt, dass in gewissen Flüssigkeiten, die durch mechanische Einwirkungen in einen Zustand ungleicher Spannung versetzt sind, Doppelbrechung des Lichts hervorgerufen wird, analog der in festen, elastischen oder zähen, plastischen Körpern durch Druck oder Zug erzeugten. Nachdem Maxwell diese Doppelbrechung in einem durch einen Spatel bewegten, dickflüssigen Canadabalsam gefunden hatte, constatirte Kundt[1]) dieselbe in einer grösseren Anzahl von Flüssigkeiten, meist Colloiden und Oelen, indem er sie zwischen zwei concentrischen Cylindern in Rotation versetzte. Nach Kundt hat sich insbesondere G. de Metz[2]) eingehender mit diesen Untersuchungen befasst, und es ist ihm gelungen, für verschiedene Oele den durch die Rotation hervorgerufenen Gangunterschied des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahls quantitativ zu bestimmen. Er fand, dass die Grösse der Doppelbrechung für ein und dieselbe Flüssigkeit bei constanter Temperatur proportional der Rotationsgeschwindigkeit, bei constanter Geschwindigkeit proportional dem Reibungscoëfficienten der Flüssigkeit ist.

Eine Theorie der Erscheinungen für bewegte Flüssigkeiten hat Kundt[3]) auf Grund hydrodynamischer Untersuchungen von Stokes gegeben.

Für leimartige Flüssigkeiten (Colloide) fehlen bisher quantitative Bestimmungen. Doch haben bereits V. von Ebner[4]) und später Ambronn[5]) constatirt, dass gewisse Gummiarten in zähflüssigem Zustande sich optisch entgegengesetzt ver-

1) Kundt, Wied. Ann. **13.** p. 110. 1881.
2) G. de Metz, Wied. Ann. **35.** p. 497. 1888.
3) l. c. p. 117.
4) V. von Ebner, Untersuchungen über die Ursachen der Anisotropie organischer Substanzen. p. 28. Leipzig 1882.
5) Ambronn, Wied. Ann. **38.** p. 159. 1889.

halten als andere, und Ambronn hat daran die Bemerkung geknüpft, dass dies ebenso auch für leichtflüssige Lösungen dieser Substanzen gelten müsse. Zweck der im Folgenden mitgetheilten Untersuchungen war, die von de Metz für die Oele durchgeführten Messungen auf die Colloide auszudehnen und die oben angegebenen Erscheinungen einer genaueren Prüfung zu unterwerfen; im Anschluss daran sind mehrere andere Flüssigkeiten, besonders Gemische von Kohlenwasserstoffen, von neuem untersucht worden; endlich konnte eine von Kundt theoretisch abgeleitete Formel für die Abhängigkeit der Doppelbrechung von dem Abstande der beiden concentrischen Cylinder durch einige Versuche wenigstens theilweise bestätigt werden.

Apparat und Beobachtungsmethode.

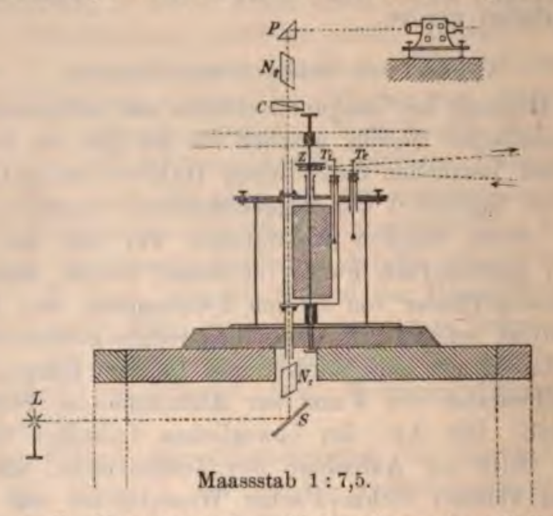
Die Messung des Gangunterschiedes des ordentlichen und ausserordentlichen Strahls geschah wie bei den von de Metz angestellten Versuchen durch einen Babinet'schen Compensator. Der Apparat[1]) war folgendermassen construirt:

Auf einem starken Holzrahmen war ein mit einem schweren, gusseisernen Fusse versehener hohler, doppelwandiger Messingcylinder von 54 mm Durchmesser und 110 mm Höhe vertical befestigt; in demselben rotirte concentrisch ein zweiter von 42 mm Durchmesser und 100 mm Länge, sodass ein Zwischenraum von 6 mm zur Aufnahme der Flüssigkeit übrig blieb. Die Axe des beweglichen Cylinders trug ein Rad mit Nute zur Aufnahme des Treibriemens; als Motor diente ein kleiner, Schmid'scher Wassermotor von ca. $^1/_8$ Pferdekraft. Boden und Deckel des festen Cylinders hatten einander entsprechende, durch Plangläser verschlossene Durchbohrungen von ca. 11 mm Durchmesser. Zwei Thermometer, T_i und T_a (s. Fig. p. 306), dienten dazu, die Temperatur der Flüssigkeit und des umgebenden Hohlraumes zu bestimmen. Das von der Lichtquelle L, einem Argandbrenner, ausgehende Lichtbündel wurde zunächst durch einen Planspiegel S nach oben reflectirt, trat dann, durch ein Nicol'sches Prisma N_1 polarisirt, in die Flüssigkeit ein, ging weiterhin

1) In gewohnter exacter und verständnissvoller Weise in der Werkstatt für Feinmechanik des Hrn. Krille in Leipzig ausgeführt.

durch den Babinet'schen Compensator C, darauf durch ein zweites Nicol N_2 und wurde endlich durch ein totalreflectirendes Prisma nach dem Beobachtungsfernrohre geworfen. Die Polarisationsebene des Polarisators N_1 stand radial, die des Analysators N_2 tangential zum rotirenden Cylinder, die Axen des Compensators bildeten mit den Polarisationsebenen der Nicols einen Winkel von 45°.[1])

Der innere, bewegliche Messingcylinder von 42 mm Durchmesser konnte durch einen massiven Hartgummicylinder von 46,6 mm Durchmesser ersetzt, der zur Aufnahme der Flüssigkeit dienende Zwischenraum also auf 3,7 mm beschränkt werden. Das Hartgummi verdiente vor dem Messing deshalb den



Maassstab 1 : 7,5.

Vorzug, weil die störenden Lichtreflexe der Cylinderwand weniger bemerkbar wurden und weil dasselbe gegen chemische Einwirkungen der Flüssigkeiten unempfindlich war. Die Axe des rotirenden Cylinders trug ausser dem Rade für den Treibriemen noch ein Zahnrad Z mit 20 Zähnen zur Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit; durch Anhalten eines Kartenblattes wurde ein Ton erzeugt, dessen Höhe durch Vergleichen mit einer kleinen, gut abgestimmten Metallharmonika gefunden und aus dessen Schwingungszahl sofort die Zahl der Umdrehungen des Cylinders in der Secunde bestimmt werden konnte.

1) Kundt, l. c. p. 118.

Die doppelte Wandung des feststehenden Cylinders ermöglichte es, die Flüssigkeiten während der Versuche auf nahezu gleicher Temperatur zu erhalten. Zu diesem Zwecke wurde der Cylindermantel entweder mit der Wasserleitung in Verbindung gesetzt, oder es wurde durch eine Wasserheizung ein beständiger Strom warmen Wassers erzeugt. Temperaturen, die dem Eispunkt nahe lagen, wurden dadurch erreicht, dass eine vorher in einer Kältemischung abgekühlte Salzlösung circulirte.

Solange die Flüssigkeit in Ruhe war, zeigte das Gesichtsfeld einen schwarzen Interferenzstreifen. Bei Rotation des inneren Cylinders trat die bereits von de Metz ausführlich beschriebene Erscheinung auf: der Interferenzstreifen verschob sich nach einer Seite hin und nahm eine gekrümmte Gestalt an, derart, dass die stärkste Krümmung dem rotirenden Cylinder am nächsten war; mit wachsender Entfernung von demselben nahm die Grösse der Verschiebung zunächst rasch ab, um in der Nähe des festen Cylinders allmählich wieder zu wachsen. Die Verschiebung des Interferenzstreifens konnte direct gemessen werden durch eine auf dem Compensator aufliegende feine Glasscala; dann wurde der Interferenzstreifen durch Drehen der Mikrometerschraube des Compensators wieder in seine ursprüngliche Lage gebracht und die hierzu nöthige Verschiebung der Quarzkeile des Compensators an der Scala desselben abgelesen. Allen Messungen wurde der Theil des Streifens zu Grunde gelegt, welcher sich im Abstande von 1 mm vom rotirenden Cylinder befand.

Exakte Messungen des Gangunterschiedes waren nur bei mittleren Umdrehungsgeschwindigkeiten möglich, zwischen 20 und 60 in der Secunde; bei geringerer Geschwindigkeit arbeitete der Motor zu unregelmässig, bei höherer wurde das Gesichtsfeld bald getrübt und der Interferenzstreifen undeutlich. Selbst bei grösster Vorsicht gelang es nicht immer, alle Luftbläschen aus der Flüssigkeit und von den Cylinderwänden zu entfernen, wodurch die Beobachtung erschwert wurde. Da einerseits die Kraft des Motors eine verhältnissmässig geringe war, andererseits die zu untersuchenden Colloide vorher einer mehrfachen Filtration unterworfen werden mussten, so konnten immer nur ziemlich dünnflüssige Lösungen ver-

wendet werden; daher sind auch die beobachteten Gangunterschiede sehr gering und die Grenzen der Beobachtungsfehler verhältnissmässig weit.

Die Versuche.

I. Zunächst handelte es sich um die Messung der Doppelbrechung in *Colloiden*. Untersucht wurden eine Lösung von Kirschgummi, Tragant (Gummi Tragacanthae), Collodium, Gummi arabicum und zwei verschiedene Lösungen von Gelatine, diese erst rein und dann mit einigen Tropfen Schwefelsäure versetzt, sodass sie auch nach längerem Stehen nicht gelatinirten.

Der Gangunterschied Δ des ordentlichen und ausserordentlichen Strahls ist berechnet nach der von Jamin[1]) angegebenen Formel

$$\Delta = \frac{\delta}{D} \cdot \frac{\lambda}{2},$$

wo δ die beobachtete Verschiebung des Interferenzstreifens, D den Abstand zweier Interenzstreifen im Babinet'schen Compensator, λ die Wellenlänge bedeutet. Für den von mir angewendeten Compensator betrug für weisses Licht

$$D = 1420,$$

gemessen in Scalentheilen der Mikrometerschraube.

In den folgenden Tabellen bezeichnet s das specifische Gewicht, T_i die Temperatur der Flüssigkeit unmittelbar vor und nach dem Versuche, V die Umdrehungsgeschwindigkeit des inneren Cylinders. Der Gangunterschied Δ ist in Bruchtheilen einer Wellenlänge angegeben, F zeigt die Grenze der Beobachtungsfehler an. Mit α ist das Verhältniss $\Delta : V$, also die von de Metz „Coëfficient der Doppelbrechung" genannte Grösse bezeichnet.

Das Vorzeichen von Δ gibt an, in welchem Sinne die Doppelbrechung in den einzelnen Flüssigkeiten erfolgt. Wir bezeichnen dabei die Doppelbrechung, wie sie in rotirenden *Oelen* auftritt, als *negative*, das entgegengesetzte optische Verhalten demnach als *positives*.

---

1) Jamin, Ann. de chim. et de phys. (3) **29.** p. 273. 1850.

1. Tragant.

s = 1,007 (19°). F = 7 Proc.

T_i	V	δ	Δ	$10^6 . \alpha$
15,2—15,5	26,0	20	+ 0,0074	285
14,0—15,2	36,6	27,5	+ 0,0097	265
13,8—14,7	43,5	29,2	+ 0,0130	237
13,8—15,7	54	32,5	+ 0,0114	211
13,2—14,8	58,1	34,0	+ 0,0120	207
13,2—15,7	65,2	37,5	+ 0,0132	202

2. Kirschgummi.

Hier konnten nur sehr wenige genaue Messungen ausgeführt werden, da die Lösungen zu sehr gefärbt waren und nach kurzer Zeit der Rotation gänzlich dunkel wurden.

T_i	V	δ	Δ	$10^6 . \alpha$
24,5	29,0	26	+ 0,0092	317
24,0	32,6	33	+ 0,0116	356

3. Gummi arabicum.

50 g wurden in 200 g destillirten Wassers gelöst; s = 1,073 (18°). F = 6,5 Proc.

T_i	V	δ	Δ	$10^6 . \alpha$
14,9—16,2	33,5	70	— 0,0246	734
14,9—17,0	39,5	85	— 0,0300	759
14,3—15,2	42,2	100	— 0,0350	829
13,7—16,2	43,5	104	— 0,0366	841

4. Collodium.

Bei grösserer Rotationsgeschwindigkeit wurde der Streifen zu verschwommen und undeutlich.

s = 0,795 (18°). F = 3 Proc.

T_i	V	δ	Δ	$10^6 . \alpha$
15,0—17,2	25,0	91	— 0,0320	128
14,2—16,9	31,0	101	— 0,0356	118
14,7—16,5	35,0	110	— 0,0387	111

5. Gelatine.

F = ca. 7 Proc.

I. Lösung A. 120 g wurden in ca. 1600 g Wasser gelöst. s = 1,051 (21°

T_i	V	δ	Δ	$10^6 . \alpha$
30,0	32,6	43,5	– 0 01532	470
30,8	34,5	50	– 0,01761	510
30,8	41.1	61	– 0.02148	523
37,0	25,9	16,5	– 0,00581	224
37,0	33,0	20	– 0,00704	213
37,0	43,5	23,5	– 0 00827	190
36,5	58,1	36	– 0,01267	218

II. Lösung A, mit Schwefelsäure versetzt; nicht gelatinirend.

T_i	V	δ	Δ	$10^6 . \alpha$
33,0	30,8	11,5	– 0,00405	} 127
32.2—33,7	38,8	13,5	– 0,00475	
30,0—29,7	34,5	13 ?	– 0,00458	133
28,2—28,8	38,8	17,5	– 0,00615	159
25,8—26,8	34,5	15,5	– 0,00546	158
21,2—22.0	25,9	21,5?	– 0,00757?	
19,0—20,0	28,8	26,5	– 0,00933	324
16,0—16,5	28,8	55	– 0,01937	673

III. Lösung B. 300 g der Lösung A wurden mit 200 g Wasser verdünnt: s = 1,015 (22°).

T_i	V	δ	Δ	$10^6 . \alpha$
26,0	26,5	10,5	– 0,00370	140
26,2	29,0	13	– 0,00458	158
26,5	32,6	16.5	– 0,00581	180
26,5	35,5	20,0	– 0,00704	198
26,5	41,1	25	– 0,00880	214
26.5	43,5	30	– 0,01056	243

IV. Lösung B, mit Schwefelsäure versetzt, nicht gelatinirend. Bei 25° Doppelbrechung unmessbar gering.

T_i	V	δ	Δ	$10^6 . \alpha$
14,9	29,0	26	– 0,00912	314
14,8—14,0	34,5	28	– 0,00986	286
14,8—14,0	39	39	– 0,01500	385
13,7—13,1	48,8	49	– 0,01725	353

Die Ergebnisse der vorstehenden Beobachtungen sind im Wesentlichen folgende:

a) Die Doppelbrechung ist bei den untersuchten Colloiden innerhalb der angegebenen Grenzen unter sonst gleichen Verhältnissen *ungefähr proportional der Rotationsgeschwindigkeit.*

Bei Tragant, bei dem die Bedingungen für die Beobachtung relativ am günstigsten waren, zeigt die entschiedene Abnahme des Werthes von α, dass die Zunahme der Doppelbrechung in langsamerem Verhältnisse erfolgt als die Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit.

Ob bei Gummiarabicum und Gelatine (s. 5, III) das Gegentheil stattfindet, wie es das Wachsen des Coëfficienten α verlangen würde, muss vorläufig unentschieden bleiben; man hat zu berücksichtigen, dass die Temperaturangaben nicht die gewünschte Genauigkeit besitzen können, da es sich als unausführbar erwies, die Temperatur der Flüssigkeiten im Momente der Beobachtung selbst zu bestimmen und dass andererseits, wie aus den Versuchen hervorgeht, schon geringe Temperaturschwankungen den Werth von α merklich beeinflussen.

b) Die Doppelbrechung nimmt bei constanter Rotationsgeschwindigkeit mit der Temperaturerhöhung ab.

c) Bei Tragant und Kirschgummi ist die Doppelbrechung *positiv*, bei Gummi arabicum, Collodium und Gelatine *negativ*. Lösungen von Tragant und Kirschgummi verhalten sich also bei Deformation durch scheerende Kräfte optisch entgegengesetzt wie Gummi arabicum, Collodium, Gelatine und die Oele. Diese Beobachtung steht im Einklange mit den von Ambronn und V. von Ebner mitgetheilten Untersuchungen des optischen Verhaltens dieser Substanzen in plastischem und festem Zustande.

d) Ein Zusatz von Schwefelsäure zur Gelatine, wodurch das Gelatiniren verhindert, die innere Constitution der Lösungen also erheblich modificirt wird, verringert die Doppelbrechung, vernichtet sie jedoch nicht.

e) Die Doppelbrechung der rotirenden Gelatinelösung wächst unter sonst gleichen Verhältnissen mit der Concentration der Lösung. Dieser Satz dürfte wohl allgemein für alle Colloide gelten.

Ob bei drehenden Flüssigkeiten die Drehung der Polarisationsebene durch die Doppelbrechung bei der Rotation beeinflusst wird, konnte bei der angewandten Methode der Beob-

achtung nicht näher untersucht werden. Ebenso wenig war der Apparat geeignet, die von Kundt seiner Zeit beim Collodium beobachtete Anomalie betreffs der Lage der Schwingungsebenen des ordentlichen und ausserordentlichen Strahls zu erkennen.

II. *Kohlenwasserstoffe und andere Flüssigkeiten.*

Untersucht wurden zwei Sorten von Paraffinöl (Paraffinum liquidum, Pharmacopoea German. III.), Paraffin, Petroleum, Benzol, Benzin, Terpentinöl. Diese Kohlenwasserstoffgemische sind mit Ausnahme von Paraffinöl bereits von Kundt untersucht worden. Ich nahm die Versuche mit diesen Flüssigkeiten nochmals auf, um besonders ihr Verhalten bei niederen Temperaturen zu prüfen. Für Paraffinöl gelten, wie die folgenden Tabellen zeigen, die von G. de Metz gefundenen Gesetze.

1. Paraffinöl.

$s = 0{,}870$. $F =$ ca. 4 Proc.

T_i	V	δ	Δ	$10^6 . \alpha$
16,0—17,5	43,5	21	− 0,0074	170
7,0—9,0	32,6	30	− 0,0106	325
7,5—8,5	36,6	38	− 0,0134	366
7,0—8,5	48,8	48	− 0,0169	346

2. Paraffinöl.

$s = 0{,}885$. $F =$ ca. 5 Proc.

T_i	V	δ	Δ	$10^6 . \alpha$
32,0—32,5	35,0	19	− 0,00669	191
31,8—32,8	38,8	22	− 0,00775	200
30,5—32,0	38,8	25	− 0,00810	209
28,7—30,0	38,8	29	− 0,01021	263

Die Versuche bei niedrigeren Temperaturen ergaben keine zuverlässigen Resultate.

Alle anderen Kohlenwasserstoffgemische zeigten auch bei niederen Temperaturen keine Spur von Doppelbrechung. Paraffin (Erstarrungspunkt 45°) wurde bei ca. 46° beobachtet, Benzol (Erstarrungspunkt 3°) bei 3°. Terpentinöl, Petroleum und

Benzin wurden bis -1^0 abgekühlt und die Rotationsgeschwindigkeit bis 60 in der Secunde gesteigert, ohne dass Doppelbrechung auftrat.

Glycerin, Wasser und starke Zuckerlösung, bei 0^0 untersucht, liessen ebenfalls keine Doppelbrechung erkennen.

III. Alle bisher mitgetheilten Untersuchungen wurden mit dem Hartgummicylinder (Durchmesser 46,6 mm) ausgeführt; der Flüssigkeitsring hatte also eine Dicke von 3,7 mm. Nach der von Kundt entwickelten Theorie der Erscheinungen hängt nun die Grösse der Doppelbrechung insbesondere auch von der Entfernung des rotirenden vom festen Cylinder ab. Unter der Annahme nämlich, dass die entstandene Doppelbrechung der Grösse der Dilatation und Compression, welche die Flüssigkeit erleidet, proportional bleibt, ist an jeder Stelle der rotirenden Flüssigkeit die Doppelbrechung dem Werthe $dq/dr - q/r$ proportional, wo q die Geschwindigkeit, r die Entfernung des betreffenden Flüssigkeitsringes von der Axe des rotirenden Cylinders bedeutet.

Bezeichnet man den Radius des inneren Cylinders mit a, den des äusseren mit b und die Geschwindigkeit des inneren Cylinders wieder mit V, so ist nach Kundt:

$$\frac{dq}{dr} - \frac{q}{r} = -\frac{2aV}{b^2 - a^2} \cdot \frac{b^2}{r^2}.$$

Wählt man nun einen zweiten, rotirenden Cylinder mit Radius a', so wird das Verhältniss der Gangunterschiede Δ und Δ' in beiden Fällen in Bezug auf gleichweit vom rotirenden Cylinder entfernte Theilchen unter sonst gleichen Umständen:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\frac{2aV}{b^2 - a^2} \cdot \frac{b^2}{r^2}}{\frac{2a'V}{b^2 - a'^2} \cdot \frac{b^2}{r'^2}} = \frac{a(b^2 - a'^2)r'^2}{a'(b^2 - a^2)r^2}.$$

Vertauschte ich nun den Hartgummicylinder mit dem oben erwähnten Messingcylinder von 42 mm Durchmesser, so war:

$a = 23{,}3$ mm $b = 27$ mm $r = 24{,}3$ mm
$a' = 21$ mm $r' = 22$ mm,

da immer der Theil des Interferenzstreifens gemessen wurde, der sich in einer Entfernung von 1 mm vom rotirenden Cylinder befand. Setzen wir diese Werthe in obige Formel ein, so ergibt sich:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = 1{,}41.$$

Zur experimentellen Prüfung dieses von der Theorie geforderten Werthes untersuchte ich Collodium und Gummi arabicum; die Resultate sind in nachstehenden Tabellen enthalten.

1. Collodium.

a) Hartgummicylinder. $a = 23{,}3$ mm.

T_i	V	δ	Δ
16,0	25,0	91	− 0,0320
15,8	31,0	101	− 0,0356
15,5	35,0	110	− 0,0387

b) Messingcylinder. $a' = 21$ mm.

T_i	V	δ	Δ'
16,0	25,0	60	− 0,0211
16,0	32,0	66	− 0,0232
16,0	35,0	74	− 0,0261

Der beobachtete Werth von $\Delta:\Delta'$ schwankt also zwischen 1,48 und 1,53.

2. Gummi arabicum.

Auch hier war ein sehr bedeutender Einfluss der Entfernung beider Cylinder auf die Grösse der Doppelbrechung zu constatiren, doch stimmte der beobachtete Werth des Verhältnisses $\Delta:\Delta'$ mit dem von der Theorie geforderten weniger gut überein.

a) Hartgummicylinder.

T_i	V	δ	Δ
14,9—16,2	33,5	70	− 0,0246
14,9—17,0	39,5	85	− 0,0300
13,7—16,2	43,5	104	− 0,0366

b) Messingcylinder.

F_i	V	δ	Δ'
14,5	33,8	38	− 0,0135
14,0	39,6	44,5	− 0,0158
14,0	43,5	46	− 0,0162

Hier schwankt der Werth von $\Delta : \Delta'$ zwischen 1,72 und 2,26.

Ich beabsichtige, diese zuletzt behandelte Frage nach dem Einflusse der Entfernung beider Cylinder noch weiter zu verfolgen. Ebenso wird das Verhalten des Kirschgummi, sowie verschiedener Kohlenwasserstoffe bei niedrigeren Temperaturen den Gegenstand fernerer Untersuchungen bilden.

Leipzig, Physik. Institut d. Univ., im December 1891.

IX. *Ueber die Interferenzerscheinungen in zwei planparallelen Platten; von Eug. Blasius.*

(Hierzu Taf. V.)

Erscheinungen von der Art, die uns im Folgenden beschäftigt, wurden zuerst im Anfange dieses Jahrhunderts nahezu gleichzeitig von zwei verschiedenen Forschern Knox und Brewster entdeckt. Ersterer[1]) legte ebene oder gegekrümmte Gläser so aufeinander, dass zwischen denselben dünne Luftschichten vorhanden waren und beobachtete nun das Licht, welches entweder mehreremal ein solches System oder verschiedene derartige Combinationen nacheinander passirte. Dabei fand er ausser den Newton'schen Farben, welche entstanden, wenn die Luftschicht hinreichend dünn war, noch weitere farbige Liniensysteme die zwar mit den Newton'schen Ringen oder Linien offenbar eng zusammenhingen, die aber auch an solchen Stellen der Gläsercombination sichtbar waren, wo wegen zu grosser Dicke der Luftschicht die Newton'schen Ringe oder Linien in gewöhnlichem Lichte fehlten. Das Princip dieser Erscheinung ist genau dasselbe wie das der von Brewster[2]) in zwei Glasplatten von gleicher Dicke beobachteten und nach ihm benannten Interferenzlinien, und nur dem Umstande, dass weder Knox noch Brewster die Theorie ihrer Versuche ausarbeiteten, ist es zuzuschreiben, dass der Zusammenhang zwischen den Erscheinungen erst viel später erkannt wurde. Die dünnen Luftschichten spielen bei den Versuchen von Knox dieselbe Rolle wie die Glasplatten bei denjenigen Brewster's, und die Interferenzerscheinung hat in beiden Fällen ihren Grund in der folgenden einfachen Zerlegung der Lichtstrahlen. Fällt ein Strahl, sei es auf eine Platte von Glas, sei es auf die Schicht von Luft, so wird ein

1) John Knox, On some phenomena of colours exhibited by thin plates. Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London. p. 161—181. 1815. Read April 6, 1815, datirt Belfast Oct. 6, 1812.

2) Brewster, On a New Species of Coloured Fringes produced by the Reflection of Light between two Plates of Parallel Glass of Equal Thickness. Edinb. Trans. 7. 1817.

Antheil an der Vorderfläche, ein anderer an der Rückseite reflectirt. Dadurch bekommen die Strahlen einen gewissen Gangunterschied, wenn sie sich wieder vereinigen. Lässt man dieses Licht aber erst noch ein zweitesmal an einer ähnlichen Schicht von Glas oder Luft reflectiren, so zerlegen sich die Strahlen aufs neue und wieder entsteht ein Gangunterschied zwischen den an der Vorder- und den an der Hinterfläche reflectirten Antheilen. Wenn nun auch der Gangunterschied in beiden Fällen so gross ist, dass man keine Newton'schen Ringe oder Linien mehr sieht, so kann doch der Gangunterschied von Strahlen, welche die beiden Combinationen getroffen haben, sehr klein werden. Sind nämlich die Gangunterschiede, welche die beiden Combinationen einzeln verursachen, gleich, so legt der Antheil der Strahlen, welcher von der Vorderfläche der ersten Platte und der Hinterfläche der zweiten reflectirt wird, denselben Weg zurück, wie derjenige, der an der ersten Platte hinten, an der zweiten vorne reflectirt wird. Auf der Interferenz dieser Antheile beruhen die Erscheinungen, welche Knox und Brewster beobachtet haben.

Weniger interessant als diese sind bei denselben Versuchsbedingungen die Interferenzen, welche zwischen dem Antheil des Lichtes, der an den beiden Vorderflächen und demjenigen, der an den beiden Rückflächen reflectirt wird, stattfinden. Da sich bei diesen Strahlen die Gangunterschiede in den einzelnen Platten nicht mehr subtrahiren, sondern addiren, so können die dadurch verursachten Erscheinungen bei gewöhnlichem Lichte nur soweit sichtbar sein, als es die Interferenzerscheinungen der einzelnen Platten sind. Bei dickeren Platten muss also zur Darstellung dieser Erscheinungen homogenes Licht angewandt werden.

Von den zahlreichen Resultaten, welche Knox und Brewster und ihre Nachfolger auf diesem Gebiete gefunden haben, soll das Nothwendige bei Besprechung der verschiedenen Specialfälle erwähnt werden.

§ 1. Interferenzerscheinungen in zwei Platten von gleicher Dicke und in allgemeinster Lage.

Die von Brewster in zwei Glasplatten von gleicher Dicke beobachteten Linien haben von allen gleichartigen Erscheinungen die grösste Bedeutung gewonnen durch ihre Anwendung

im Jamin'schen Interferenzialrefractor. Ihre Ableitung lässt sich, wie Hr. Mascart[1]) gezeigt hat, auf die Interferenzerscheinung der einzelnen planparallelen Scheibe gründen, die von Haidinger[2]) zuerst an Glimmerplatten entdeckt und von ihm, sowie später (in Glasplatten) eingehender von Hrn. Mascart[3]) und von Hrn. Lummer[4]) untersucht wurde. Der Gangunterschied Δ der an den beiden Grenzebenen reflectirten Antheile eines Lichtstrahles ist, wenn e sein Einfallswinkel, d die Dicke und n der Brechungsexponent der planparallelen Platte ist:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 e}.$$

In der Nähe der senkrechten Incidenz stellen sich die Interferenzcurven als Kreise dar, bei schrägem Einfall des Lichtes gehen dieselben in parallele Linien über, die in einem grossen Bereiche bei kleinem Gesichtsfelde als annähernd äquidistante Geraden angesehen werden können. Kehren wir zu dem Falle der zwei Platten von gleicher Dicke zurück, so ergibt sich die Wegdifferenz für Systeme, denen die Differenz, bez. die Summe der Gangunterschiede in den einzelnen Platten zu Grunde liegt, als:

$$\Delta' = 2d\left(\sqrt{n^2 - \sin^2 e_1} - \sqrt{n^2 - \sin^2 e_2}\right)$$

und

$$\Delta'' = 2d\left(\sqrt{n^2 - \sin^2 e_1} + \sqrt{n^2 - \sin^2 e_2}\right).$$

Wenn e_1 und e_2 die Einfallswinkel eines Strahles auf die beiden Platten bedeuten.

Hr. Lummer[5]) hat gezeigt, dass das System, welches dem Gangunterschiede Δ' entspricht und welches wir kurzweg als Differenzsystem bezeichnen wollen, in gewöhnlichem Lichte dargestellt werden kann, nicht nur wie Brewster und seine Nachfolger beobachtet hatten, bei geringem, sondern auch bei beliebig grossem Winkel zwischen den Platten. Damit Δ'

1) Mascart, Ann. de Chim. et de Phys. (4) **23.** p. 116—156. 1871.

2) Haidinger, Pogg. Ann. **77.** p. 219. 1849. Sitzungsber. d. Acad. Wien 1854 u. Pogg. Ann. **96.** p. 453. 1855.

3) Mascart, l. c.

4) O. Lummer, Wied. Ann. **23.** p. 49. 1884.

5) O. Lummer, Wied. Ann. **24.** p. 417—439. 1885.

gleich Null wird, ist ja nur nothwendig, dass e_1 gleich e_2 ist. Dieser Fall tritt ein für einen Strahl der zwischen den beiden Platten symmetrisch verläuft, d. h. der auf der Halbirungsebene ihres Flächenwinkels senkrecht steht. Hr. Lummer fand durch Rechnung und Beobachtung, dass die Interferenzlinien in der Nähe des symmetrischen Strahles äquidistante Geraden sind, welche der Schnittgeraden der beiden Plattenebenen parallel laufen. Beobachtet man in der Einfallsebene des symmetrischen Strahles aber unter anderen Einfallswinkeln, so verändern die Strahlen ihre Form und bilden in einem von Hrn. Joubin[1]) genauer untersuchten Falle Ellipsen. Dabei entfernt man sich allerdings beträchtlich von der Linie des Systems, für welche der Gangunterschied Null ist, und ist daher auch auf die Anwendung homogenen Lichtes angewiesen.

Auf den Fall, dem wir uns zuerst zuwenden wollen, führte folgende kurze Ueberlegung. Man stelle sich die beiden Glasplatten als Bestandtheile eines Nörrenberg'schen Polarisationsapparates vor. Sind dann die beiden Platten gleich geneigt gegen die Axe des Instrumentes, in welcher das Licht von der unteren Platte zur oberen läuft, so bleibt dies auch der Fall, wenn die Fassung der oberen Platte um die Axe des Instrumentes gedreht wird. Bei der Drehung fallen zweimal die beiden Einfallsebenen des in der Axe verlaufenden Strahles, den wir kurz einen Centralstrahl nennen wollen, zusammen, nämlich wenn die beiden Platten parallel sind und wenn die Fassung der oberen Platte aus dieser Stellung um 180° gedreht wird. In letzterem Falle wird der Centralstrahl identisch mit dem symmetrischen Strahle Lummer's, aber auch in den übrigen ist der Bedingung genügt, dass e_1 gleich e_2 ist, und es müssen daher auch ohne Anwendung homogenen Lichtes Interferenzlinien sichtbar sein.

Welche Gestalt die Curve für den Gangunterschied Null, oder kurz die Null-Curve besitzt, ergibt sich folgendermassen. Sind OL_1 und OL_2 (Fig. 1 Taf. V) die Plattennormalen, OS der ihren Winkel halbirende symmetrische Strahl, so schliesst jeder Strahl, welcher in der Ebene E liegt, die durch OS geht, und auf der Ebene L_1OL_2 senkrecht steht, denselben Winkel

1) P. Joubin, Journ. de Phys. (2) 5. p. 16—26. 1886.

mit OL_1 wie mit OL_2 ein. Die Strahlen der Ebene E, die Gesammtheit der Centralstrahlen, besitzen bezüglich der beiden Platten je gleiche Einfallswinkel und ergeben also als Null-Curve eine gerade Linie, welche der Schnittgeraden der beiden Ebenen parallel läuft.

Dasselbe Resultat folgt auch aus Hrn. Lummer's Ableitung. Für die Strahlen OX mit dem Gangunterschiede Null besteht nämlich[1]) als Bedingung die trigonometrische Gleichung ersten Gerades:

$$\sin 2\varrho \sin 2\varphi \cos \delta = 0$$

worin 2φ der Winkel zwischen den Platten, ϱ der Winkel zwischen OX und OS, und δ der Winkel zwischen den Ebenen XOS und $L_1 O L_2$ ist. Sehen wir von den Werthen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ ab, so genügt der Gleichung sowohl $\varrho = 0$ als $\delta = \pi/2$. Ersterer Werth ($\varrho = 0$) entspricht dem symmetrischen Strahle selbst, der andere ($\delta = \pi/2$) lehrt uns aufs neue dass die Strahlen OX in der Ebene E liegen müssen.

Bei der oben angegebenen Versuchsanordnung wird durch die Drehung der oberen Platte der Winkel zwischen den Platten fortwährend geändert, während der Einfallswinkel des Centralstrahles constant bleibt. Man kann natürlich auch auf andere Weise zu denselben Lagen gelangen. Sind E_1 und E_2 (Fig. 2.) die beiden Plattenebenen und legt man parallel zu ihrer Schnittgeraden eine Ebene E, welche mit den beiden Platten gleiche Winkel einschliesst, so wird jeder in E liegende Strahl AB auf beide Platten unter demselben Winkel einfallen, also ein Centralstrahl sein. Um bei constantem Plattenwinkel zu beobachten, müsste man, da die Gläser begrenzt sind, jede oder wenigstens eine Platte in ihrer Ebene verschieben, während man gleichzeitig sowohl das Licht wie das Beobachtungsfernrohr nachzurücken hätte. Für eine genaue Justirung, wie sie ja die Interferenzerscheinungen in dicken Platten verlangen, eignet sich jedenfalls die zuerst angegebene Versuchsanordnung besser.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der in der Nähe der Null-Curve verlaufenden Curven kleiner Gangunterschiede in der Absicht, namentlich die Breite der Streifen, die Herr

1) Vgl. O. Lummer, Wied. Ann. **24.** p. 428. 1885.

Lummer für die Gegend des symmetrischen Strahles abgeleitet hat, für diejenige der Centralstrahlen zu entwickeln.

In Fig. 1 Taf. V sollen OL_1, OL_2 und OS wie früher die Plattennormalen bezw. den symmetrischen Strahl bedeuten. OC sei ein Centralstrahl dessen Einfallswinkel auf die Platten, COL_1 und COL_2, $\mathfrak{c}$ heisse. Durch OC lege man eine Ebene senkrecht zur Ebene COS und wähle in dieser Ebene dicht bei OC einen Strahl OA_1. Dessen Winkelabstand von OC sei $\mathfrak{r}$. Liegt auf der anderen Seite von OC ein anderer Strahl OA_2 in gleicher Entfernung, so werden dessen Einfallswinkel auf die beiden Platten denen des Strahles OA_1 wechselweise gleich sein. Der Gangunterschied wird also wie man aus der Formel für Δ' ersieht, abgesehen von dem Zeichen, für OA_1 und OA_2 der gleiche sein, und es folgt daraus, dass die Interferenzerscheinung in der Nähe des Centralstrahles auf beiden Seiten des Mittelstreifens symmetrisch zu diesem ist. Den Winkel L_1CL_2 zwischen den beiden Einfallsebenen des Centralstrahles wollen wir 2χ nennen. Dann berechnen sich die Einfallswinkel $A_1OL_1 = e_1$ und $A_1OL_2 = e_2$ aus den sphärischen Dreiecken A_1CL_1 bezw. A_1CL_2 durch die Formeln:

$$\cos e_1 = \cos\mathfrak{r}\cos\mathfrak{c} + \sin\mathfrak{r}\sin\mathfrak{c}\cos(90-\chi)$$
$$\cos e_2 = \cos\mathfrak{r}\cos\mathfrak{c} + \sin\mathfrak{r}\sin\mathfrak{c}\cos(90+\chi).$$

Diese Ausdrücke entsprechen in der Form ganz den von Lummer in seiner Ableitung[1]) benutzten. Anstatt seiner Zeichen ϱ, φ und δ stehen hier nur $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{c}$ und $90-\chi$. In Folge dessen ergibt sich, dass unsere weitere Entwickelung sich zum Theile wörtlich so führen lässt, wie diejenige Lummer's. Zunächst führen wir die eben aufgestellten Ausdrücke für $\cos e_1$ und $\cos e_2$ in die Formeln für Δ' und Δ'' ein, indem wir gleichzeitig $\Delta'/2d$ als C_2, $\Delta''/2d$ als C_1 bezeichnen; wir erhalten:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \sqrt{n^2-1+(\cos\mathfrak{r}\cos\mathfrak{c}+\sin\mathfrak{r}\sin\mathfrak{c}\cos(90-\chi))^2} \\ +\sqrt{n^2-1+(\cos\mathfrak{r}\cos\mathfrak{c}-\sin\mathfrak{r}\sin\mathfrak{c}\cos(90-\chi))^2} = C_1 \end{cases}$$

$$\text{(II).}\quad \begin{cases} \sqrt{n^2-1+(\cos\mathfrak{r}\cos\mathfrak{c}+\sin\mathfrak{r}\sin\mathfrak{c}\cos(90-\chi))^2} \\ -\sqrt{n^2-1+(\cos\mathfrak{r}\cos\mathfrak{c}-\sin\mathfrak{r}\sin\mathfrak{c}\cos(90-\chi))^2} = C_2. \end{cases}$$

Durch zweimaliges Quadriren und Reduziren gehen diese beiden in die eine Gleichung:

1) O. Lummer, Wied. Ann. **24.** p. 423. 1885.

$$
\text{(A)} \quad \begin{cases} \sin^4 \mathfrak{r} \sin^2 2\,\mathfrak{c} \cos^2(90-\chi) - \sin^2 \mathfrak{r}\,(k^2 \cos^2 \mathfrak{c} \\ \quad + (4\cos^2 \mathfrak{c} - k^2) \cos^2(90-\chi) \sin^2 \mathfrak{c}) \\ \quad + k^2 \left(n^2 - \sin^2 \mathfrak{c} - \frac{k^4}{4}\right) = 0. \end{cases}
$$

über, in der k gleich C_1 oder C_2 zu setzen ist je nachdem wir das Summen- oder das Differenzsystem untersuchen. Wenn wir uns auf die Nähe des Centralstrahles beschränken, wie Herr Lummer auf diejenige des symmetrischen Strahles, so können wir $\sin^4 \mathfrak{r}$ gegen $\sin^2 \mathfrak{r}$ vernachlässigen, und die Gleichung (A) geht über in die Gleichung:

$$
\text{(B)} \quad \begin{cases} \sin^2 \mathfrak{r}\,(k^2 \cos^2 \mathfrak{c} + (4\cos^2 \mathfrak{c} - k^2) \cos^2(90-\chi) \sin^2 \mathfrak{c}) \\ \quad = k^2 \left(n^2 - \sin^2 \mathfrak{c} - \frac{k^2}{4}\right). \end{cases}
$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich für $k = 0$

$$
\text{(D)} \qquad \sin \mathfrak{r} \sin 2\,\mathfrak{c} \cos(90-\chi) = 0.
$$

Die dem Gangunterschiede Null entsprechende Linie ist die durch $\sin \mathfrak{r} = 0$ bestimmte Gerade, die wir schon kennen.

Aus B folgt ferner

$$
\sin^2 \mathfrak{r} = \frac{k^2 \left(n^2 - \sin^2 \mathfrak{c} - \frac{k^2}{4}\right)}{k^2 \cos^2 \mathfrak{c} + (4\cos^2 \mathfrak{c} - k^2) \sin^2 \chi \sin^2 \mathfrak{c}}.
$$

Die entsprechende Gleichung des Herrn Lummer ist [1]):

$$
\sin^2 \varrho = \frac{k^2 \left(n^2 - \sin^2 \varphi - \frac{k^2}{4}\right)}{k^2 \cos^2 \varphi + (4\cos^2 \varphi - k^2) \sin^2 \varphi} = \frac{k^2 \left(n^2 - \sin^2 \varphi - \frac{k^2}{4}\right)}{k^2 \cos 2\varphi + \sin^2 2\varphi}.
$$

Unser Ausdruck für $\sin^2 \mathfrak{r}$ muss in denjenigen für $\sin^2 \varrho$ übergehen, wenn der Centralstrahl OC in den symmetrischen OS übergeführt wird. In der That verwandelt sich $\mathfrak{c}$ dann in φ, während $\chi = \pi/2$ also $\sin \chi = 1$ wird.

Nehmen wir nun, wie es auch bei den früheren Arbeiten geschehen ist, an, dass die Dicke der Platten d sehr gross ist gegen eine geringe Anzahl, 10—20 Wellenlängen des Lichtes, so dürfen wir im Zähler des Ausdruckes für $\sin^2 \mathfrak{r}$, k^4 gegen k^2 vernachlässigen. Sehen wir dabei ab von dem Falle, dass $\cos \mathfrak{c}$ auch sehr klein, also $\mathfrak{c}$ annähernd gleich $\pi/2$ wäre,

---

1) O. Lummer, l. c. p. 425. 1885.

so fallen auch im Nenner $k^2 \cos^2 \mathfrak{c}$ und $k^2 \sin^2 \chi \sin^2 \mathfrak{c}$ gegen $4 \cos^2 \mathfrak{c} \sin^2 \mathfrak{c} \sin^2 \chi$ weg und wir erhalten:

$$\sin^2 \mathfrak{r} = \frac{k^2 (n^2 - \sin^2 \mathfrak{c})}{\sin^2 2 \mathfrak{c} \sin^2 \chi}.$$

Für den $p$ten dunklen Streifen auf beiden Seiten des Mittelstreifens ist

$$\Delta' = \pm \frac{2p-1}{2} \lambda \text{ und } k_p = \pm \frac{2p-1}{4d} \lambda.$$

Die Formel für $\sin \mathfrak{r}$ wird, wenn wir diesen Werth einsetzen

(III) $$\sin \mathfrak{r} = \frac{(2p-1) \lambda \sqrt{n^2 - \sin^2 \mathfrak{c}}}{4 d \sin 2 \mathfrak{c} \sin \chi}.$$

So lange also die Winkel $\mathfrak{r}$ sehr klein sind, was unter unseren Voraussetzungen ja der Fall ist, müssen die Streifen äquidistant sein. Ferner ist hier ebenso wie in dem von Hrn. Lummer untersuchten Falle der Abstand zweier benachbarten Streifen proportional der Wellenlänge und umgekehrt proportional der Dicke der Platten. Endlich ist der Abstand der Streifen, wenn χ constant ist, proportional dem Ausdrucke $\sqrt{n^2 - \sin^2 \mathfrak{c}} / \sin 2 \mathfrak{c}$, der für $\mathfrak{c} =$ ca. 49^0 ein Minimum ist, und wenn $\mathfrak{c}$ constant ist, umgekehrt proportional dem Sinus des halben Winkels zwischen den Einfallsebenen des Centralstrahles.

Die oben angegebene Versuchsanordnung, bei welcher die Platten wie in einem Nörrenberg'schen Polarisationsapparat zueinander stehen, gestattet die eine Platte so zu drehen, dass $\mathfrak{c}$ constant bleibt. Bei einer bestimmten, gleichen Neigung beider Platten gegen die Axe des Instrumentes gibt es zwei um 180^0 von einander verschiedene Stellungen der oberen Fassung, welche ausgezeichneten Stellungen der Platten entsprechen, nämlich diejenige, bei der die Platten parallel sind und diejenige, bei welcher der Centralstrahl zugleich der symmetrische ist. Gehen wir von der ersten dieser beiden Lagen aus, so ist der Winkel, um den man die obere Fassung dreht nichts anderes, als der Winkel 2χ zwischen den Einfallsebenen des Centralstrahles. In der Anfangsstellung sind die Streifen unendlich breit, nehmen dann, da $\sin \chi$ stetig wächst, an Breite ab, bis sie in der von Lummer angewandten Stellung entsprechend dem Maximalwerthe von $\sin \chi$ den kleinsten bei

dem Einfallswinkel $\mathfrak{c}$ zu erlangenden Abstand zeigen. In der Mitte zwischen Anfangs- und Endstellung, also für $2\chi = \pi/2$, $\chi = \pi/4$, verhält sich die Breite der Streifen zu derjenigen in der Endstellung wie $1/\sin(\pi/4):1$, d. h. wie $\sqrt{2}$ zu 1.

Um zu sehen wie sich die Breite der Streifen für die weniger bequeme Versuchsanordnung ändert, bei welcher man die Platten so verschiebt, dass der Winkel 2φ zwischen ihnen derselbe bleibt, führen wir für χ den Neigungswinkel 2φ ein. Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $S\,L_1\,C$ ergibt sich:

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi}{\sin\mathfrak{c}}$$

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck für $\sin\mathfrak{r}$ ein, so erhält man:

$$\sin\mathfrak{r} = \frac{k\sqrt{n^2 - \sin^2\mathfrak{c}}}{2\sin\varphi\cos\mathfrak{c}}.$$

Geht man bei dem Versuche von dem symmetrischen Strahle aus, wo $\mathfrak{c}$ gleich φ ist, so wird $\mathfrak{c}$ immer grösser bis zum Werthe $\pi/2$. Der von $\mathfrak{c}$ abhängige Theil des Ausdruckes für $\sin\mathfrak{r}$ lässt sich auch schreiben:

$$W = \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2\mathfrak{c}}{1 - \sin^2\mathfrak{c}}}.$$

Der Differentialquotient des Radicanden nach $\sin^2\mathfrak{c}$ als Variabeler ist:

$$\frac{d\,W^2}{d\sin^2\mathfrak{c}} = \frac{n^2 - 1}{(1 - \sin^2\mathfrak{c})^2},$$

und da diese Grösse für $n > 1$ positiv ist, so nimmt der Werth für $\sin\mathfrak{r}$ mit wachsendem $\sin^2\mathfrak{c}$, also auch mit wachsendem $\mathfrak{c}$ zu. Auch in diesem Falle wächst also die Streifenbreite je mehr man sich bei der Beobachtung vom symmetrischen Strahle entfernt. Uebrigens stimmt der Sinn der Krümmung, der sich hiernach schon für die dem Mittelstreifen nächsten Curven ergibt, mit demjenigen überein, den die vom Mittelstreifen entfernteren Curven haben müssen, wenn diese in die von Hrn. Joubin untersuchten Ellipsen übergehen sollen.

Von den beschränkenden Voraussetzungen, die im Laufe der Rechnung gemacht sind, ist namentlich die wichtig, dass k sehr klein ist. Die Ableitung über Gestalt und Lage des

Mittelstreifens und über die symmetrische Anordnung der übrigen zu beiden Seiten desselben ist zwar von dieser Beschränkung unabhängig, das Gesetz über die Breite der Streifen unterliegt derselben aber. Gerade für die von Knox beobachteten Erscheinungen darf k nicht vernachlässigt werden und die Breite der Streifen leitet sich aus der Gleichung

$$\sin^2 \mathfrak{r} = \frac{k^2\left(n^2 - \sin^2 \mathfrak{c} - \frac{k^2}{4}\right)}{k^2 \cos^2 \mathfrak{c} + (4 \cos^2 \mathfrak{c} - k^2) \sin^2 \chi \sin^2 \mathfrak{c}}.$$

ab.

Andere Ableitung der Formel für die Breite der Streifen, Lage und Breite der Streifen des Summensystems.

Die einfache Form unserer Endgleichung (III) p. 323 lässt vermuthen, dass dieselbe sich in einfacherer Weise ableiten lässt, und das ist in der That für mittlere Werthe des Einfallswinkels $\mathfrak{c}$ der Fall. Der Gangunterschied, den ein unter dem Winkel $\mathfrak{c}$ auf eine Platte von der Dicke d und dem Brechungsexponenten n auffallender Strahl erhält, nämlich der Gangunterschied zwischen dem an der Vorderfläche und dem an der Hinterfläche reflectirten Antheil desselben ist (vgl. p. 318)

$$\Delta = 2\, d \sqrt{n^2 - \sin^2 \mathfrak{c}}.$$

Daraus folgt

$$d\,\mathfrak{c} = -\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \mathfrak{c}}}{d \,.\, \sin 2\,\mathfrak{c}}\, d\,\Delta$$

und der Winkelabstand der Interferenzlinien, d. h. derjenige kleine Bogen $\Delta'\mathfrak{c} = b$, welcher einer Differenz $d\,\Delta = \lambda$ des Gangunterschiedes entspricht

$$b = \Delta'\mathfrak{c} = -\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \mathfrak{c}}}{d \,.\, \sin 2\,\mathfrak{c}}\, \lambda.$$

Bei kleinem Gesichtsfelde und mittleren Werthen des Einfallswinkels erscheinen die Interferenzlinien als äquidistante Streifen von dieser Breite.[1]) Wie wir schon erwähnten, leiten sich die Differenzsysteme aus den Interferenzsystemen der einzelnen Platten ab. Die hellen Streifen des Differenzsystemes gehen durch die Schnittpunkte je zweier hellen und durch die

1) Mascart l. c., Lummer, Wied. Ann. **23.** p. 513—548. 1884.

Schnittpunkte je zweier dunkelen Streifen, denn sowohl die Differenz zweier ungeraden, wie diejenige zweier geraden Anzahlen halber Wellenlängen ergibt eine gerade Anzahl halber Wellenlängen. Dagegen gehen die dunkelen Streifen durch die Schnitte von hellen Streifen des einen Systems mit dunkelen des anderen, weil die Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl wieder eine ungerade Zahl ist. In unserem Falle, bei Beobachtungen in der Nähe des Centralstrahles geben die Platten, da der Einfallswinkel auf beide Platten derselbe ist, zwei Streifensysteme von gleichem Abstande. Seien (Fig. 3 Taf. V) die dunkelen Linien der einzelnen Platten durch die Linien I und II dargestellt, so werden die dunkelen Linien des Differenzsystemes, wie die Linien D liegen. Der Winkel zwischen den Richtungen der Streifen I und II ist gleich dem Winkel 2χ, den die Einfallsebenen des Lichtes auf die beiden Platten miteinander bilden. Denn die Streifenrichtung auf jeder Platte ist senkrecht zu der betreffenden Einfallsebene. Die beiden Ebenen, welche durch den Centralstrahl gehen und je eine der Richtungen der Systeme I und II enthalten, schliessen also denselben Winkel ein, wie die beiden Einfallsebenen und dieser Winkel bleibt auch bei Reflexionen gewahrt. Aus der Construction ergibt sich, dass die Linien D den Winkel zwischen den Linien I und II halbiren; wie man dann aus Fig. 1 Taf. V ableiten kann, laufen sie der Schnittgeraden der beiden Plattenebenen parallel. Jetzt lässt sich auch in elementarer Weise die Breite der Streifen berechnen. Sei $ABCD$ (Fig. 4 Taf. V) ein Rhombus, wie er durch den Schnitt der Systeme I und II entsteht. Das von B auf AD gefällte Loth gibt die Breite b der Systeme I und II an. Fällt man auch von B, einem Punkte eines hellen Streifens des Differenzsystemes, auf den nächstfolgenden hellen Streifen desselben AC das Loth BE, so ist BE die Breite b_d der Differenzstreifen. Nun ist

$$b_d = AB \cos\chi$$

und

$$AB = \frac{b}{\sin(180 - 2\chi)} = \frac{b}{\sin 2\chi},$$

folglich:

$$b_d = \frac{b}{2\sin\chi}.$$

Setzen wir hierin den vorher (p. 325) gefundenen Werth für b ein, so erhalten wir

$$b_d = \frac{\lambda \sqrt{n^2 - \sin^2 c}}{2d \sin 2c \sin \chi},$$

in Uebereinstimmung mit der früher auf anderem Wege abgeleiteten Formel.

Nach derselben elementaren Methode können wir nun noch allgemeinere Fälle behandeln, wenn wir nur dieselben Beschränkungen beibehalten, die wir eben gemacht haben, dass nämlich die Streifensysteme der einzelnen Platte unter den in Betracht kommenden Verhältnissen als äquidistante Linien aufzufassen sind. Wir können nämlich dann den Abstand und die Richtung der Streifen auch für den Fall ableiten, dass das Licht nicht mehr nahe einem Centralstrahl, also weder mit demselben Einfallswinkel noch mit derselben Einfallsebene auf die beiden Platten auffällt. Nennen wir die Breite der den einzelnen Platten zukommenden Streifen b_1 und b_2, den Neigungswinkel zwischen den Streifen (gleich dem Winkel zwischen den Einfallsebenen) 2χ, so ist unsere Aufgabe die, in dem durch die Durchkreuzung der beiden Systeme entstehenden parallelogrammatischen Netze Richtung und Abstand der Diagonalstreifen zu finden. AB (Fig. 5 Taf. V) sei ein Streifen von II, BC von I. Die Breite der Streifensysteme I, II und D werden bez. durch die von B auf AD, CD und AC gefällten Lothe dargestellt.

Es ist

$$AB = \frac{b_1}{\sin(180 - 2\chi)} = \frac{b_1}{\sin 2\chi}$$

und

$$BC = \frac{b_2}{\sin(180 - 2\chi)} = \frac{b_2}{\sin 2\chi}.$$

Drückt man die Seite AC des Dreiecks ABC durch die beiden anderen und den eingeschlossenen Winkel aus, und setzt dann für AB und BC die eben gefundenen Werthe ein, so wird:

$$AC = \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - 2 b_1 b_2 \cos 2\chi}}{\sin 2\chi}.$$

Für den Inhalt J des Dreiecks ABC lassen sich zwei Aus-

drücke finden, welche sich beide leicht als Functionen von b_1, b_2, b_d und χ ergeben. Einerseits ist nämlich

$$J = \frac{AC \, . \, b_d}{2} = b_d \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - 2 b_1 b_2 \cos 2\chi}}{2 \sin 2\chi};$$

andererseits

$$J = \tfrac{1}{2} AB \, . \, BC \sin 2\chi = \frac{b_1 b_2}{2 \sin 2\chi}.$$

Setzt man beide Ausdrücke gleich, so erhält man

$$b_d = \frac{b_1 b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - 2 b_1 b_2 \cos 2\chi}}.$$

Die Formel verwandelt sich für $b_1 = b_2 = b$ in die oben abgeleitete.

Obwohl die Streifen des Summensystemes, die Erscheinung, welche Hr. Lummer als erste Erscheinung bezeichnet. als Interferenzen von Strahlen mit sehr hohem Gangunterschiede, weniger Interesse darbieten als die Differenzstreifen. so mag doch kurz soviel über dieselben erwähnt werden, wie sich mit Leichtigkeit aus den bisherigen Ableitungen entnehmen lässt.

Die Summenstreifen laufen in Fig. 5 Taf. V in der Richtung der Diagonale BD und durch die Eckpunkte des Parallelogrammes. Ihren Abstand b_s erhält man, wenn man in der Formel für die Breite b_d der Differenzstreifen 2χ durch $180 - 2\chi$ ersetzt. Also ist:

$$b_s = \frac{b_1 b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + 2 b_1 b_2 \cos 2\chi}}$$

Für $\cos 2\chi = 1$ hat b_s ein Minimum, b_d ein Maximum. für $\cos 2\chi = -1$ umgekehrt b_d ein Minimum und b_s ein Maximum. Der Werth der Maxima ist $b_1 b_2 / (b_1 - b_2)$. der der Minima $b_1 b_2 / (b_1 + b_2)$.

Nennen wir die Winkel, welche die Summen- und Differenzstreifen mit den Streifen des Systemes II einschliessen bez. β_s und β_d. so ist, Fig. 5,

$$\sin \beta_d = \frac{b_d}{AB} = \frac{b_d}{b_1} \sin 2\chi. \text{ und } \sin \beta_s = \frac{b_s}{b_1} \sin 2\chi.$$

In dem früher betrachteten Falle, bei Beobachtung in der Richtung des Centralstrahles. wo also $b_1 = b_2$ ist, bilden

die Streifensysteme I und II ein rhombisches Netz und die Summenstreifen stehen in Folge dessen auf den Differenzstreifen senkrecht. Die Breite der Summenstreifen ist in diesem Falle ($b_1 = b_2 = b$)

$$= \frac{b}{2\cos\chi}.$$

Das Verhältniss der Breite des Summensystems zur Breite des Differenzsystems ist also bei Beobachtungen in Richtung von Centralstrahlen gleich der Tangente des halben Neigungswinkels der Einfallsebenen. Die Curve c in Fig. 6 Taf. V soll ein Bild von der Abhängigkeit der Streifenbreite von der Grösse des Winkels zwischen den Einfallsebenen geben. Die Breite der Streifen ist auf den durch M gehenden Strahlen abgetragen, derart, dass je der betreffende Strahl mit dem Anfangsstrahle MA den Winkel 2χ der Einfallsebenen bildet. Zur Construction der Curve mache man $MA = b/2$ und errichte in A auf MA das Loth AB_1, dann ist die Entfernung von M bis zu einem Punkte B_1 des Lothes

$$MB_1 = \frac{b}{2\cos AMB_1}.$$

MB_1 ist also die Breite der Summenstreifen, wenn $\chi = AMB_1$ wäre. MB_1 ist daher auf einem Strahle MB abzutragen der mit MA den Winkel $AMB = 2AMB_1 = 2\chi$ einschliesst, dann ist der Endpunkt B ein Punkt der Curve c.

Wollen wir die analoge Curve für die Differenzstreifen finden, welche der Gleichung

$$b_d = \frac{b}{2\sin\chi}$$

entspricht, so brauchen wir nur zu beachten, dass b_d für $2\chi' = 180 - 2\chi$ gleich b_s für 2χ ist; denn

$$b_{d,2\chi'} = \frac{b}{2\sin\chi'} = \frac{b}{2\cos\chi} = b_{s,2\chi}.$$

Das heisst die Curve für die b_s ist symmetrisch zu der Curve für die b_d bezüglich derjenigen Geraden, für welche 2χ gleich $\pi/2$ ist.

Beobachtungen von farbigen Streifen in der Richtung von Centralstrahlen sind sicher schon öfter gemacht worden in dem Falle dass der Plattenwinkel sehr klein war. Die anormalen

Erscheinungen, welche unter solchen Bedingungen der Interferenzialrefractor zeigt, sind sogar, von Hrn. Bobylew[1]) theoretisch verfolgt worden. Man kann sich auf Grund der obigen Ableitungen leicht eine Vorstellung von denselben machen.

§ 2. Ueber die Interferenzerscheinungen in zwei Platten von verschiedener Dicke.

Da der Gangunterschied, welchen ein Theil eines Lichtstrahles gegen einen anderen erhält, wenn der eine an der Oberfläche, der andere im Inneren der Platte reflectirt wird, abhängig ist sowohl von dem Einfallswinkel des Strahles als von der Dicke und dem Brechungsexponenten der Platte, so ist der Fall, dass alle drei gleich gemacht werden, wie bei den Brewster'schen Linien, nicht der einzig denkbare um Interferenzerscheinungen mit geringen Gangunterschieden der betreffenden Strahlen zu erhalten. Es bieten sich verschiedene Wege zur Darstellung solcher Interferenzerscheinungen; Beispiele dafür finden sich sogar schon in der Literatur. So hat Stefan[2]) Nebenstreifen im Newton'schen Farbenglase erhalten, indem er dasselbe durch dünne Glimmerplättchen ansah. Es fand hier also ein Ausgleich statt zwischen Gangunterschieden, welche durch eine dünne Luftschicht und solchen, die durch eine dünne Glimmerschicht hervorgebracht waren. Da die Brechungsexponenten verschieden sind, so mussten auch die Dicken der Schichten oder die Einfallswinkel, oder beide gleichzeitig verschieden sein. Andere ähnliche Versuchsanordnungen geben, wovon ich mich überzeugt habe, ebenfalls deutliche Interferenzerscheinungen. Von diesen soll nur seiner Einfachheit wegen der Fall untersucht werden, dass der Brechungsexponent der Platten derselbe ist. Wir halten uns wieder zuerst an die Interferenzerscheinungen mit kleinem Gangunterschiede, also die Differenzstreifen, um vorzugsweise Erscheinungen zu behandeln, die in gewöhnlichem gemischten Lichte beobachtet werden können. Die Strahlen werden sich wieder in derselben Weise theilen und zur Interferenz gelangen, wie im Falle, dass die beiden Platten gleich sind, und

1) D. Bobylew, Carl's Repert. **11.** p. 213—222. 1875.
2) J. Stefan, Pogg. Ann. **123.** p. 650—653. 1864. u. **125.** p. 160—162. 1865.

die Bedingung für die Interferenzlinien dieser Art ist, wenn die Dicken der Platten mit d_1 und d_2, die übrigen Grössen wie früher bezeichnet werden:

$$\varDelta = 2d_1\sqrt{n^2 - \sin^2 e_1} - 2d_2\sqrt{n^2 - \sin^2 e_2}.$$

Die Curve für den Gangunterschied 0 muss sich also ergeben aus der Gleichung:

$$(A') \qquad 0 = 2d_1\sqrt{n^2 - \sin^2 e_1} - 2d_2\sqrt{n^2 - \sin^2 e_2}.$$

Ist $d_2 < d_1$, so muss $\cos e_2 > \cos e_1$ also $e_2 < e_1$ sein, der Einfallswinkel von Strahlen, die den Gangunterschied 0 geben, muss daher auf der dickeren Platte grösser sein. Es liegen Untersuchungen dieser Gleichung vor, welche mit Rücksicht auf die geringen Unterschiede der Dicke der Platten im Jamin'schen Interferenzialrefractor angestellt wurden.[1]) Da die Rechnungen grösstentheils durchgeführt sind, ohne dass die Annahme gemacht wird, dass der Winkel zwischen den Platten klein ist, noch dass der Dickenunterschied der Platten klein ist, so würden wir uns mit einem kurzen Hinweis auf die erwähnten Arbeiten beschränken können. Mit Rücksicht auf Beobachtungen in der Richtung von Strahlen, die den Centralstrahlen des vorigen Paragraphen analog sind, ist es jedoch vortheilhaft, die Entwickelungen etwas anders, und zwar wie folgt, zu führen.

Seien (Fig. 7 Taf. V) OL_1 und OL_2 wie früher (Fig. 1) die Plattennormalen, OA ein in deren Ebene liegender Strahl, der zu einem Punkte der Null-Curve gehört, dessen Einfallswinkel e'_1 (AOL_1) und e'_2 (AOL_2) also der Bedingung genügen:

$$(A'') \qquad 0 = 2d_1\sqrt{n^2 - \sin^2 e'_1} - 2d_2\sqrt{n^2 - \sin^2 e'_2}.$$

OB sei ein beliebiger anderer Strahl, dessen Winkel derselben Bedingung genügen, ϱ der Winkel zwischen OA und OB, und δ der Flächenwinkel BAL_1. Aus den sphärischen Dreiecken L_1AB und L_2AB folgen die Beziehungen:

$$\cos e_1 = \cos e'_1 \cos\varrho + \sin e'_1 \sin\varrho \cos\delta$$
$$\cos e_2 = \cos e'_2 \cos\varrho - \sin e'_2 \sin\varrho \cos\delta.$$

---

1) Ketteler, Beobachtungen üb. Farbenzerstreuung d. Gase. Bonn 1865. L. Zehnder, Wied. Ann. **34.** p. 91—121. 1888.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (A′) ein und quadrirt, so erhält man:

$$(\mathrm{B}'')\quad \begin{cases}(n^2-1)(d_1{}^2-d_2{}^2)+\cos^2\varrho\,(d_1{}^2\cos^2 e'_1-d_2{}^2\cos^2 e'_2)\\ \qquad +\sin^2\varrho\cos^2\delta\,(d_1{}^2\sin^2 e'_1-d_2{}^2\sin^2 e'_2)\\ \quad +\cos\delta\sin\varrho\cos\varrho\,(d_1{}^2\sin 2e'_1+d_2{}^2\sin 2e'_2)=0.\end{cases}$$

Die Gleichung vereinfacht sich bedeutend dadurch, dass zwei in ihr vorkommende Klammerausdrücke aus (A″) abgeleitet werden können, nämlich:

$$d_1{}^2\cos^2 e'_1-d_2{}^2\cos^2 e'_2=-(n^2-1)(d_1{}^2-d_2{}^2)$$

und daraus:

$$d_1{}^2\sin^2 e'_1-d_2{}^2\sin^2 e'_2=n^2(d_1{}^2-d_2{}^2).$$

So wird aus (B″):

$$(d_1{}^2-d_2{}^2)(n^2\cos^2\delta+n^2-1)\sin\varrho$$
$$+\cos\delta\cos\varrho\,(d_1{}^2\sin 2e'_1+d_2{}^2\sin^2 2e'_2)=0$$

oder:

$$(\mathrm{C}'')\qquad \operatorname{tg}\varrho=-\frac{d_1{}^2\sin 2e'_1+d_2{}^2\sin 2e'_2}{d_1{}^2-d_2{}^2}\cdot\frac{\cos\delta}{n^2\cos^2\delta+n^2-1}.$$

Diese Gleichung stellt ohne weiteres die Interferenzcurve für den Gangunterschied 0 in sphärischen Polarcoordinaten dar, wenn wir A als Pol, ϱ als Radiusvector und δ als Anomalie auffassen. Die Form der Gleichung lässt sich noch etwas vereinfachen, indem wir ϱ_1, den Werth von ϱ für den zweiten in der Ebene OLL_1 liegenden Punkt der Curve einführen. Für Letzteren gilt $\delta=0$: setzt man dies in obige Gleichung ein, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\varrho_1=-\frac{d_1{}^2\sin 2e'_1+d_2{}^2\sin 2e'_2}{d_1{}^2\quad d_2{}^2}\cdot\frac{1}{2n^2-1}.$$

Hieraus entnehmen wir den Werth von:

$$-\frac{d_1{}^2\sin 2e_1'+d_2{}^2\sin 2e'_2}{d_1{}^2-d_2{}^2}=(2n^2-1)\operatorname{tg}\varrho_1$$

den wir in (C″) einführen. Dann ist:

$$(\mathrm{IV})\qquad \operatorname{tg}\varrho=(2n^2-1)\,.\,\operatorname{tg}\varrho_1\,\frac{\cos\delta}{n^2\cos^2\delta+n^2-1}.$$

Die Strahlen, welche durch den Punkt O gelegt sind, geben uns, nach den bisherigen Annahmen, die Richtungen,

in denen das Licht zwischen den Platten verläuft. Bei den Reflexionen an den Glasplatten wird die gegenseitige Neigung der Strahlen nicht geändert. Lassen wir nach einer Reflexion alle Strahlen wieder durch einen Punkt, das Auge, gehen, so erhalten wir nur einen zu dem Strahlenbündel mit dem Centrum O symmetrischen Bündel. Diesen letzteren können wir also der Betrachtung auch direct zu Grunde legen. Wir denken uns demnach das Auge in O und die optische Axe des Beobachtungsfernrohrs in der Richtung OA, so haben wir den Schnitt der Strahlen mit einer zu OA senkrechten Bildebene zu construiren, welche von O, den Abstand c haben mag. Die rechtwinkligen Coordinaten x, y in dieser Ebene wählen wir so, dass der Anfangspunkt auf dem Strahl OA liegt und die x-Axe in die Ebene $L_1 O L_2$ fällt. Nennen wir die Entfernung eines Punktes vom Coordinatenanfangspunkt r, und r_1 den Werth von r für $\varrho = \varrho_1$ und $\delta = 0$, so ist:

$$\operatorname{tg} \varrho = \frac{r}{c}, \quad \operatorname{tg} \varrho_1 = \frac{r_1}{c},$$

und die Gleichung (IV) der Null-Curve wird zu

$$r = (2n^2 - 1)\, r_1 \frac{\cos \delta}{n^2 \cos^2 \delta + n^2 - 1}.$$

Führt man für r und $\cos \delta$ die Werthe:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \delta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ein, so ergibt sich die Gleichung:

$$(2n^2 - 1)\, x^2 + (n^2 - 1)\, y^2 - r_1 (2n^2 - 1)\, x = 0.$$

Verschiebt man das Coordinatensystem parallel der x-Axe, indem man $x + (r_1/2)$ für x einsetzt, so erhält man:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{r_1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r_1}{2}\sqrt{\frac{2n^2 - 1}{n^2 - 1}}\right)^2} = 1.$$

Die Null-Curve stellt also eine Ellipse mit den Halbaxen $r_1/2$ und $r_1/2 \sqrt{(2n^2 - 1)/(n^2 - 1)}$ dar. Dieselbe kann nie in einen Kreis übergehen, denn das Verhältniss der Halbaxen nämlich $\sqrt{(2n^2 - 1)/(n^2 - 1)}$ ist für kein mögliches n gleich 1. Bei Glas von dem Brechungsexponenten $n = 1{,}5$ ist das Verhältniss der Halbaxen $= 1{,}7$.

Nach den Annahmen, welche der vorstehenden Rechnung zu Grunde liegen, schliessen die Plattennormalen den Strahl OA zwischen sich ein, sodass ihr Winkel gleich der Summe der Einfallswinkel desselben, $e'_1 + e'_2$ ist. Genau ebenso wie bei den Platten von gleicher Dicke können wir unter Benutzung derselben Einfallswinkel e'_1 und e'_2 unendlich viele andere Lagen zur Beobachtung der Null-Curve erhalten. Wir brauchen nur die beiden Platten wieder ähnlich anzuordnen, wie im Nörrenberg'schen Polarisationsapparat. Sind die Platten einmal so gegen die Axe des Instrumentes geneigt, dass ein in derselben verlaufender Strahl die Einfallswinkel e'_1 und e'_2 besitzt, so bleiben letztere gewahrt, wenn man die Fassung der einen Platte um die Axe des Instrumentes herumdreht. Ob man die obere oder die untere Platte bewegt, kommt bezüglich der entstehenden Fälle ganz auf dasselbe hinaus. In Fig. 7 Taf. V bleiben die Normale L_2 und der Strahl OA fest, während sich das andere Loth L_1 um OA auf einem Kreiskegel herumbewegt. Zwei Lagen sind, wie bei den Platten von gleicher Dicke, besonders ausgezeichnet, nämlich diejenigen, in welchen die Linien OA, L_1 und L_2 in eine Ebene fallen. Einmal wird dabei der Winkel zwischen den Normalen, 2φ, gleich $e'_1 + e'_2$ und dieser Fall ist der obigen Ableitung zu Grunde gelegt, das andere Mal wird $2\varphi = e'_1 - e'_2$; letzteres entspricht der Parallelstellung bei den Platten von gleicher Dicke. Die Rechnungen für den zweiten Fall, also $2\varphi = e'_1 - e'_2$ lassen sich sehr einfach auf diejenigen für den ersten, $2\varphi = e'_1 + e'_2$ zurückführen, indem wir in den Formeln e'_2 das negative Zeichen geben. Die Gleichung für die Null-Curve bleibt dann:

$$\operatorname{tg} \varrho = (2n^2 - 1) \operatorname{tg} \varrho_1 \frac{\cos \delta}{n^2 \cos^2 \delta + n^2 - 1}$$

aber der Werth von $\operatorname{tg} \varrho_1$ ergibt sich jetzt durch den Ausdruck:

$$\operatorname{tg} \varrho_1 = - \frac{d_1^2 \sin 2 e'_1 - d_2^2 \sin 2 e'_2}{d_1^2 - d_2^2} \frac{1}{2n^2 - 1}.$$

Die weitere Entwickelung ist der früheren ebenfalls identisch. Wir erhalten also auch in diesem Falle als Null-Curve eine Ellipse mit demselben Verhältniss der Halbaxen $\left(\sqrt{(2n^2 - 1)/(n^2 - 1)}\right)$; der einzige Unterschied ist der, dass der Werth von $\operatorname{tg} \varrho_1$, aus

dem sich r_1 ergibt, ein anderer ist wie früher. In beiden Fällen bedeutet ϱ_1 den Winkelabstand zweier in der Ebene der Plattennormalen gelegenen Strahlen, deren Einfallswinkel der Bedingung genügen:

$$d_1^2(n^2 - \sin^2 e_1) = d_2^2(n^2 - \sin^2 e_2)$$

Für jedes Verhältniss d_1/d_2 können wir die sämmtlichen zusammengehörigen Werthe von e_1 und e_2 berechnen. Allgemein lässt sich Folgendes darüber sagen. Wir nehmen an, die Platte I sei die dickere, also:

$$d_1 > d_2,$$

dann ist $\sin^2 e_1 > \sin^2 e_2$, folglich $e_1 > e_2$. Die Werthe der Einfallswinkel nehmen gleichzeitig ab und zu. Der grösste Werth den e_2 erreicht, ist derjenige für $e_1 = (\pi/2)$:

$$\sin^2 e_2^{90} = \frac{d_1^2 - (d_1^2 - d_2^2)\, n^2}{d_2^2}.$$

Der kleinste Werth von e_2 ist 0, dazu gehört der kleinste Werth von e_1:

$$\sin^2 e_1^{\,0} = \frac{(d_1^2 - d_2^2)\, n^2}{d_1^2}.$$

Denken wir uns nun aus der Reihe zusammengehöriger Werthe von e_1 und e_2 sämmtliche $e_1 - e_2$ und $e_1 + e_2$ gebildet, so geben sie uns mögliche Winkel zwischen den Plattennormalen. Der Gang der $e_1 + e_2$ ist der einfachere, denn da e_1 mit e_2 gleichzeitig wächst und abnimmt, so ist dasselbe auch für $e_1 + e_2$ der Fall. Der grösste Werth ist demnach der für $e_1 = (\pi/2)$, der kleinste der für $e_2 = 0$. An letzterer Stelle schliessen sich den Werthen von $e_1 + e_2$ diejenigen von $e_1 - e_2$ an, denn für $e_2 = 0$ werden sie gleich. Der weitere Verlauf von $e_1 - e_2$ als Function von e_1 oder e_2 lässt sich zum Theil durch den Differentialquotienten ermitteln:

$$\frac{d(e_1 - e_2)}{d e_1} = 1 - \frac{d e_2}{d e_1}.$$

Aus der Gleichung:

$$d_1^2(n^2 - \sin^2 e_1) = d_2^2(n^2 - \sin^2 e_2)$$

ergibt sich:

$$\frac{d e_2}{d e_1} = \frac{d_1^2 \sin 2 e_1}{d_2^2 \sin 2 e_2},$$

also wird:

$$\frac{d(e_1 - e_2)}{de_1} = 1 - \frac{d_1^2 \sin 2\, e_1}{d_2^2 \sin 2\, e_2}.$$

Für $e_2 = 0$ wird dieser Ausdruck negativ, $e_1 - e_2$ nimmt dort daher mit wachsendem e_1 also auch mit wachsendem e_2 ab. Für $e_1 = \pi / 2$ ist der Differentialquotient dagegen positiv, es findet also beim weiteren Wachsen von e_1 und e_2 wieder eine Zunahme von e_1 und e_2 statt. Dazwischen liegt ein Werthepaar, für das $e_1 - e_2$ ein Minimum wird. Es muss dann

$$\frac{d(e_1 - e_2)}{de_1} = o$$

sein, also

$$d_1^2 \sin 2\, e_1 = d_2^2 \sin 2\, e_2.$$

Das heisst nun, dass bei gegebener Dicke der Platten der kleinste Werth ihres Winkels, bei dem eine Interferenzerscheinung mit dem Gangunterschiede 0 möglich ist gleich der Differenz zweier Werthe von e_1 und e_2 ist, welche einerseits der vorstehenden, andererseits aber auch der Gleichung

$$d_1^2 (n^2 - \sin^2 e_1) = d_2^2 (n^2 - \sin^2 e_2)$$

genügen. Um diese Werthe von e_1 und e_2 zu erhalten, die wir $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ nennen wollen, quadriren wir die erste Gleichung, drücken die Sinus der Winkel $2\,\mathfrak{e}_1$ und $2\,\mathfrak{e}_2$ durch die Sinus der einfachen Winkel aus und setzen für $\sin \mathfrak{e}_2$ den aus der zweiten Gleichung folgenden Werth ein. Nach gehöriger Reduction entsteht dann die Gleichung:

$$d_2^2 n^2 + (d_1^2 - d_2^2)\, n^4 + d_1^2 (1 - 2\, n^2) \sin^2 \mathfrak{e}_1 = 0$$

also:

$$\sin^2 \mathfrak{e}_1 = \frac{d_2^2 + (d_1^2 - d_2^2)\, n^2}{d_1^2} \cdot \frac{n^2}{2\, n^2 - 1}.$$

Daraus folgt der Werth für $\sin^2 \mathfrak{e}_2$ wenn wir d_1 und d_2 vertauschen:

$$\sin^2 \mathfrak{e}_2 = \frac{d_1^2 + (d_2^2 - d_1^2)\, n^2}{d_2^2} \cdot \frac{n^2}{2\, n_2 - 1}.$$

Eine andere Form dieser Werthe zeigt, dass dieselben nicht von den absoluten Werthen von d_1 und d_2 sondern nur von ihrem Verhältniss abhängig sind, nämlich:

$$\sin^2 \mathfrak{e}_1 = \left(n^2 - (n^2 - 1)\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)\frac{n^2}{2\, n^2 - 1}$$

$$\sin^2 \mathfrak{e}_2 = \left(n^2 - (n^2 - 1)\frac{d_1^2}{d_2^2}\right)\frac{n^2}{2\, n^2 - 1}.$$

Damit sowohl $\sin e_1$ wie $\sin e_2$ reel wird, muss sein:

$$\frac{n^2-1}{n^2} < \frac{d_1^2}{d_2^2} < \frac{n^2}{n^2-1}.$$

Da wir angenommen haben, dass I die dickere Platte sei, so ist selbstverständlich $d_1^2 / d_2^2 > (n^2-1)/n^2$, wir brauchen dem Verhältniss d_1^2 / d_2^2 nur die Werthe 1 bis $n^2/(n^2-1)$ zu geben. Dabei wächst e_1 von $\arcsin n^2/(2n^2-1)$ bis $\pi/2$, zugleich nimmt e_2 von $\arcsin n^2/(2n^2-1)$ bis 0 ab. Der Minimalwinkel der Plattennormalen ist daher am kleinsten ($=0$) für $d_1^2/d_2^2 = 1$ am grössten ($=\pi/2$) für den Grenzwerth:

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{n^2}{n^2-1}.$$

Der grösste Werth des Winkels zwischen den Platten, welcher Interferenzen mit dem Gangunterschiede 0 gestattet, lässt sich noch leichter angeben. Die Winkel $2\varphi = e_1 + e_2$ sind jedenfalls in maximo grösser als die Winkel $2\varphi = e_1 - e_2$, und der grösste der Winkel $e_1 + e_2$ ist derjenige für $e_1 = \pi/2$.

Die Minimalwinkel zwischen den Platten bei gegebener Dicke hängen sehr eng mit besonderen Verhältnissen der Null-Curve zusammen. Ist nämlich die obige Bedingung erfüllt

$$d_1^2 \sin 2e_1 = d_2^2 \sin 2e_2$$

so wird:

$$\operatorname{tg} \varrho_1 = \frac{d_1^2 \sin 2e_1 - d_2^2 \sin 2e_2}{d_1^2 - d_2^2} \quad \frac{1}{2n^2-1} = 0$$

d. h. die Null-Curve zieht sich in einen Punkt zusammen. ϱ_1 ist der Winkel zwischen zwei Strahlen in der Ebene der Plattennormalen, deren Einfallswinkel der Bedingung für die Null-Curve genügen. Aus jedem Werthepaar e_1, e_2 ergibt sich der Winkel zwischen den Platten nach dem obigen gleich der Summe oder der Differenz von e_1 und e_2. Kennen wir die Werthe e_1 und e_2 für die beiden Strahlen, so lässt sich ohne weiteres ϱ_1, der Winkel zwischen ihnen construiren. Wir können daher die Discussion von ϱ_1 so führen, dass wir untersuchen, welche Werthepaare e_1 und e_2 zusammengehören, d. h, denselben Plattenwinkel ergeben. Zu dem, was oben schon über die zusammengehörigen Werthepaare gesagt wurde, muss zu dem Zwecke noch Folgendes hinzugefügt werden. Für den Werth $e_2 = 0$ schliesst sich der kleinste Werth von $e_1 + e_2$ an

einen oberen Grenzwerth von $e_1 - e_2$ an. Die $e_1 + e_2$ nehmen bei wachsendem e_2 zu, die $e_1 - e_2$ erst ab, dann zu. Soll einer der Differenzwerthe innerhalb der Reihe einem der Summenwerthe gleich kommen, so ist das nur möglich, wenn der grösste Differenzwerth den kleinsten Summenwerth übersteigt. An dem einen Ende der Reihe der Differenzwerthe für $e_2 = 0$ reicht der grösste Differenzwerth gerade an die Summenwerthe heran, an dem anderen Ende der Reihe (für $e_1 = \pi / 2$) ist aber der grösste Differenzwerth, wie wir beweisen können, noch kleiner als der kleinste Summenwerth. Bezeichnen wir, wie oben, den Werth von e_2 für $e_1 = 90^0$ mit $e_2^{\,90}$ und den Werth von e_1 für $e_2 = 0$ mit $e_1^{\,0}$, so sind die Werthe von $e_1 - e_2$ für $e_1 = 90^0$ bezw. $e_2 = 0$, gleich

$$(e_1 - e_2)_{e_1 = 90} = 90 - e_2^{\,90}$$

und

$$(e_1 - e_2)_{e_2 = 0} = e_1^{\,0}.$$

Nun fand sich früher

$$\sin^2 e_2^{\,90} = \frac{d_1^2 - (d_1^2 - d_2^2)\, n^2}{d_2^2}$$

$$\sin^2 e_1^{\,0} = \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1^2}\, n_2.$$

Daraus folgt

$$\cos (e_1 - e_2)_{e_1 = 90} = \cos (90 - e_2^{\,90}) = \sin e_2^{\,90} = \sqrt{\frac{d_1^2 - (d_1^2 - d_2^2)\, n^2}{d_2^2}}$$

$$\cos (e_1 - e_2)_{e_2 = 0} = \cos e_1^{\,0} = \sqrt{1 - \sin^2 e_1^{\,0}} = \sqrt{\frac{d_1^2 - (d_1^2 - d_2^2)\, n^2}{d_1^2}}$$

Da nach unserer Annahme $d_1 > d_2$ ist, so wird

$$\cos (e_1 - e_2)_{e_1 = 90} > \cos (e_1 - e_2)_{e_2 = 0}$$

also

$$(e_1 - e_2)_{e_1 = 90} < (e_1 - e_2)_{e_2 = 0}.$$

Keiner von den Summenwerthen ausser denjenigen für $e_2 = 0$ ist also gleich einem der Differenzwerthe. Unter Letzteren existiren aber, wie schon aus dem Vorhandensein eines Minimums folgt, solche die unter sich gleich sind. Ein jeder Differenzwerth der zwischen $(e_1 - e_2)_{e_1 = 90}$ und $\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_2$ liegt, besitzt nämlich einen anderen, ihm gleichen, der sich aus einem anderen Werthepaar e_1, e_2 ergibt. Dagegen kommen die Differenz-

werthe, die grösser als $(e_1 - e_2)_{e_1=90}$ und kleiner als $(e_1 - e_2)_{e_2=0}$ sind, nur für je ein einziges Werthepaar der ganzen Reihe vor. Nach der obigen Ableitung hatte sich für den Winkel ϱ_1 zwischen denjenigen beiden Strahlen in der Ebene der Plattennormalen, die der Bedingung

$$d_1^2(n^2 - \sin^2 e_1) = d_2^2(n^2 - \sin^2 e_2)$$

genügen ein Werth gefunden, der unter den von uns angenommenen Bedingungen reell bleibt. Wir erkennen daraus, dass zu jedem Werthepaar e_1, e_2, welches einen Plattenwinkel bestimmt, ein anderes existiren muss, welches den gleichen Plattenwinkel ergibt. Wir finden in der That, dass wir die zusammengehörigen Werthe von e_1 und e_2 noch in einer Weise benutzen können, die im Vorhergehenden nicht berücksichtigt wurde. Nach unseren Annahmen waren e_1 und e_2 immer kleiner als $\pi/2$. Wird e_1 grösser als $\pi/2$, so fällt der Strahl auf die andere Seite der Platte I auf. Da $\sin(180 - e_1)$ gleich $\sin e_1$ ist, so haben wir, wenn wir die nun zusammengehörigen Werthe von e_1 und e_2 haben wollen, neben die Reihe der e_2 statt der früheren e_1 deren Nebenwinkel zu setzen. Dadurch ergeben sich neue Differenzwerthe, die sich bei $e_1 = 90^0$ mit dem Werthe $(e_1 - e_2)_{e_1=90} = 90 - e_2^{90}$ an die früheren Werthe von $e_1 - e_2$ anschliessen. Da von dieser Stelle e_2 abnimmt während das neue e_1 wächst, so wird die Differenz $e_1 - e_2$ wachsen und zunächst alle die Werthe annehmen, welche in der bisherigen Differenzreihe nur einmal vorkamen, dann aber auch anfangen die Werthe der Reihe $e_1 + e_2$ von $(e_1 + e_2)_{e_2=0}$ zu durchlaufen. Ob die neue Differenz $(e_1 - e_2)'$ das Ende dieser Reihe nicht erreicht oder darüber hinausgeht, hängt davon ab, ob $(e_1 - e_2)'_{e_2=0}$ grösser oder kleiner ist als $(e_1 + e_2)_{e_1=90}$. Ersteres ist gleich $180 - e_1^0$, letzteres gleich $180 - (e_1 - e_2)_{e_1=90}$. Nun ist

$$\cos e_1^0 = \sqrt{\frac{d_1^2 - (d_1^2 - d_2^2)n^2}{d_1^2}},\ \cos(e_1 - e_2)_{e_1=90} = \sqrt{\frac{d_1^2 - (d_1^2 - d_2^2)n^2}{d_2^2}}.$$

Für $d_1 > d_2$ wird demnach

$$\cos e_1^0 < \cos(e_1 - e_2)_{e_1=90}$$
$$e_1^0 > (e_1 - e_2)_{e_1=90}.$$

also:

$$(e_1 - e_2)'_{e_2=0} = 180 - e_1^0 < 180 - (e_1 - e_2)_{e_1=90} = (e_1 + e_2)_{e_1=90}.$$

Es folgt daraus, dass von den verschiedenen Werthen, welche die algebraische Summe zusammengehöriger Werthe von e_1 und e_2 annimmt, das Intervall von $(e_1 + e_2) = (e_1 - e_2)'_{e_2=0}$ bis $(e_1 + e_2)_{e_1=90}$ bisher nur einmal vertreten ist. Es gibt aber noch eine Möglichkeit, die wir nicht in Betracht gezogen haben, nämlich durch die Summen von $e_1 + e_2$ wenn $e_1 > 90^0$ ist. Wenn wir unsere früheren Werthepaare zu Grunde legen, so heissen die neuen Werthe $(180 - e_1) + e_2$. Da $(180 - e_1) + e_2 = 180 - (e_1 - e_2)$ ist, so besteht die neue Reihe aus den Nebenwinkeln der früheren Differenzreihe. Letztere enthielt jeden Werth zweimal ausser denjenigen, die kleiner als $(e_1 - e_2)_{e_2=0}$, aber grösser als $(e_1 - e_2)_{e_1=90}$ waren. Also besitzt auch die neue Reihe alle Werthe zweimal, ausser denjenigen von $180 - (e_1 - e_2)_{e_1=90}$ bis $180 - (e_1 - e_2)_{e_2=0}$. Dieses letztere Intervall ist aber gerade dasjenige, welches in der vorhergehenden Serie fehlt, denn der grösste Werth $180 - (e_1 - e_2)_{e_1=90}$ ist, wie wir oben sahen, gleich $(e_1 + e_2)_{e_1=90}$, der kleinste $180 - (e_1 - e_2)_{e_2=0}$ ist gleich $180 - e_1$. Damit ist die ganze Reihe von möglichen Combinationen zusammengehöriger Werthepaare e_1, e_2 in sich selbst geschlossen.

Wir können daraus für die Null-Curve einige wichtige Folgerungen ziehen. Sind zugleich e_1 und e_2 kleiner als $\pi/2$, d. h. benutzen wir die direkt aus den ursprünglichen Formeln sich ergebenden Werthepaare, so stellt Fig. 8a, Taf. V die Lage der Platten und den Gang der Strahlen vor. In diesem Falle führen, wie wir gesehen haben unter Umständen zwei Werthepaare derselben Art auf denselben Plattenwinkel, so dass die beiden Strahlen, welche den Winkel ϱ_1 einschliessen auf dieselben Seiten der Platten einfallen. Wenn das Gesichtsfeld hinreichend gross wäre, so würde man in diesem Falle die Null-Curve als geschlossene Curve sehen können. Verkleinert man den Winkel zwischen den Platten soweit als man überhaupt noch Interferenzen vom Gangunterschied 0 erhält, so schrumpft die Null-Curve immer mehr, und schliesslich bis auf einen Punkt zusammen. Vergrössert man dagegen den Winkel zwischen den Platten, so ist die Grenze, bis zu welcher man die Curve noch vollständig sehen könnte, dadurch gegeben, dass der eine der, den Winkel ϱ_1 bildenden, Schenkel s_1 und s_2 der Strahl ist, welcher auf die Platte I streifend einfäl (Fig. 8b, Taf. V). Wächst der Winkel der Platten weiter, s

fallen die Strahlen s_1 und s_2 auf verschiedene Seiten der Platte I auf (Fig. 8c, Taf. V). Der eine Theil der elliptischen Null-Curve würde also auf der einen Seite der Platte I, der übrige auf der anderen sichtbar werden. Wir können aber auch jeden der Theile durch die Interferenzerscheinung ergänzt denken, welche durch das von Platte II reflectirte aber von I durchgelassene Licht entsteht. Die nächste Aenderung bei wachsendem Winkel zwischen den Platten tritt ein, wenn $e_2 = 0$ wird. Der Strahl fällt dann bei weiterer Drehung zwar noch auf dieselbe Seite der beiden Platten, aber auf die zweite Platte nicht mehr von derselben Seite der Normalen auf (Fig. 8d, Taf. V). In dieser Abtheilung kommt nun der besonders bemerkenswerthe Fall vor, dass die Platten aufeinander senkrecht stehen (Fig. 8e). Die beiden Strahlen s_1 und s_2 fallen symmetrisch auf die beiden Seiten der Platte I auf, und Letztere muss die Inferenzerscheinung genau in der Mitte theilen. Zugleich aber, und das ist noch wichtiger, bildet dieser Fall die Grenze zwischen einer ersten Reihe von Lagen, die wir eben betrachtet haben, und einer zweiten die bezüglich der Platte I zu der ersten symmetrisch liegt. Die beiden Seiten der Platte I vertauschen dabei einfach ihre Rolle, und da wir die Reflexion von beiden Seiten der Platte schon vorher berücksichtigt haben, finden wir bei weiterer Neigung der Platten keine neuen Erscheinungen.

Der Strahlenkegel zweiter Ordnung, welcher zur Null-Curve gehört, ist für jeden Winkel zwischen den Platten vollständig bekannt. Die elliptische Form der Curve haben wir abgeleitet für den Fall, dass die Beobachtung in der Richtung eines in der Ebene der Plattennormalen liegenden Strahles geschieht; und zwar ergab sich die Curve als Schnitt der zu diesem Strahl normalen Bildebene mit dem Kegel. Aendert man die Stellung von Fernrohr und Platten derart, dass der Strahl, in dessen Nähe man beobachtet, in die allgemeinste Lage kommt, bei der die Beobachtung der Null-Curve möglich ist, so muss man, um die Form der letzteren zu erhalten, einfach den Strahlenkegel durch eine neue Bildebene senkrecht zu der neuen Richtung des Strahles schneiden. Geschieht die Verstellung der Platten vermittelst einer dem Nörremberg'schen Apparate nachgebildeten Vorrichtung, so hat man zu beachten,

dass der Strahlenkegel, der in Betracht kommt, sich mit dem Winkel zwischen den Platten ändert. Letzterer ergibt sich allerdings leicht aus den beiden Einfallswinkeln e_1 und e_2, die wir bei der Drehung der beiden Platten constant halten und dem Winkel 2χ zwischen den Einfallsebenen; denn

$$\cos 2\varphi = \cos e_1 \cos e_2 + \sin e_1 \sin e_2 \cos 2\chi.$$

In dem grossen Bereiche von Werthen, für welche die Interferenzlinien der einzelnen Platten als äquidistante Geraden aufgefasst werden können, muss auch das Differenzsystem der beiden Platten diese Form haben und die Breite der Streifen ergibt sich unter dieser Voraussetzung aus den Abständen der Interferenzlinie für die einzelne Platte bei dem betreffenden Einfallswinkel und aus dem Winkel zwischen den Einfallsebenen durch dieselben Formeln, welche wir abgeleitet haben für den Fall, dass die Platten gleich dick sind. Hier wie dort gelten die Formeln nicht nur für Strahlen in der Nähe der Null-Curve, sondern auch für solche mit hohen Gangunterschieden, sie sind sogar, wie beiläufig bemerkt sein soll, noch anwendbar bei Platten, die nicht nur in Bezug auf die Dicke, sondern auch den Brechungsexponenten verschieden sind.

Die analogen Formeln für die Summenstreifen gelten ebenfalls unter denselben Bedingungen ganz allgemein. Die Form der vollständigen Curven wollen wir hier nicht discutiren. Es sei nur bemerkt, dass sie in einem Specialfalle sehr einfach ist, nämlich wenn die beiden Platten parallel gestellt werden. Es ist dann $e_1 = e_2$ und infolge dessen die Gleichung für die Curven:

$$2(d_1 + d_2)\sqrt{n^2 - \sin^2 e_1} = \varDelta$$

Wie man durch einen Vergleich dieser Formel mit der für die Interferenzen einer einzigen Platte erkennt, muss die Erscheinung, welche die Platten in dieser Lage geben, identisch sein mit derjenigen einer einzigen Platte mit demselben Brechungsexponenten, deren Dicke gleich der Summe der Dicken beider Platten ist. Ein ganz ähnliches Gesetz gilt in demselben Falle für die Curven des Differenzsystems. Die Gleichung lautet:

$$2(d_1 - d_2)\sqrt{n^2 - \sin^2 e_1} = \varDelta$$

und die Curven sind daher genau dieselben Kreise, welche eine Platte von der Differenz der Dicken beider Platten, aber von demselben Brechungsexponenten ergeben würde.

§ 3. Beobachtungen über einige der in den vorigen Paragraphen beschriebenen Fälle.

Um Erscheinungen von der Art der in den vorigen Paragraphen behandelten mit Leichtigkeit beobachten zu können, ist es vortheilhaft, sich so einzurichten, dass kein Fernrohr nothwendig ist. Bei dicken Platten liegen aber die Streifen zu dicht, um mit blossem Auge gesehen zu werden. Daher empfiehlt sich namentlich für Orientirungsversuche der Gebrauch recht dünner Platten. Hr. Gripon[1]) hat dazu Plättchen von Collodium angewandt. Ich bediente mich dünner Glasplatten, wie sie beim Mikroskopiren zum Bedecken der Objecte benutzt werden. Die Dicke derselben lag meist zwischen 0,14 und 0,19 mm. Ein Theil der Erscheinungen ist jedenfalls häufig Naturforschern bei der erwähnten Verwendung der Platten aufgefallen, ohne dass sie sich auf ihre Untersuchung eingelassen haben. Hält man zwei aus demselben Stück geschnittene Plättchen nahezu parallel und lässt diffuses Himmelslicht nach dem Passiren der ersten Platte von der zweiten reflectiren, so sieht man eine Reihe von farbigen Streifen, die zuweilen fast gerade sind, zuweilen in mannigfaltig gekrümmten Formen über die Glasplatte hinlaufen. Bei den weniger gekrümmten Streifen kann man im allgemeinen erkennen, dass sie parallel sind, während bei den stärker gekrümmten das Bild häufig dem Isobarensystem auf einer Wetterkarte gleicht. Bei manchen Bewegungen einer Platte bewegen sich auch die Streifen schnell unter Formänderung über die Platte, bei anderen bleiben sie mehr am Platze und ändern im Wesentlichen nur ihre Abstände. Bei künstlichem Lichte sind die Streifen ebenfalls recht gut zu sehen, es genügt das Licht einer gewöhnlichen Petroleumlampe. Die unregelmässigen Interferenzstreifen, welche die einzelnen Platten in homogenem Lichte erkennen lassen, beweisen, dass die Gläser durchaus nicht planparallel sind. Die beobachteten

1) E. Gripon, Compt. rend. **82.** p. 1048. 1876; Mondes (2) **40.** p. 84. 1876.

farbigen Streifen stützen sich auf diese Interferenzlinien jedoch in derselben Weise, wie die Brewster'schen Linien auf die Haidinger-Mascart'schen Interferenzen in einer planparallelen Platte. Es liegt nahe, wenn man zwei Gläser hat, welche in nahezu paralleler Stellung die Streifen zeigen, auch die von Hrn. Lummer angegebene Versuchsanordnung zu probiren, also bei bedeutenderem Winkel zwischen den Platten in der Richtung des symmetrischen Strahles zu beobachten. In der That findet man mit dem einfachen Hülfsmittel der Deckglasplättchen auch in dieser Lage Interferenzerscheinungen. Die Streifen liegen, wie die Theorie es erwarten lässt, enger wie im vorigen Falle, und lassen sich sowohl in durchfallendem, wie im reflectirten Lichte erkennen. Bei den theoretischen Ableitungen, für den Fall, dass die Platten ähnlich wie im Haidinger'schen Polarisationsapparat angeordnet sind, wurde keine Rücksicht darauf genommen, ob möglicher Weise die Polarisation des Lichtes die Erscheinung schwächen oder ganz aufheben könne. Für einige Stellungen der Platten liegt diese Annahme sehr nahe, obwohl man andererseits nicht übersehen muss, dass das Licht, welches bei der Differenzerscheinung interferirt nicht solches ist, das an den beiden Vorderseiten der Platten nacheinander reflectirt wird. Die theoretische Behandlung der Frage hat kein grosses Interesse, weil man sich wieder mit Hülfe der Deckgläschen leicht davon überzeugen kann, dass die Erscheinungen bei der Beobachtung in Richtung der von uns Centralstrahlen genannten Strahlen deutlich sichtbar sind. Bei grösseren Winkeln zwischen den Platten ist schon eine bessere Justirung erforderlich, um die Linien zu sehen, als bei kleinen, und noch viel mehr ist das der Fall, wenn man vom symmetrischen zum Centralstrahl übergehen will. Das Halten der Platten ganz aus freier Hand ist dann ziemlich schwierig, namentlich wenn man bei Drehungen, ähnlich denjenigen beim Nörrenberg'schen Apparat, die Erscheinung dauernd verfolgen will. Es empfiehlt sich daher, die Platten an zwei Glas-, Holz- oder Pappscheiben zu befestigen, welche aufeinander schleifen, und zwar derart, dass die Platten gegen die Scheiben gleich geneigt sind. So kann man die Beobachtung in der Richtung der Centralstrahlen leicht durchführen. Die Unregelmässigkeiten der Oberfläche

kommen bei kleinen Winkeln der Platten mehr zur Geltung als bei grossen, und so lässt sich in letzterem Falle eine Uebereinstimmung der Lage der Streifen mit der theoretischen, soweit es bei derartigen rohen Versuchen möglich ist, feststellen. Eine genauere Prüfung der Ergebnisse der Rechnung mit Hülfe geschliffener Planplatten ist im hiesigen Institute durchgeführt worden, die Resultate sollen demnächst veröffentlicht werden.

Auch die Interferenzerscheinungen in zwei ungleich dicken Platten lassen sich mit den Deckgläsern leicht verwirklichen. Die Unregelmässigkeiten der Platten stehen natürlich hier ebenso wie im vorigen Falle einer genauen Prüfung der theoretischen Resultate im Wege. Es kann aber vorkommen, dass gerade die Mängel der Platten bei Untersuchungen dieser Art von Nutzen werden, und zwar dadurch, dass das Identifiziren und Festhalten von Interferenzerscheinungen, wenn davon verschiedene gleichzeitig vorhanden sind, durch die Unregelmässigkeiten erleichtert werden. Ein Beispiel dafür sind die Interferenzerscheinungen in nahezu parallel gehaltenen Platten.

§ 4. Interferenzerscheinungen in nahezu parallel gehaltenen Platten.

Wir kommen mit diesem Gegenstande auf die ursprüngliche Brewster'sche Versuchsanordnung zurück, nämlich diejenige, bei der die Platten einen sehr kleinen Winkel einschliessen. Mascart hat diesen Fall ebenfalls eingehend untersucht und zwar unter der Voraussetzung durchfallenden Lichtes. Aus seiner einfachen Darstellung ergibt sich aber, dass man aus den Verhältnissen bei durchgehendem Lichte auf diejenigen schliessen kann, wenn das Licht von der einen Platte oder von beiden reflectirt wird. Daher ist kein Unterschied von Belang zwischen der Anordnung, welche Mascart voraussetzt und derjenigen, welche wir wählen. Wir nehmen an, wie oben, dass das Licht durch die erste Platte fällt und von der zweiten reflectirt wird (Fig. 9 Taf. V). Das Auge befinde sich in A. Ganz einfach liegen die Verhältnisse, wenn die erste Platte soweit nach links, also vom Beobachter weg, liegt, dass kein ins Auge gelangender Strahl zweimal dieselbe Platte trifft. Das ist der Fall, wenn man zwischen den Kanten

K_1 und K_2 durchblicken kann. Es gibt dann nur einen Weg, auf dem Licht beide Platten nach einander passirt, und dieses Licht fällt durch die obere Platte und wird von der unteren reflectirt. Sind die Gläser annähernd von gleicher Dicke, so findet man Interferenzstreifen von der Art der oben beschriebenen. Wird die Platte gerade in der entgegengesetzten Richtung, also nach dem Beobachter hin soweit verschoben, dass wieder keine Strahlen durch Reflexion zweimal auf dieselbe Platte kommen, was man dadurch erkennen kann, dass man kein Bild der oberen Platte in der unteren sieht, so sind aufs neue Interferenzlinien vorhanden, welche diesmal in dem, zuerst von der unteren Platte reflectirten, dann durch die obere fallenden, Lichte entstehen. In beiden Fällen sind die Interferenzen unzweifelhaft durch die gleiche Dicke der Platten veranlasst und in beiden Fällen kommt bei den Deckgläsern nur eine Reihe von Interferenzlinien zum Vorschein. Also die Interferenzen, welche dadurch entstehen, dass das Licht mehreremal, statt wie bei der Brewster'schen Erscheinung je einmal, in den Platten selbst hin und her läuft und auf die Hr. Quincke aufmerksam gemacht hat, kommen hier nicht in Betracht. Neue Interferenzlinien treten aber auf, sobald man die obere Platte ihr selbst parallel aus der ersten Lage in die zweite führt. Dabei ist es sehr leicht, die vorher beobachteten Linien von den neuen zu unterscheiden, indem man bei einer Bewegung der Platte aus der neuen Lage in je eine der beiden früheren, aufpasst, welche Liniensysteme verschwinden und welche erhalten bleiben. Von den Linien, welche in keiner der früheren Lagen sichtbar waren, interessirt uns namentlich ein System, welches mit den beiden vorigen in nahem Zusammenhange zu stehen scheint. Es ist bei diffusem Himmelslicht, sowohl wie Lampenlicht zu erkennen und trägt im ganzen dieselben Merkmale wie die beiden beschriebenen Systeme. Es ist jedoch nicht so leicht zu sehen wie jene, weil das von der oberen Platte direct reflectirte Licht, welches bei keiner der Interferenzen eine Rolle spielt, dasselbe meistens verdeckt. Blendet man dieses Licht ab, was durch einen geeignet angebrachten Schirm ermöglicht wird, so wird das neue System sehr klar und deutlich, und wenn man durch geringe Bewegung der Platten dafür sorgt, dass sich die beiden

anderen Systeme im Gesichtsfelde schneiden, so sieht man, dass das neue System durch die Schnittstelle der beiden ersteren ungefähr ebenso hindurchgeht, wie jene Linien durch die Schnittpunkte der Interferenzlinien der einzelnen Platten. Ein bedeutender Unterschied liegt nur darin, dass die beiden ersten Systeme von kleinen Gangunterschieden sich ableiten aus solchen mit grossen Gangunterschieden, während wir in unserem Falle zwei Systeme von farbigen Brewster'schen Linien haben, die Anlass zu einem dritten von ähnlichem Aussehen geben. Das dritte System und sein Zusammenhang mit den beiden anderen, erklärt sich nun folgendermassen. Die Strahlen, welche die ersten Linien veranlassen, verlaufen wie ABC_2D_1E und $AB_1C_1D_1E$ in Fig. 10 Taf. V, diejenigen des zweiten Systems wie ABC_2D_1E und $ABCDE$. Nun kann schliesslich aber auch ein Strahl $ABCDE$ mit einem anderen $AB_1C_1D_1E$ interferiren, und die Linien, die dadurch entstehen, müssen mit den anderen zusammenhängen, denn sind die Differenzen der Weglängen:

$$ABC_2D_1E - AB_1C_1D_1E = \Delta_1$$

und

$$ABC_2D_1E - ABCDE = \Delta_2$$

so ist

$$ABCDE - AB_1C_1D_1E = \Delta_1 - \Delta_2.$$

Die letzten Linien können übrigens, wie aus der Fig. 10 hervorgeht, aufgefasst werden als Brewster'sche Streifen, welche von der Platte I herrühren, die in diesem Falle die Rolle der beiden gleich dicken Platten spielt, während die Platte II nur dazu dient um das Licht, welches einmal die Platte I passirt hat, nochmal darauf zurückzuwerfen. In der That kann man auch dieselben Streifen sehen, wenn man nur eine einzige Platte benutzt, und an die Stelle der zweiten einen undurchsichtigen ebenen Spiegel bringt. Ebenso erhält man sie natürlich auch mit zwei nahezu parallel gehaltenen Platten von verschiedener Dicke. Die beiden zuerst erwähnten Streifensysteme sind identisch mit den von Hrn. Mascart in vollkommen planparallelen Platten beobachteten. Da sie bei solchen beide parallel der Schnittlinie der Plattenebene laufen, so ist von dem Zusammenhange mit der dritten Erscheinung dort nichts zu erkennen und Hr. Mascart berücksichtigt die

letztere überhaupt nicht. Uebrigens ist der Zusammenhang der drei Erscheinungen, geometrisch gesprochen, auch dann noch gewahrt, denn auch das dritte Liniensystem muss bei vollkommen planparallelen Platten den beiden anderen parallel laufen, schneidet sie also in ihrem gemeinsamen Schnitt im Unendlichen. Dass dies in der That der Fall ist, d. h. dass auch das dritte System parallel der Schnittgeraden der Platten läuft, ersieht man daraus, dass das dritte System, als ein Brewster'sches System zwischen der ersten Platte und ihrem Spiegelbilde in der zweiten aufgefasst werden kann, und der Schnitt dieser beiden ist identisch mit dem Schnitte beider Platten.

Diese Liniensysteme sind durchaus nicht die einzigen, die man in den Deckgläschen beobachten kann, es gehören dazu weiter solche, bei denen die untere Platte die Rolle der beiden Brewster'schen Platten übernimmt, die obere nur als Spiegel dient, und viele andere. Wir wollen auf dieselben hier nicht näher eingehen, weil sie sich zum Theile mit anderen Hülfsmitteln noch leichter untersuchen lassen, von denen später die Rede sein soll. Nur das mag noch erwähnt werden, dass das dritte System dasselbe ist, welches im Newton'schen Farbenglase von Knox, van der Willigen und Mach beobachtet und untersucht wurde, und dass letzterer auch den gemeinsamen Charakter der Linien erkannt hat.

§ 5. Ueber Brewster'sche und ähnliche Interferenzerscheinungen in Krystallplatten.

Brewster[1]) selbst versuchte schon an Krystallplatten seine Linien zu sehen aber mit negativem Erfolge. Er wandte Topas und Gyps an, und zwar Platten von verschiedener Stärke, er vermuthet aber, dass sie nicht hinreichend gleich dick waren. Dagegen beschreibt Dove Streifen in Platten von Bergkrystall, ohne der vergeblichen Versuche von Brewster Erwähnung zu thun. Es geht nicht an, etwa die Luftschicht als das eigentlich Wesentliche bei dem Zustandekommen der Interferenz zu betrachten,

1) Brewster, l. c.

2) H. W. Dove, Monatsber. d. Berl. Acad. April 1871. u. Pogg. Ann. **143.** p. 335. 1871.

wenigstens kommt das nur auf das Gleiche hinaus, als wenn wir die eine der Krystallplatten dieselbe Rolle spielen lassen. Wir müssen also, vorausgesetzt, dass nicht Streifen anderer Art in Krystallplatten entstehen, annehmen, dass Dove mit seinen Platten von Bergkrystall die Streifen erzeugen konnte, während es Brewster mit seinen Platten von Gyps wegen der mangelhaften Planparallelität nicht gelang. Dass die Streifen von Dove ganz anderer Natur waren, ist wohl nicht vorauszusetzen, obwohl die Theorie der Streifen in Krystallplatten nicht untersucht worden ist und Dove über seine Beobachtungen nicht viel angibt. Es ist leicht Interferenzerscheinungen von der Art der Brewster'schen in Krystallplatten zu beobachten, welche hinreichend dünn sind. Wenn nämlich in jeder der Krystallplatten der ordentliche Strahl und der ausserordentliche Strahl nur einen geringen Gangunterschied erhalten, so können auch die Streifensysteme, welche von den beiden erzeugt werden, nicht ganz voneinander getrennt liegen und verschieden verlaufen. Die Streifensysteme, die der einzelnen Platte allein zukommen, sind in diesem Falle besonders gut mit blossem Auge zu beobachten. An dünnen Glimmerplatten entdeckte ja, wie wir erwähnten, Haidinger die Interferenzerscheinung planparalleler Platten. Die Streifenbreite ist eine bedeutende wegen der geringen Dicke der Platten. Diese Umstände machen die Glimmerplatten zu manchen Zwecken der Untersuchung sehr geeignet, sie sind zu den Versuchen viel bequemer als Gyps, weil sie sich leichter ganz dünn spalten lassen.

Gelegentlich trifft man bei derartigen Versuchen auch auf Farben ganz anderen Ursprunges. Man hat nämlich schon mehrfach beobachtet, dass man mit einer einzigen Krystallplatte ohne Polarisator noch Analysator Interferenzerscheinungen bekommen kann.[1]) Diese Farben sind gewöhnlich nicht sehr stark, wendet man aber einen Analysator oder einen Polarisator an, so können sie sehr deutlich hervortreten. Gerade einige der Stellungen, welche für die Beobachtung der uns interessirenden Interferenzstreifen brauchbar sind, lassen auch

---

1) L. Ditscheiner, Sitzber. d. math. nat. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. Wien **73.** Abth. II. p. 180. 1876.

die Farben dieser Art zustande kommen. Dabei spielt die eine Krystallplatte lediglich die Rolle des Polarisators für das von ihrer Oberfläche reflectirte Licht. Man kann daher auch leicht diese Farben von den anderen unterscheiden, denn die eine Platte lässt sich durch eine Glasplatte oder eine sonstige Polarisationsvorrichtung ersetzen; ohne dass die Erscheinung verschwindet, während die anderen Erscheinungen abhängig sind von den Verhältnissen der Dicken der beiden Krystallplatten. Nachdem man so das Mittel besitzt, durch einfache Controlversuche diesen Grund zu Versehen zu vermeiden, gelingt es leicht, die verschiedenen Fälle von Interferenzerscheinungen zu verwirklichen, welche bisher für Glasplatten erwähnt wurden. Begreiflicherweise wiederholt sich dabei manche der Erfahrungen, die Haidinger bei seinen Versuchen über die Interferenzringe an einer einzigen Glimmerplatte machte; z. B. ist es vortheilhaft, die Platten so nahe wie möglich an's Auge zu bringen, um die Gestalt der Interferenzstreifen möglichst rein beobachten zu können. Indem man dagegen die Platten weiter vom Auge entfernt, treten die Unregelmässigkeiten mehr hervor und schliesslich erreicht man ein ähnliches moirirtes Aussehen der Platten, wie es bei Anwendung homogenen Lichtes unter denselben Bedingungen die einzelne Platte zeigt. Die Dicke des Glimmers ändert sich nicht wie die der Glasplatten stetig von Ort zu Ort, sondern die Platten bestehen aus Gebieten von verschiedener Dicke, welche durch scharfe Grenzlinien voneinander getrennt sind. Steht die Platte nahe am Auge, so sind die Streifen, deren Grund die ungleichen Einfallswinkel der Strahlen sind, auf einem bestimmten Gebiete der Platte zahlreicher, als wenn ich die Platte vom Auge entferne. In letzterem Falle können daher ganze Gebiete von ungleicher Dicke in dem Raume enthalten sein, der bei einer planparallelen Scheibe von einem einzigen Streifen eingenommen sein würde. Diese Gebiete können daher jedesmal als Ganze voneinander verschiedene Färbung zeigen und eine Erscheinung verursachen, bei der die Platte aussieht wie aus farbigen Flicken zusammengesetzt. Im anderen Falle, wo die Platte sich nahe am Auge befindet, machen die Gebiete von gleicher Dicke je einen grossen Theil des Gesichtsfeldes aus, in ihnen sind die Haidinger'schen

Linien rein zu sehen und an der Grenze der verschiedenen Felder findet nur eine Verschiebung der Linien statt. Aehnlich erklärt sich auch, warum gewisse Stellungen der Platte zueinander für die Beobachtung der Erscheinungen geeigneter sind als andere. Wählt man Lagen, in denen die einzelnen Streifen grössere Theile der Platten zwischen sich einschliessen, so werden die Unregelmässigkeiten in der Dicke der Platte leichter bewirken, dass man die Streifenbildung überhaupt nicht mehr sieht, während man mit denselben Platten in anderen Lagen Streifen sehen kann, welche mit grosser Annäherung sich an den Stellen befinden, wo ganz planparallele Platten sie zeigen würden. Geht man beispielsweise bei zwei Platten von gleicher Dicke aus von dem Falle, den Lummer behandelt hat, beobachtet also zuerst in Richtung des symmetrischen Strahles und dreht dann die dem Auge nähere Platte, so dass der Einfallswinkel derselbe bleibt, so kann man häufig beobachten, dass die Streifen Anfangs ganz deutlich aber eng sind und in dem Maasse unregelmässiger werden, als sie sich verbreitern. Aus diesen Gründen ist also die Stellung, welche Brewster bei Gyps und Topas anwandte, um die Linien zu sehen, nämlich diejenige, bei welcher die Platten nahezu parallel sind, nicht ganz geeignet. Allerdings kann man die gesuchte Interferenzerscheinung in dieser Lage sehen, sie stellt sich aber ebenso dar, wie bei dem Glimmer, d. h. die ganze Platte scheint aus kleinen farbigen Feldern zu bestehen, die vollkommen regellos liegen. Da man aus Gyps nicht so dünne Spaltstücke wie von Glimmer erhalten kann, und da die Gebiete von gleicher Dicke (vielleicht aus demselben Grunde) beim Gyps noch kleiner zu sein scheinen als beim Glimmer, so ist die Erscheinung schwieriger bei demselben zu beobachten. Trotz der Unregelmässigkeiten kann man, bei grösserem Neigungswinkel der Platten zueinander, Liniensysteme beobachten, welche nur geringe Abweichungen von der für planparallele Platten berechneten Lage haben. Gyps ist für Versuche dieser Art schon soviel weniger geeignet als Glimmer, dass man nicht erwarten kann, mit Topas, der sich noch schwerer in dünne Platten spalten lässt, oder überhaupt mit Spaltungsstücken anderer Krystalle günstigere Resultate zu erlangen. In solchen Fällen wird man daher immer auf geschliffene

Platten angewiesen sein. Das Material von Gyps, welches zu meinen Versuchen diente, erhielt ich durch die Freundlichkeit der Hrn. Prof. Groth und Ulrich, denen ich dafür meinen Dank ausspreche.

Schluss.

Die Interferenzerscheinungen, welche man in zwei planparallelen Platten von gleicher Dicke und demselben Material erhält, sind bisher genauer nur für den Fall untersucht, dass das Licht von beiden Platten in derselben Ebene reflectirt wird. In § 1 ist die Formel für die Breite der Differenzstreifen allgemein für die übrigen Lagen entwickelt, bei denen der Gangunterschied Null vorkommt und daher Beobachtung in gewöhnlichem Lichte möglich ist. Beschränken wir uns auf diejenigen Fälle, bei denen die Interferenzlinien der einzelnen Platte mit genügender Annäherung als äquidistante Streifen aufzufassen sind, so ergibt sich nicht nur dieselbe Formel in viel einfacherer Weise, sondern auch diejenige für die Breite der Differenzstreifen von grösseren Gangunterschieden und der Summenstreifen in allgemeiner Lage.

Der § 2 enthält eine Discussion der Interferenzerscheinung, welche als Verallgemeinerung der Brewster'schen Linien für den Fall gelten kann, dass die beiden planparallelen Platten von ungleicher Dicke sind, ein Fall, den man bisher nur soweit berücksichtigt hat, als es bei den unvermeidlichen, geringen Ungleichheiten der Platten im Interferenzialrefractor nothwendig erschien. Die Breite der Streifen ergibt sich unter den im § 1 erwähnten beschränkenden Voraussetzungen auch aus denselben Formeln.

In § 3 ist ein Verfahren angegeben, um leicht experimentell das Vorhandensein und die Lage der in den vorigen Paragraphen behandelten Erscheinungen festzustellen.

In § 4 sind die verschiedenen Interferenzen behandelt, welche möglich sind, wenn zwei planparallele Platten von gleicher Dicke einander nahezu parallel sind. Der Zusammenhang von einigen dieser Interferenzerscheinungen ist theoretisch und experimentell untersucht.

Der § 5 ist den Interferenzerscheinungen von der Art der Brewster'schen in dünnen Krystallplatten gewidmet.

Berlin, Physik. Inst. d. Univ. 1891.

X. *Weiteres zur electromotorischen Wirksamkeit der Ionen; von W. Nernst und R. Pauli.*

(Mitgetheilt von W. Nernst.)

Die Betrachtung der Diffusionserscheinungen, der electrolytischen Leitung und des electromotorischen Verhaltens von in Wasser gelösten Salzen führt übereinstimmend zu dem Ergebniss, dass auf ein in Lösung befindliches Ion im allgemeinen zweierlei Arten von Kräften treibend einwirken, deren eine vom Gefälle des osmotischen Partialdruckes des betreffenden Ions, deren andere vom Gefälle des electrostatischen Potentials herrührt. Ausser von der Intensität dieser Kräfte hängt die Geschwindigkeit, mit welcher das Ion im Lösungsmittel wandert, nur noch ab von dem Reibungswiderstande, den es bei seiner Wanderung zu überwinden hat. Da nun sowohl die Gesetze des osmotischen Druckes (Gasgesetze), wie diejenigen der electrostatischen Fernwirkung (Coulomb's Gesetz) wohl bekannt sind, so wird es ermöglicht, die Wanderung der Ionen unter dem Einflusse jener Kräfte aus ihren Reibungswiderständen mittelst Differentialgleichungen zu berechnen, welche durch Combination der hydrodynamischen Gleichungen mit denen der Electricitätsströmung zu erhalten sind.

Als diese Gleichungen aufgestellt wurden[1]), geschah ihre Verwerthung nach zwei Richtungen hin; einerseits wurden in absolutem Maasse die Diffusionscoëfficienten der Salze aus den Gasgesetzen und den Kohlrausch'schen Beweglichkeiten, anderseits aus den gleichen Grössen die electromotorischen Kräfte gewisser galvanischer Ketten abgeleitet unter gleichzeitiger Betonung, dass u. a. durch die allgemeinen Differentialgleichungen das Problem, die in Flüssigkeitsketten, welche aus vollständig dissociirten Electrolyten combinirt sind, wirkenden electromotorischen Kräfte zu finden, im Princip gelöst, d. h. auf Schwierigkeiten rein mathematischer Art zurückgeführt sei.

Diese rechnerischen Schwierigkeiten sind nun freilich nicht

---

1) W. Nernst, Zeitschr. physik. Chem. 2. p. 617. 1888; 4. p. 129. 1889.

unbedeutend, insbesondere dann, wenn die in Lösung befindlichen Electrolyte nur unvollständig dissociirt sind, ein Fall, der sich bisher noch nicht hat behandeln lassen. Es sei übrigens bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen, dass es von vornherein nicht ausgeschlossen, wenn auch nicht sehr wahrscheinlich ist, dass ein während der Diffusion sich dissociirender Electrolyt noch in anderer Weise electromotorisch wirkt, als wie es in den allgemeinen Formeln zum Ausdruck gelangt. Der Fall, dass nur ein völlig dissociirter Electrolyt sich in Lösung befindet, bietet keine Schwierigkeiten, und nachdem so die zwischen zwei verschieden concentrirten Lösungen desselben Electrolyten wirksame electromotorische Kraft ermittelt war, liessen sich Flüssigkeitsketten herstellen, deren Gesammtkraft sich aus der Summe der an den einzelnen Contactstellen wirkenden electromotorischen Kräfte berechnen liess und gelang sowohl zum ersten Male eine, nach den Gesammtergebnissen der Messungen zu urtheilen, unzweifelhafte Zerlegung der Gesammtkraft eines galvanischen Elementes in ihre Komponenten.

Die erwähnten Differentialgleichungen sind von M. Planck in einer Arbeit[1]) acceptirt worden, welche insofern auch etwas Neues für den behandelten Gegenstand beibringt, als der strenge, früher nur andeutungsweise und unvollständig erbrachte Beweis geführt wurde, dass durch jene Differentialgleichungen die in den Lösungen wirkenden Kräfte *eindeutig* bestimmt sind.

Einen weiteren Fortschritt erfuhr die Behandlung der Differentialgleichungen in einer bald darauf erschienenen Abhandlung von Planck[2]), in welcher auf einem durch Einfachheit und Eleganz ausgezeichneten Wege die allgemeine Integration für den Fall gelang, dass beliebig viele binäre und vollkommen dissociirte Electrolyte in der Lösung sich befinden. Durch diese Ueberwindung der mathematischen Schwierigkeiten wird es nunmehr möglich, die electromotorische Kraft einer bei Anwendung von Lösungen binärer Electrolyte beliebig combinirten Flüssigkeitskette aus den Gasgesetzen und den Ionenbeweglichkeiten in absolutem Maasse zu berechnen.

Bei der experimentellen Prüfung der Theorie ist leider im hohem Maasse störend der Umstand, dass vor der Hand

1) Planck, Wied. Ann. **39.** 161 (1890).
2) Planck, Wied. Ann. **40.** 561 (1890).

der unvollkommenen electrolytischen Dissociation bei endlichen Verdünnungen nicht Rechnung getragen werden kann. Gleichwohl haben wir es unternommen, einen Beitrag zur experimentellen Erforschung der Flüssigkeitsketten mit Rücksicht auf die Forderungen der Theorie zu liefern und es seien im Folgenden unsere Resultate kurz mitgetheilt

Die untersuchten Ketten wurden erhalten durch Combination der vier Lösungen (die Zahlen bedeuten Gramm-Aequivalente per Liter):

$$0{,}1\,KCl,\quad 0{,}01\,KCl,\quad 0{,}1\,HCl,\quad 0{,}01\,HCl.$$

Die Potentialdifferenzen berechnen sich aus den Kohlrausch'schen Ionenbeweglichkeiten[1])

K	H	Cl
52	272	54

für die Combinationen

$$0{,}1\,KCl \mid 0{,}01\,KCl = -0{,}0011, \text{ und } 0{,}1\,HCl \mid 0{,}01\,HCl = +0{,}0387$$

aus der Formel[2])

$$E = 0{,}860\,T\,\frac{\mu - v}{\mu + v} \ln \frac{c_2}{c_1} \times 10^{-4}$$

oder, wenn wir $T = 273 + 18$ setzen und anstatt der natürlichen Brigg'sche Logarithmen einführen

$$E = 0{,}0576\,\frac{\mu - v}{\mu + v} \ln \frac{c_2}{c_1};$$

μ und v sind die Beweglichkeiten des Kations und Anions; die Concentrationen sind

$$c_1 = 0{,}1 \text{ und } c_2 = 0{,}01.$$

Alle Potentialdifferenzen sind in Volt ausgedrückt und beziehen sich auf 18°; positives Vorzeichen zeigt an, dass ein von der betreffenden Combination getriebener Strom dieselbe von links nach rechts durchfliessen würde, oder dass bei der Berührung die rechts stehende Lösung sich +, die links stehende sich — ladet, negatives Vorzeichen steht im entgegengesetzten Falle. Die Lö-

1) Vgl. Nernst, l. c. 4. 133 (1889).
2) Planck, l. c. 574.

sungen sind als völlig dissociirt angesehen, was natürlich kleine Fehler mit sich bringt.

Für die Combinationen

$$0{,}1\,HCl \mid 0{,}1\,KCl \text{ und } 0{,}01\,HCl \mid 0{,}01\,KCl$$

berechnet sich übereinstimmend

$$E = 0{,}576 \log \frac{272 + 54}{54 + 52} = + 0{,}0282.$$

Zur Berechnung von $0{,}01\,KCl \mid 0{,}1\,HCl$ dient die Formel[1])

$$E = 0{,}0576 \log \chi,$$

worin $\log \chi$ sich aus der transcendenten Gleichung bestimmt:

$$\frac{\chi c_2 u_2 - c_1 u_1}{c_2 v_2 - \chi v_1 c_1} = \frac{\log \frac{c_2}{c_1} - \log \chi}{\log \frac{c_2}{c_1} + \log \chi} \cdot \frac{\chi c_2 - c_1}{c_2 - \chi c_1};$$

wenn wir darin

$$u_1 = 272 \quad u_2 = 52 \quad c_1 = 0{,}01$$
$$v_1 = 54 \quad v_2 = 54 \quad c_2 = 0.1$$

einsetzen, findet man

$$\log \chi = - \frac{0{,}02 + 21{,}8\chi}{- 1{,}06 + 32{,}6\chi}$$

und durch Probiren

χ	$-\frac{0{,}02 + 21{,}8\chi}{-1{,}06 + 32{,}6\chi}$	$\log \chi$
0,1102	− 0,9566	− 0,9578
0,1105	− 0,9588	− 0,9566

woraus sich ergibt

$$\log \chi = - 0{,}957 \text{ und somit } 0{,}01\,KCl \mid 0{,}1\,HCl = - 0{,}0551.$$

In der gleichen Weise findet man für $0{,}1\,KCl \mid 0{,}01\,HCl$

$$u_1 = 272 \quad u_2 = 52 \quad c_1 = 0{,}1$$
$$v_1 = 52 \quad v_2 = 54 \quad c_2 = 0{,}01$$

$$\log \chi = \frac{2{,}18\chi + 0{,}2}{3{,}26\chi - 10{,}6}$$

und durch Probiren

$$\chi = - 0{,}647, \ \log \chi = - 0{,}189, \ 0{,}1\,KCl \mid 0{,}01\,HCl = - 0{,}0109.$$

1) Planck, l. c. 567.

Mit Hülfe der obigen Zahlen sind die electromotorischen Kräfte der nachfolgend verzeichneten vier Combinationen aus der Summe der an den einzelnen Berührungsstellen wirkenden Kräfte berechnet; gleichzeitig sind dieselben direct nach der früher[1]) beschriebenen Methode gemessen worden, die nur insofern eine Abänderung erfuhr, dass ein äusserst empfindliches Thomson-Galvanometer anstatt des Capillarelectrometers Verwendung fand.

<table>
<tr><th>Combination</th><th>E ber.</th><th>beob.</th></tr>
<tr><td>0,1 KCl | 0,1 HCl | 0,01 HCl | 0,01 KCl | 0,1 KCl
− 0,0282 + 0,0387 + 0,0282 + 0,0011</td><td>0,0398</td><td>0,0362</td></tr>
<tr><td>0,1 KCl | 0,1 HCl | 0,01 K Cl | 0,1 KCl
− 0,0282 + 0,0551 + 0,0011</td><td>0,0280</td><td>0,0281</td></tr>
<tr><td>0,1 KCl | 0,1 HCl | 0,01 HCl | 0,1 KCl
− 0,282 + 0,0387 + 0,0109</td><td>0,0214</td><td>0,0200</td></tr>
<tr><td>0,1 KCl | 0,01 HCl | 0,01 HCl | 0,1 KCl
− 0,0109 + 0,0282 + 0,0011</td><td>0,0184</td><td>0,0167</td></tr>
</table>

Bei allen Combinationen bildeten die rechts stehenden Lösungen den positiven Pol; in Anbetracht des Umstandes, dass kleine Unsicherheiten der Ionenbeweglichkeiten auf „*E* ber.“ von grossem Einflusse sind, müssen die vorstehenden Zahlen immerhin als eine Bestätigung der Theorie angesehen werden; von weiteren Messungen wurde vorläufig Abstand genommen, weil eine Neuberechnung der Ionenbeweglichkeiten vorgenommen werden soll.

Wie schon erwähnt, bietet die theoretische Betrachtung des electromotorischen Verhaltens von nicht vollständig in die Ionen zerfallenen Electrolyten vor der Hand gewisse Schwierigkeiten; doch lassen sich jetzt schon für gewisse einfache Fälle einige Schlussfolgerungen ziehen. Da nach der Theorie die electromotorische Wirksamkeit verdünnter Lösungen von nichts anderem abhängt, als von der Zahl der freien Ionen und ihren Beweglichkeiten, so können zwei Lösungen, die sich bezüglich dieser Punkte *gleich* verhalten, *keine* Potentialdifferenz gegeneinander aufweisen. Diese Bedingung ist z. B. bei äquivalenten Lösungen von Zinksulfat und Kupfersulfat erfüllt, weil diese sehr nahe gleiche Leitungsvermögen und bei der Gleichheit

1) Nernst, l. c. p. 141.

der Ionenbeweglichkeiten von Zn und Cu dementsprechend gleichen Dissociationszustand besitzen. Diese Folgerung lässt sich durch Messung der electromotorischen Kraft der Combination

$$\mathrm{Hg} \mid \mathrm{Hg\,SO_4} \mid 0{,}1\,\mathrm{Cu\,SO_4} \mid 0{,}1\,\mathrm{Zn\,SO_4} \mid \mathrm{Hg\,SO_4} \mid \mathrm{Hg}$$

verificiren, weil hier nach der Theorie der umkehrbaren Electroden[1]) die an der Grenzfläche der beiden letzteren vorhandenen electromotorischen Kräfte sich gegenseitig aufheben; thatsächlich betrug die Kraft obiger Kette nur

$$E = 0{,}00024\ \text{Volt}$$

und zwar bildete das rechts stehende Hg den positiven Pol. Es darf also keineswegs, wie wohl gelegentlich geschehen, der Sitz der Klemmspannung eines Danielelementes an der Berührungsfläche der Zink- und Kupfersulfatlösungen gesucht oder auch nur ein grösserer Bruchtheil derselben dahin verlegt werden.

Hr. Paschen[2]) hat mittelst der Methode der Tropfelectroden für die Potentialdifferenzen zwischen Salzlösungen von den theoretischen abweichende Resultate erhalten; allein wenn man bedenkt, dass 1. die theoretischen Werthe dieser Potentialdifferenzen aus den Gasgesetzen und Ionenbeweglichkeiten sich unter Zuhülfenahme der Energieprincipien und der Erfahrungsthatsachen der electrolytischen Leitung im absoluten Maasse berechnen liessen, 2. aus den gleichen Werthen das electromotorische Verhalten von Flüssigkeits-, Concentrations- und thermoelectrischen Ketten mit der Erfahrung in Uebereinstimmung abgeleitet wurde, 3. schliesslich die gleiche Theorie der electromotorischen Wirksamkeit der Ionen die Diffusion der Electrolyte quantitativ berechnen liess, und wenn man

1) Nernst, l. c. p. 147.

2) Paschen, Wied. Ann. **41.** p. 184. 1890; die abfälligen Bemerkungen Hrn. Paschen's über meine Theorie der electromotorischen Wirksamkeit der Ionen sind so allgemein gehalten, dass ich nichts Sachliches zu erwidern weiss. Ein Eingehen auf derartige Einwände hätte ich daher für überflüssig gehalten, wenn nicht Hrn. Paschen's Bemerkungen weitere Verbreitung gefunden hätten (vgl. Winkelmann's Physik III. p. 128). N.

sich andererseits erinnert, dass die Messungen von Potentialdifferenzen mittelst Tropfelectroden seitens verschiedener Beobachter bisher ebenso verschiedene Resultate lieferten als die theoretischen Ansichten auseinandergehen (und in der That scheinen letztere der Klärung noch vielfach bedürftig) — so dürfte obige Diskrepanz wohl nur dem Gebrauche verhängnissvoll erscheinen, den Hr. Paschen von den Tropfelectroden machen zu dürfen geglaubt hat.

Göttingen, Physik. Inst., Dec. 1891.

XI. *Ueber die Potentialdifferenz verdünnter Lösungen; von W. Nernst.*

In einer unter obigem Titel kürzlich veröffentlichten Arbeit hat Hr. W. Negbaur[1]) die Formeln, welche sich aus den von mir entwickelten Anschauungen über die electromotorische Wirksamkeit der Ionen[2]) ergeben, einer sehr eingehenden experimentellen Prüfung unterworfen: wenn ich im Folgenden einige Erweiterungen, bez. Berichtigungen zur Untersuchung Hrn. Negbaur's mitzutheilen mir erlaube, so möchte ich vorauszuschicken nicht unterlassen, dass ich diese Arbeit als einen sehr werthvollen experimentellen Beitrag zur Frage der galvanischen Stromerzeugung begrüsst habe.

1. Meine Betrachtungen bezogen sich auf in wässriger Lösung *vollständig dissociirte* Electrolyte, deren osmotischer Druck und electrisches Leitungsvermögen mit anderen Worten der Concentration proportional sind. Da man nun aber häufig die Messungen bei Verdünnungen anstellt, woselbst die Dissociation zwar weit fortgeschritten ist, aber doch nicht als vollständig angesehen werden kann, so bedarf es einer diesbezüglichen Correction, die ich seinerzeit in der Weise anbrachte, dass ich anstatt des Verhältnisses der Concentrationen dasjenige dieser Concentrationen multiplicirt mit den betreffenden Dissociationsgraden oder, was dasselbe besagt, dasjenige der betreffenden Leitungsvermögen einführte. Dass dies Verfahren begründet sei, war von selbst einleuchtend bei weitgehend dissociirten Electrolyten, mit denen ich ausschliesslich Messungen anstellte und woselbst diese Correction unerheblich ist. Hr. Negbaur rechnet in dieser Weise auch bei weniger stark dissociirten Electrolyten (wie $ZnSO_4$ u. s. w.); um die Berechtigung dieses Verfahrens zu prüfen, sei die Potentialdifferenz zwischen zwei Lösungen abgeleitet, die den gleichen Electrolyten in verschiedener Concentration und beliebig weit

1) Negbauer, Wied. Ann. **44.** p. 737. 1891.

2) Nernst, Zeitschr. phys. Chem. **2.** p. 613. 1888. u. **4.** p. 129. 1889.

dissociirt enthalten, wobei nur die Gas- und Dissociationsgesetze als gültig vorausgesetzt werden mögen.

Zur theoretischen Ableitung dieser Potentialdifferenz für den Fall eines vollständig dissociirten Electrolyten habe ich zwei Wege angegeben; der eine fusste auf der Betrachtung des Diffusionsvorganges, der zweite beruhte auf der Identität der electromotorischen Wirksamkeit eines reversiblen Processes mit der maximalen äusseren Arbeit, die durch diesen Process gewonnen werden kann.[1]) Die erstere Ableitung gibt ein anschaulicheres Bild der galvanischen Stromerzeugung, bedarf aber eines grösseren Aufwandes an Hypothesen als die letztere, welche im wesentlichen diejenigen Voraussetzungen macht, wie sie z. B. zur Ableitung der von Helmholtz'schen Theorie der Concentrationsketten erforderlich sind.

Wir schlagen hier den zweiten, weil kürzeren, Weg ein. Eine Lösung, die im Volumen V ein Gramm-Molecül eines binären Electrolyten vom Dissociationsgrade m enthalten soll, befinde sich in Berührung mit einer zweiten Lösung desselben Electrolyten, für welche die entsprechenden Grössen $V + dV$ und $m + dm$ betragen mögen. Die electrochemisch gemessene Electricitätsmenge 1 trete aus Lösung I in II, wobei $u/(u+v)$ Aequivalente des Kations von I in II, und $v/(u+v)$ Aequivalente des Anions von II in I übertreten. Die Arbeit dA, welche aus diesem Vorgange in maximo gewonnen werden kann, beträgt:

(1) $$dA = \frac{u-v}{u+v} V' dp,$$

wenn in Lösung II der (gemeinschaftliche) osmotische Partialdruck der beiden Ionen um dp kleiner ist als in I, und V' dasjenige Volumen der Lösung bedeutet, welches je ein Aequivalent der beiden Ionen gelöst enthält. Nach der Definition ist:

(2) $$V' = \frac{V}{m}.$$

Bezeichnen wir ferner mit p_0 den osmotischen Partialdruck, unter welchem jedes Ion stehen würde, wenn ein Aequivalent freier Ionen sich in der Volumeneinheit befände, so wird:

(3) $$p = p_0 \frac{m}{V}.$$

1) Nernst, l. c. p. 634 u. 136.

Aus (1) bis (3) folgt:

$$dA = p_0 \frac{u - v}{u + v} \frac{V}{m} d\left(\frac{m}{V}\right). \tag{4}$$

Zur Integration bedürfen wir einer Beziehung zwischen Dissociationsgrad m und Concentration $1/V$ der Lösung: eine solche wird geliefert durch die Dissociationsisotherme:

$$KV = \frac{m^2}{1 - m}, \tag{5}$$

worin K die Ostwald'sche Dissociationsconstante[1]) bedeutet. Aus (4) und (5) folgt:

$$dA = -p_0 \frac{u - v}{u + v} \frac{dm}{m(1 - m)}. \tag{6}$$

Durch Integration von (6) und Gleichsetzung von maximaler Arbeit A und electromotorischer Kraft E ergibt sich:

$$E_2 - E_1 = p_0 \frac{u - v}{u + v} \ln \frac{m_1 (1 - m_2)}{m_2 (1 - m_1)}, \tag{7}$$

welcher Ausdruck also die Potentialdifferenz zwischen zwei Lösungen des gleichen binären Electrolyten ergibt, wenn sein Dissociationsgrad in beiden m_1 und m_2 beträgt. Nun ist nach (5):

$$\frac{V_1 m_2}{V_2 m_1} = \frac{m_1 (1 - m_2)}{m_2 (1 - m_1)} \tag{8}$$

oder, wenn wir für die Verdünnung V den reciproken Werth der Concentration c einführen und (8) mit (7) combiniren:

$$E_2 - E_1 = p_0 \frac{u - v}{u + v} \ln \frac{c_1 m_1}{c_2 m_2}. \tag{9}$$

Da nach Arrhenius:

$$m = \frac{\lambda}{\lambda_\infty},$$

worin λ das moleculare Leitungsvermögen des Electrolyten bei der betreffenden Concentration, λ_∞ dasjenige bei sehr grosser Verdünnung bedeutet, so ist es in der That gerechtfertigt, um der nicht vollständigen Dissociation Rechnung zu tragen, auch bei wenig dissociirten Electrolyten statt des Verhältnisses der Concentrationen dasjenige der Leitungsvermögen einzuführen. *Voraussetzung ist jedoch die Gültigkeit der Gleichungen* (3) *und* (5), nach welchen der betreffende Electrolyt einerseits den aus dem Leitungsvermögen zu berechnenden osmotischen

1) Ostwald, Zeitschr. phys. Chemie 2. p. 270. 1888.

Druck aufweisen und andererseits dem Dissociationsgesetze Folge leisten muss; zur Prüfung obiger Relation würden daher die organischen Säuren in erster Linie heranzuziehen sein. Bei verhältnissmässig schwach dissociirten Electrolyten, wie Zinksulfat, woselbst sich beide Bedingungen unvollkommen erfüllt finden, sind Abweichungen zwischen Rechnung und Versuch vorherzusehen. Bei stark dissociirten Electrolyten, wie ich sie in meiner ersten Arbeit ausschliesslich zur Prüfung der Theorie herangezogen habe, ist die Correction klein genug, um sie unbedenklich anwenden zu können, trotzdem jene bekanntlich Abweichungen von der Dissociationsisotherme aufweisen. Ob auch in dem Falle, dass zwei Lösungen verschiedener Electrolyte sich berühren, woselbst also mit der Vermischung eine gegenseitige Beeinflussung des Dissociationsgrades verknüpft ist, es gestattet ist, anstatt mit den Concentrationen mit den Leitungsvermögen zu rechnen, wie es Hr. Negbaur thut (l. c. p. 748), bedarf allerdings erst noch weiterer Begründung, ist jedoch in Anbetracht der Kleinheit der Correction in den daselbst untersuchten Fällen von nicht allzu grosser Wichtigkeit.

2. Die Bemerkung Hrn. Negbaur's[1]), wonach im Sinne der Dissociationshypothese das Lösungsmittel keinen Einfluss auf die electromotorische Kraft ausüben soll, scheint mir nicht richtig zu sein; im Gegentheil hat ja gerade die Dissociationshypothese die ganz exceptionelle Rolle, welche das Wasser als Lösungsmittel vermöge seiner Fähigkeit spielt, viele gelöste Stoffe sehr vollständig electrolytisch zu dissociiren, in das rechte Licht gesetzt, und Beckmann's[2]) Forschungen haben zu einer Klassification der verschiedenen Lösungsmittel bezüglich ihrer dissociirenden Kraft geführt. Insbesondere ist man durchaus nicht berechtigt, vorherzusagen, wie Hr. Negbaur meint, dass eine Kette nach dem Schema:

$$Cd \mid CdJ_2 \text{ in } H_2O \mid CdJ_2 \text{ in Amylalk.} \mid Cd$$

bei Anwendung äquivalenter Lösungen keine Potentialdifferenz ergeben würde, wenn die Ionenbeweglichkeiten in beiden Lö-

1) l. c. p. 757. Vgl. auch Nernst, Zeitschr. f. physik. Chemie 8. p. 138. 1891.

2) Beckmann, Zeitschr. f. physik. Chemie 6. p. 470. 1890.

sungsmitteln gleich wären. Selbst wenn äquivalente Lösungen auch gleich dissociirt wären — ebenfalls eine für obige Folgerung nothwendige, aber sicherlich nicht erfüllte Voraussetzung — so könnte einerseits die electrolytische Lösungstension des Cd den beiden Flüssigkeiten gegenüber eine verschiedene sein, wie ja auch die gewöhnliche Löslichkeit von Lösungsmittel zu Lösungsmittel variirt, und zweitens könnte sehr wohl an der Berührungsfläche der beiden Lösungen eine Potentialdifferenz sich ausbilden.[1])

3. Hr. Negbauer theilt mit, dass Concentrationsketten, welche aus Lösungen schwefelsaurer Salze und mit Merkurosulfat depolarisirten Quecksilberelectroden combinirt sind, eine meiner Theorie entgegengesetzte Stromrichtung liefern. Diese Angabe beruht jedoch auf einem Irrthum; denn ich habe schon vor längerer Zeit constatirt, dass man bei Anwendung von $ZnSO_4$ und $CuSO_4$ die von der Theorie verlangte Stromrichtung beobachtet, und ich habe mich nunmehr durch erneute Messungen von der Richtigkeit meiner früheren Beobachtungen überzeugt. Ob ich normale mit $^1/_{10}$ normalen, oder $^1/_{10}$ normale mit $^1/_{100}$ normalen Lösungen combinirte, ob ich das Merkurosulfat durch Fällung von Merkuronitrat mit Schwefelsäure oder durch Erhitzen von concentrirter Schwefelsäure mit Quecksilber bereitete, in allen Fällen beobachtete ich nicht nur die von der Theorie geforderte Stromrichtung, sondern erhielt auch den erwarteten nahe kommende Absolutwerthe. Freilich liefern, wenigstens bei verdünnten Lösungen, die Messungen etwas schwankende Werthe, was vielleicht auf eine hier erfolgende allmähliche Umwandlung des neutralen in das gelbe basische Merkurosulfat zurückzuführen ist.

So zeigte bei 18° die mit Magnesiumsulfat combinirte Kette

$$1{,}0\,MgSO_4 \mid 0{,}1\,MgSO_4$$

eine electromotorische Kraft von 0,014 Volt, während sich aus

$$E = 0{,}0577 \frac{u}{u+v} \log^{10} \frac{c_1 \lambda_1}{c_2 \lambda_2}$$

0,0149 berechnet, wenn wir nach Hittorf $u/(u+v) = 0{,}344$ und nach Kohlrausch $\lambda_1 = 270$ und $\lambda_2 = 474$ einsetzen. Hrn. Negbaur's *Angabe, dass hier ein Widerspruch mit meiner*

1) Nernst, Zeitschr. f. phys. Chem. **6.** p. 36. 1890.

Theorie vorläge, beruht demnach auf fehlerhaften Messungen und ich zweifle nicht, dass Hr. Negbaur bei einer Wiederholung seiner Versuche meine Resultate bestätigt finden wird.[1])

Möglicherweise erklärt sich die Sache dadurch, dass Hr. Negbaur anstatt Hg_2SO_4 das Salz $HgSO_4$ als Depolarisator verwandt hat; (im Texte wird von Merkurosulfat gesprochen, doch seine Formel, jedenfalls in Folge von Druckfehlern bald $HgSO_4$, bald Hg_2SO_4 geschrieben); bekanntlich ist Merkurisulfat in wässerigen Lösungen sehr zersetzlich und desshalb als Depolarisator nicht zu brauchen. Der Umstand, dass Hrn. Negbaur's Clarkelemente nicht sehr constant waren, lässt beinahe befürchten, dass durch ein derartiges Versehen auch die Kraft seines Normalelementes unsicher gemacht wird. Hrn. Negbaur's Bemerkung (l. c. p. 766) „über die Grösse der Potentialdifferenz der Latiner-Clark-Kette liegen, wie bekannt viele, zum Theil ziemlich verschiedene Angaben vor" steht die Thatsache entgegen, dass eine Anzahl Beobachter fast identische Zahlen erhalten haben.[2]) Da ich jedoch beim Vergleich meiner älteren Zahlen mit den entsprechenden neueren Hrn. Negbaur's (den anzustellen Hr. Negbaur unterlassen hat) bis auf wenige Procent Uebereinstimmung finde, so kann jedenfalls die electromotorische Kraft seiner Normalelemente nicht erheblich fehlerhaft in Rechnung gesetzt sein. — Wenn Hr. Negbaur sagt (l. c. p. 738): „Die wenigen Versuche, die Hr. Nernst selbst zu seiner Theorie angestellt hat, lassen keinen Schluss auf die allgemeine Gültigkeit seiner Formeln zu", so darf ich wohl die Frage, ob durch meine Messungen, welche im Ganzen etwa 60 Ketten verschiedenster Art (Flüssigkeits-, Concentrations-,

---

1) Es wäre sehr wünschenswerth, wenn Hr. Negbaur bei dieser Gelegenheit durch einige Nachträge und Berichtigungen seiner Arbeit erst ihren vollen Werth ertheilen möchte. So fehlt bei Tabelle 1 bis 13 die Angabe, *auf welche Concentrationen sich die Concentrationsverhältnisse k beziehen;* ferner wird nicht gesagt, mit welchen Werthen der Ionenbeweglichkeit bei Stoffen wie H_2SO_4, $ZnCl_2$ u. s. w. gerechnet wurde; die Zahlenwerthe der Tabelle 14 differiren von denen der Tabelle 16 und 17 ein wenig, u. s. w.

2) Es fanden Lord Rayleigh und Sidgwick (Phil. Trans. 411,1884) 1,435 bei 15°, v. Ettingshausen (C. f. E. 6 720, 1884) 1,433 bei 15,5°, Loeb und Nernst (Zeitschr. phys. Chem. 2 953, 1889) 1,431 bei 18°, C. L. Weber (Electr. Zeitschr. 1891), 1,430 bei 22,5°.

Diffusions- und electrolytische Thermoketten) betrafen, meine Theorie der electromotorischen Wirksamkeit der Ionen nicht bereits auf ein sicheres Fundament der Erfahrung gestellt war, weiterer Beurtheilung anheimstellen.

4. Die nunmehr als durchaus unzweifelhaft erwiesene Thatsache, dass meine Theorie der electromotorischen Wirksamkeit der Ionen in den sehr zahlreichen untersuchten Fällen zu mit der Erfahrung stimmenden Resultaten geführt hat, wirft ein Streiflicht auf eine wiederholt aufgeworfene Frage, *ob denn der osmotische Druck gelöster Substanzen thatsächlich dem Gasdrucke gleich ist.* Meine Theorie beruht auf dieser Voraussetzung und sie muss nothwendig dort versagen, wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist; ihre Anwendbarkeit beweist unwiderleglich die Richtigkeit des van't Hoff'schen Gesetzes.

Ich ging bei meinen Betrachtungen von der bekannten Hypothese von Arrhenius aus; es lässt sich jedoch die electromotorische Kraft der Concentrationsketten unabhängig von jeder speciellen Anschauung über die galvanische Stromleitung durch einen isothermen und reversiblen Kreisprocess berechnen, indem man die durch den Strom erzeugten Concentrationsänderungen dadurch, dass man mittelst halbdurchlässiger Wände der Lösung Wasser entzieht bez. zuführt, rückgängig macht, und es ist natürlich die Rechnung ganz in der Weise zu führen, wie H. v. Helmholtz [1]) sie anstellte, welcher das Wasser durch Verdampfung sich isotherm und reversibel entzogen dachte. Berechnet man umgekehrt aus den übereinstimmenden Messungen Negbaur's und den meinigen den osmotischen Druck der gelösten Substanz, so gelangt man, wie sofort zu übersehen, zu dem (übrigens mit den bisherigen Bestimmungen des Gefrierpunktes und Siedepunktes stimmenden Resultate), *dass der osmotische Druck verdünnter Salzlösungen sehr nahe so gross sein muss, als er sich nach van't Hoff und Arrhenius berechnet, und zwar geht die Genauigkeit fast überall bis auf 1—2 Proc.* Die Messung electromotorischer Kräfte ist in verdünnten Lösungen jedenfalls bei weitem die genaueste Methode, die zur indirecten Messung des osmotischen Drucks führt.

1) v. Helmholtz, Wied. Ann. 3. p. 201, 1877.

Hr. Lothar Meyer[1]), welcher sich stützend auf directe osmotische Messungen jenes Resultat in Abrede stellt, sieht sich daher in die Nothwendigkeit gesetzt, entweder die übereinstimmenden unabhängigen Messungen von Hrn. Negbaur und mir über Concentrationsketten für total fehlerhaft und die Uebereinstimmung mit der Theorie für zufällig zu erklären, oder in der v. Helmholtz'schen Berechnungsweise jener Ketten einen Fehler anzunehmen, oder schliesslich — das Princip von Carnot-Clausius zu verwerfen, welches gegenwärtig kaum ein Physiker anzweifelt, und das insbesondere der gegenwärtigen theoretisch-chemischen Forschung ihr Gepräge verliehen hat. Es ist wohl evident, dass zur Zeit ein Zweifel der Sicherheit directer osmotischer Messungen und insbesondere der Frage gegenüber, ob die von der Theorie geforderten *halbdurchlässigen* Wände thatsächlich beim jeweiligen Vesuch hinreichend realisirt sind, am ehesten angebracht ist.[2])

5. Schliesslich sehe ich mich durch eine, wie mir scheint, ungerechtfertigte Auffassungsweise Hrn. Negbaur's gezwungen, so ungern ich es auch thue, in eigener Angelegenheit einige Bemerkungen hinzuzufügen. Hr. Negbaur nennt die Planck'sche Theorie eine Verallgemeinerung der meinigen; dem gegenüber muss ich betonen, dass Hr. Planck zunächst eine Ableitung der von mir theoretisch gewonnenen und experimentell verificirten Formeln gegeben hat, die mit der meinigen sich im wesentlichen deckt, und sodann die Integration meiner Differentialgleichungen auch für den Fall durchgeführt hat, dass zwei verschiedene Electrolyte sich berühren. Ich hatte wiederholt darauf hingewiesen, dass sich mit Hilfe meiner An-

---

1) L. Meyer, Berichte der Berl. Akad. vom 12. Nov. 1891.

2) So ist z. B. die Ferrocyankupfermembran für KNO_3 durchlässig, wie Pfeffer, Osmotische Untersuchungen p. 48 u. 113, 1877, betonte und Tammann, Wied. Ann. **34**. p. 310, bestätigte. Dies scheinen J. J. Thomson, Anw. der Dynamik auf Physik und Chemie, Leipzig 1890, p. 225. Adie, Chem. Soc. Juni 1891 und Lothar Meyer, l. c. p. 489, übersehen zu haben; Pfeffer übrigens hat die Bedeutung dieses Cardinalpunktes klar erkannt und hervorgehoben. Daher muss denn auch der beim KNO_3 beobachtete Druck natürlich *kleiner* als der theoretische ausfallen. Richtige Werthe fand de Vries, Zeitschr. physik. Chem. **2**. p. 425. 1888, nach der plasmolytischen Methode, die hier einwandsfrei ist.

schauungen über die electromotorische Wirksamkeit der Ionen u. A. auch die vollständige Theorie der Flüssigkeitsketten wird geben lassen; wenn Hr. Planck dies Problem für den Fall, dass die Electrolyte völlig dissociirt sind, in höchst vollständiger und eleganter Weise gelöst hat, so weiss ich dies Verdienst gewiss zu würdigen, kann jedoch darin nur einen Ausbau meiner Theorie nach einer speciellen Seite hin, keineswegs eine Verallgemeinerung der meinigen, erblicken.

Ich kann daher auch nicht zustimmen, wenn Hr. Negbaur davon spricht, dass durch seine Messungen über Flüssigkeitsketten „die Planck'sche Theorie unabhängig von der meinigen" (l. c. p. 757) bestätigt sei, und ich würde mich zum Widerspruch berechtigt fühlen, auch wenn ich nicht selber bereits meine Theorie der galvanischen Stromerzeugung u. A. auch auf Flüssigkeitsketten mit Erfolg angewandt hätte (s. Kap. 4 meiner Abh.). Uebrigens können derartige Missverständnisse, die Hr. Planck sicherlich ebenso gern vermieden sieht, wie ich selber, nur einer ungenauen Lectüre seiner Arbeiten entspringen. — Was die neueste Untersuchung von Hrn. Planck[1]) anbetrifft, in welcher gewisse Theorien von Lord W. Thomson, von Helmholtz, Lippmann, Warburg und mir systematisch zusammengestellt werden, so sehe ich mich allerdings veranlasst, um der Nothwendigkeit ähnlicher späterer Reclamationen thunlichst rechtzeitig vorzubeugen, gegen eine Stelle dieser Untersuchung Bedenken zu äussern, die vielleicht für weniger mit der Sache Vertraute irreführend sein kann. Hr. Planck bemerkt (p. 386), dass „seine Untersuchungen zu einer neuen, von den üblichen Anschauungen unabhängigen Bestätigung der von W. Nernst aufgestellten Theorie der electromotorischen Wirksamkeit der Ionen in Lösungen und an unpolarisirbaren Electroden führen." Ich kann nicht finden, dass die thermodynamische Beweisführung bei Ableitung der Potentialdifferenz zwischen zwei verschiedenen Lösungen des gleichen Electrolyten oder zwischen einer umkehrbaren Electrode und Lösung bei Hrn. Planck anders als in der Form verschieden ist von der meinigen (l. c. p. 137 und 147), indem Hr. Planck nach meinem Vorgange

1) Planck, Wied. Ann. **44.** p. 385. 1891.

die maximale äussere Arbeit, die beim Uebertritt der Ionen gewonnen werden kann, gleich der gesuchten Potentialdifferenz setzt. Wenn ich daher auch nicht zugeben darf, dass Hr. Planck mit dem Entropriepricip einen neuen Gesichtspunkt zur Behandlung des Problems gebracht hat, so liegt es mir natürlich durchaus ferne, den Fortschritt in Abrede zu stellen, welchen eine derartige systematische Zusammenstellung für die Klärung der schwebenden Fragen bedeutet.

Göttingen, Physik. Institut, Januar 1892.

XII. *Ueber die Ausbreitung electrischer Schwingungen im Wasser; von E. Cohn.*

(Aus den Sitzungsber. der Acad. d. Wiss. zu Berlin vom 3. Decbr. 1891.)

1. Die Dielectricitätsconstante (D. C.) des Wassers ist von Arons und mir aus Kraftmessungen zu 76 bestimmt worden.[1]) — Später konnte ich zeigen, dass aus der Beobachtung des zeitlichen Verlaufs von Condensatorladungen ein Werth für jene Grösse folgt, der mit dem obigen innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmt.[2]) — Eine dritte unabhängige Methode, D. C. zu messen, liefern die Hertz'schen Schwingungen: bestimmt man mittelst derselben den Brechungsexponenten (n) eines Körpers von sehr geringem Leitungsvermögen für sehr lange Wellen, so folgt nach Maxwell's Theorie die D. C. (K) zum mindesten mit grosser Annäherung aus der Gleichung $K = n^2$, welche für unendlich lange Wellen und vollkommene Nichtleiter strenge Gültigkeit beansprucht. —

Es war aus zwei Gründen wünschenswerth, dass die D. C. des Wassers auch nach dieser Methode bestimmt würde. Einmal ist in keinem andern bekannten Fall die Maxwell'sche Beziehung in so schroffem Widerspruch zu den Thatsachen, sofern man n — wie das bis vor kurzem stets geschah — aus *optischen* Messungen extrapolirt. Andererseits war zu hoffen, dass einer solchen Untersuchung auch wässerige Lösungen von einigem Leitungsvermögen zugänglich sein würden, und dass es so möglich sein würde, eine Vorstellung endgültig zu beseitigen, die, obwohl durch manche Thatsachen widerlegt[3]), und durch keine gestützt, sich dennoch hartnäckig erhält: die Vorstellung, dass Leitungsvermögen und D. C. in gegenseitiger Abhängigkeit von einander stünden, dass die D. C. eines guten Leiters unendlich sei, und dass das Wasser seine hohe D. C. den Spuren gelöster Electrolyte verdanke.[4])

1) Cohn und Arons, Wied. Ann. **33.** p. 13. 1888.
2) E. Cohn, Sitzungsber. der Berl. Acad. p. 405. 1889.
3) Cohn und Arons, Wied Ann. **28.** p. 455, 474 ff und **33.** p. 24 f.
4) S. z. B. J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **31.** p. 154 f. 1891.

Hertz'sche Schwingungen sind bereits mehrfach benutzt worden, um D. C. zu messen, mit gutem Erfolge besonders von Arons und Rubens.[1]) Sie bestimmten die Brechungsexponenten electrischer Wellen für eine Reihe gut isolirender flüssiger und fester Substanzen, und sie fanden ausnahmslos das Maxwell'sche Gesetz bestätigt, auch in *den* Fällen, wo die *optischen* Beobachtungen demselben zu widersprechen schienen. Sie lieferten damit für die von ihnen untersuchten Körper den Beweis, dass der anscheinende Widerspruch nicht der Maxwell'schen Lichttheorie zur Last fällt, sondern lediglich der unzulässigen Ausdehnung empirischer Dispersionsformeln entsprang.

Aber gerade dem Wasser gegenüber versagte die Methode von Arons und Rubens. Angaben in der Litteratur und eigene Erfahrungen liessen mich annehmen, dass das bezeichnete Ziel zu erreichen sein würde, wenn man dafür sorgte, dass die Reflexionen an den Grenzflächen des Wassers keine Störungen verursachen könnten.[2]) Eine Anordnung, welche dieser Forderung genügt, soll im Folgenden beschrieben werden. Mittelst derselben hat sich bisher zeigen lassen:

a) Für Schwingungen, deren etwa 100 Millionen in der Secunde verlaufen, ist der Brechungsexponent des destillirten Wassers 8,6 bei 17° C. Daraus folgt nach Maxwell's Gesetz die D. C. 73,5.

b) Die Methode gestattet Messungen der D. C. wässeriger Salzlösungen noch bei einem Leitungsvermögen $\lambda = 500 \,.\, 10^{-10}$, bezogen auf Quecksilber.

c) Die D. C. wächst mit zunehmendem Salzgehalt, aber äusserst langsam. Die Zunahme beträgt etwa 7 Proc., wenn man von destillirtem Wasser ($\lambda \,.\, 10^{10} = 7,4$) zu einer Kochsalzlösung $\lambda \,.\, 10^{10} = 455$ übergeht. Die beobachtete D. C. des destillirten Wassers ist folglich als innerhalb der Fehlergrenzen mit der D. C. des vollkommen reinen Wassers identisch anzunehmen.

---

1) Arons und Rubens, Wied. Ann. **42.** p. 581 und **44.** p. 206. 1891.

2) Dass sehr kräftige Reflexion stattfinde, ist, falls die Maxwell'sche Beziehung gilt, zu erwarten: für $n = 8,6$ ergiebt die Fresnel'sche Formel die senkrecht reflectirte Intensität gleich 63 Proc. der auffallenden (während z. B. für $n = 1,5$ dieselbe Grösse 4 Proc. beträgt).

d) Der Brechungsexponent des destillirten Wassers ist in ausserordentlich hohem Grade von der Temperatur abhängig. Die Abnahme beträgt etwa 7 Proc. im Intervall 9° bis 35° C. Diese Veränderlichkeit ist in guter Uebereinstimmung mit der von Lorentz [1]) abgeleiteten Beziehung

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{d} = \text{const.},$$

wo d die Dichte bezeichnet. Sie ist durchaus unverträglich mit den Formeln

$$\frac{n^2 - 1}{d} = \text{const.},$$

oder

$$\frac{n - 1}{d} = \text{const.},$$

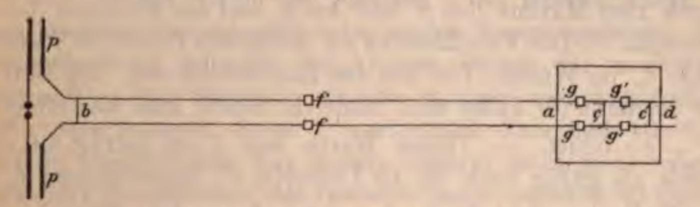
welche in dem engen Bereich der optischen Brechungsexponenten oft gute Dienste geleistet haben.

Es wird die nächste Aufgabe sein, das neue Gebiet, welches jetzt für die Messung der D. C. auch im Bereich der Leiter gewonnen ist, genauer zu durchforschen. Wo aber erhöhtes Leitungsvermögen auch der Anwendung *dieser* Methode Grenzen zieht, da eröffnet sich gleichzeitig die Aussicht, die *Dämpfung* der Schwingungen messend zu verfolgen, und damit denjenigen Theil der Maxwell'schen Theorie einer Prüfung zu unterziehen, über welchen bisher experimentelle Erfahrungen kaum vorliegen, welcher aber, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe [2]), auf *allgemeine* Gültigkeit sicher keinen Anspruch erheben kann.

2. Das Beobachtungsverfahren war das folgende. Die Schwingungen eines Hertz'schen Oscillators werden von einem Paar gegenübergestellten Platten pp aufgenommen und an den beiden in 7 cm Abstand parallel ausgespannten Drähten bd entlang geleitet (vgl. die Figur p. 373). Die letzteren durchsetzen zwischen a und d eine Steingutwanne von 66 cm Länge und 39 cm Breite in einer Höhe von 10 cm über dem Boden. — Die Wanne wird bis zur Höhe von 20 cm mit Wasser ge-

1) Lorentz, Wied. Ann. **9.** p. 641. 1880; vgl. hierzu die Rechnungen von Lebedew, Wied. Ann. **44.** p. 307. 1891.
2) E. Cohn, Wied. Ann. **45.** p. 55. 1892.

füllt. Zwischen *a* und *b* können auf den Drähten ein paar kleine „Leydener Flaschen" *ff* (die unter sich in starrer Verbindung stehen), verschoben werden. Sie sind nach dem Vorgang von Rubens [1]) aus kurzen Glasröhrchen gebildet, die von einigen Windungen dünnen Drahtes umgeben sind. Die Drähte führen zu einem Paalzow-Rubens'schen Dynamo-Bolometer [2]) welches die Energie der Schwingungen an der Stelle *ff* zu messen gestattet. — Ein zweites Paar „Flaschen" *gg* lässt sich zu gleichem Zweck innerhalb der Wanne verschieben. Dieses Paar besteht aus zwei dünnwandigen engen Glasröhren, deren jede einen der Paralleldrähte in $1^1/_2$ Windungen knapp umschliesst, die beiden offenen Enden vertical nach oben streckt und mit Quecksilber gefüllt ist. Kupferdrähte vermitteln die Verbindung mit dem Bolometer. — Bei *a*, im Wasser, aber hart an der Wand des Trogs, sind die Paralleldrähte von



einem kurzen Querbügel überbrückt. Nachdem das Inductorium in Gang gesetzt ist, sucht man diejenige Stellung auf, die man einer zweiten Brücke *b* geben muss, damit die Flaschen *ff* ein Maximum der Energie anzeigen. An dieser Stelle wird die Brücke *b* fixirt. Es sind dann die Theile des schwingenden Systems, welche einerseits zwischen *b* und dem Oscillator, andererseits zwischen *b* und *a* liegen, in Resonanz. (Dass die Einstellung nicht beeinflusst war durch die Resonanzverhältnisse des Stückes *ad*, wurde durch willkürliche Veränderungen des letzteren in besonderen Versuchen festgestellt). — Nun werden die Flaschen *gg* mit dem Bolometer verbunden und es wird, während die Brücken *a* und *b* an ihrem Ort bleiben, die Lage einer dritten Brücke *c* bestimmt, für welche *gg* maximale Energie anzeigen. Dann sind auch die Theile *ba* und *ac* in Resonanz. Dass es die Resonanz des Unisono und

1) Rubens, Wied. Ann. **42,** p. 154. 1891.
2) Paalzow und Rubens, Wied. Ann. **37.** p. 529, 1889.

nicht diejenige mit einem Obertone ist, davon überzeugt man sich, indem man die Flaschen je durch ihr Intervall wandern lässt; — oder indem man auf $1/_2$, $1/_3$ des Intervalls ab neue Brücken legt, wobei dann jede Spur von Resonanz verschwindet. — Die Entfernungen ba und ac geben aber noch nicht die Wellenlängen, die in den beiden Medien der gleichen Schwingungszahl zugehören. Vielmehr ist offenbar für jede der Brücken eine zunächst unbekannte Zusatzlänge in Anrechnung zu bringen. Um sie zu finden, wird die Brücke c gegen d hin verschoben (während gg an ihrer Stelle bleiben oder in die Lage $g'g'$ gebracht werden), und eine neue Stelle c' aufgesucht, für welche gg ein Maximum ergibt. Jetzt ist ac' mit ba in Resonanz; — aber diesmal ist es die Resonanz mit der Octave. Denn wenn man jetzt bei ruhendem c' die Flaschen gg von c' bis a verschiebt, so geht die Wirkung durch zwei Maxima (bei g' und bei g) und ein Minimum (bei c) hindurch. — Die Verschiebung cc' misst nun direct die Wellenlänge l_w im Wasser, frei von den Endcorrectionen; den Betrag der letzteren (δ) findet man zugleich, indem man die Differenz $\overline{cc'} - \overline{ac}$ bildet. — Dieser Werth von δ (er betrug 4,6 cm) wurde als gültig auch für die Luftwelle ba angenommen, d. h. die Wellenlänge in Luft: $l_o = \overline{ab} + \delta$ gesetzt. Dieselbe ist zwar acht- bis neunmal so lang als l_w; aber einerseits hatte eine frühere Untersuchung[1]) gezeigt, dass die Endcorrection sich kaum merklich mit der Wellenlänge ändert, andererseits ist ein kleiner Fehler in δ, der gegenüber der kurzen Wasserwelle (etwa 34 cm) sehr in Betracht fallen würde, gegenüber der langen Luftwelle (fast 3 m) ohne Bedeutung.

3. Es erübrigt, die Beobachtungsdaten mitzutheilen, aus denen die oben bereits mitgetheilten Schlüsse folgen.

Tabelle I enthält eine Beobachtungsreihe über den Einfluss gelösten Salzes. Eine grössere Zahl älterer Beobachtungen, bei welchen die Methodik der Messungen noch weniger ausgebildet war, ist mit ihr in wesentlicher Uebereinstimmung, für die Berechnung aber nicht benutzt worden.

---

1) Cohn und Heerwagen, Wied. Ann. **43.** p. 365. 1891.

Tabelle I.

$\lambda \cdot 10^{10}$	ab	ac	ac'	δ	l_0	l_w	n	K
7,4	287,8	29,5	63,6	4,6	292,4	34,1	8,57	73,5
132	—	29,2	—	—	—	33,8	8,65	74,8
455	—	28,4	—	—	—	33,0	8,86	78,5

Die erste Zeile der Tabelle bezieht sich auf destillirtes Wasser, die beiden folgenden auf Kochsalzlösungen. Die Temperaturen lagen bei allen Beobachtungen zwischen 16,8 und 17,2. Die erste Spalte enthält die Leitungsvermögen λ, bezogen auf Quecksilber; die folgenden drei Spalten geben die direct gemessenen Brückenabstände in Centimetern. Die Zahlen der weiteren Spalten folgen aus ihnen gemäss dem oben gesagten. Die Fehlergrenze für l_o ist auf weniger als 2 cm, diejenige für l_w auf 0,2 bis 0,3 cm zu schätzen. Die letztere steigt mit wachsendem Leitungsvermögen zuerst kaum merklich, dann schneller und schneller an, indem infolge der wachsenden Dämpfung das Maximum immer weniger scharf hervortritt. Für Salzlösungen, deren λ beträchtlich über $500 \cdot 10^{-10}$ lag, waren Einstellungen von einiger Schärfe nicht mehr möglich. Aus der Gesammtheit der Beobachtungen ergibt sich, dass die Zunahme des Brechungsexponenten mit dem Salzgehalt sicher verbürgt ist, wenn auch der Zahlenwerth dieser Zunahme mit procentisch sehr grosser Unsicherheit behaftet ist.

Noch ist zu bemerken, dass die Beziehung $K = (l_o / l_w)^2$ in aller Strenge nur für vollkommene Nichtleiter gilt. Maxwell's Theorie gibt aber auch die Correction für leitende Substanzen. Aus den Gleichungen Treatise II § 798 folgt durch eine einfache Rechnung

$$K = \left(\frac{l_o}{l_w}\right) - (2\, C l_w V_o)^2$$

wo C das Leitungsvermögen in absolutem magnetischem Maass und V_o die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum bedeutet. Die numerische Ausrechnung ergibt, dass für die vorliegenden Verhältnisse der Betrag des Correctionsgliedes in die Fehlergrenzen fällt. —

Den Einfluss der Temperatur zeigt Tabelle II.

Tabelle II.

Θ	l_w	δl_w beobachtet	δl_w berechnet	n	K
9,5°	33,5	—	—	8,73	76,2
10,5	33,7	0,2	0,0	8,68	75,3
16,8	34,1	0,6	0,4	8,57	73,5
19,8	34,3	0,8	0,6	8,53	72,7
27,2	34,7	1,2	1,4	8,43	71,0
31,7	35,3	1,8	1,9	8,28	68,6
35 3	35,7	2,2	2,4	8,19	67,1

Alle Beobachtungen dieser Reihe beziehen sich auf destillirtes Wasser, dessen Leitungsvermögen, bei 15° C. gemessen, 7.10^{-10} bis 8.10^{-10} betrug. Die erste Spalte enthält die Temperaturen Θ in Grad Celsius. Die zweite gibt in Centimetern die zugehörige Wellenlänge im Wasser: l_w; sie ist berechnet aus dem Brückenabstand ac und der Zusatzgrösse $\delta = 4{,}6$. (Die Wellenlänge in Luft ist stets dieselbe: 292,4.) Unter δl_w sind die Differenzen der Wellenlängen gegen diejenige bei 9,5° aufgeführt, und zwar erstens nach den Beobachtungen, zweitens nach der Lorentz'schen Formel. Die beiden anderen oben angeführten Formeln würden Differenzen verlangen, die in dem ganzen vorliegenden Intervall nur den Betrag 0,1 cm bez. 0,2 cm erreichen. Die letzten Spalten enthalten Brechungsexponenten und D. C.

Strassburg i. E., November 1891.

Anmerkung bei der Correctur: Der Berechnung des Brechungsexponenten aus den Beobachtungen liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Wellen sich in dem Gebiet zwischen a und d *ausschliesslich* im Wasser fortpflanzen. Dieser Forderung glaubte ich mit einer praktisch ausreichenden Annäherung durch die angegebenen Dimensionen der Versuchsanordnung entsprochen zu haben. Einige neuere Beobachtungen deuten jedoch darauf hin, dass der Querschnitt der Wassermasse gegenüber dem Abstande der Drähte noch nicht gross genug war, und dass dadurch der absolute Werth des Brechungsexponenten um einige Procent zu klein gefunden ist. Die Angaben über die Abhängigkeit desselben von Salzgehalt und Temperatur, welche auf Differenzbestimmungen beruhen, werden dadurch nicht berührt.

Strassburg i. E., Februar 1892.

XIII. *Verbesserte Construction des Babinet'schen Compensator; von K. E. F. Schmidt.*

In einem in dem Decemberheft 1890 der Zeitschrift für Instrumentenkunde abgedruckten Aufsatze habe ich die Fehlerquellen behandelt, die bei dem Babinet'schen Compensator in seiner jetzigen Gestalt entstehen können. Es wurde dort u. a. besonders eine fehlerhafte Orientirung der Quarzkeile als Fehlerquelle genannt. Solche Orientirungsfehler können beim Einstellen durch Drehungen der Keile um zwei Axen, von denen die eine in Richtung der Lichtstrahlen liegt, die andere eine zu diesen geneigte (nahezu senkrechte) Richtung hat, entstehen. In wieweit sich diese Fehler durch eine sorgsame Ausführung der Schlittenführung vermeiden lassen, kann ich nicht beurtheilen; ebenso wenig, ob sie ganz zu umgehen sind und nicht nach vielfachem Gebrauche des Instrumentes auftreten, auch wenn sie im Anfang nicht vorhanden waren. Jedenfalls habe ich sie an zwei aus verschiedenen Werkstätten stammenden Instrumenten nachgewiesen.

Eine geänderte Versuchsanordnung schliesst diese Fehlerquellen völlig aus.

Es gibt für die Messungen mit dem Compensator zwei Methoden; bei der allgemein üblichen wird der Interferenzstreif stets an einer *festen* Marke eingestellt und bei Lageänderungen durch Verschieben eines beweglichen Keils wieder an jener Marke erzeugt.

Die zweite Messmethode besteht darin, die Keile gegen einander unbeweglich stehen zu lassen und die Verschiebungen des Interferenzstreifens mit einer *beweglichen* Marke zu messen. Diese Art der Messung ist bisher nicht verwendet. Sie *bietet den Vortheil einer leichten Justirung der Quarzkeile* und *vermeidet jede Fehlerquelle, die durch Bewegen derselben entsteht.*

Ein für diese Messmethode eingerichtetes Instrument habe ich von der Firma Schmidt und Haensch in folgender Weise ausführen lassen:

An dem für Ocularmikrometer üblichen Gehäuse G (Fig. 1 und 2) ist mit der einen Deckplatte ein kleiner Rohransatz r_1 fest verbunden. In diesen ist ein kurzer Tubus r_2 eingeschoben, an dem der eine Quarzkeil k_1 festsitzt; dieser Tubus trägt einen kleinen Hebel h, der den feststehenden Rohransatz in einer spaltförmigen Oeffnung o durchsetzt. Der Hebel kann durch zwei an dem Gehäuse montirte feine Stellschrauben S um kleine Winkel gedreht werden. In den Tubus r_2 wird ein dritter r_3 eingeschoben, der den zweiten Quarzkeil k_2 trägt; r_3 kann in r_2 gedreht werden und durch die Schraube s in einer gewünschten Lage in r_2 festgestellt werden.

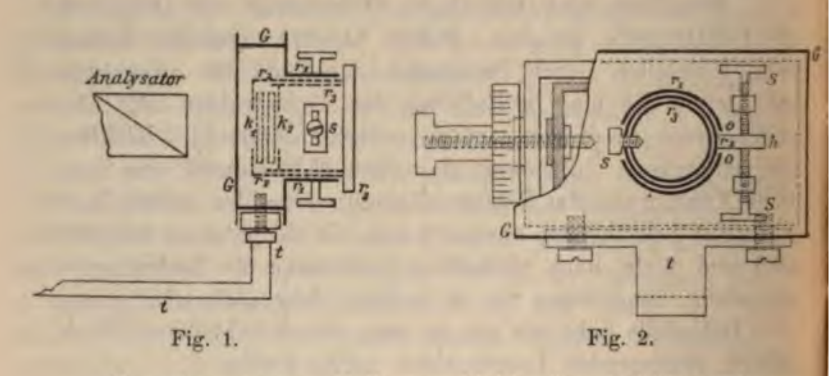


Fig. 1. Fig. 2.

Vor dem ersten Keil verschiebt eine Schlittenführung einen Rahmen, an dem die Signalmarke (Fadenkreuz oder besser zwei Parallelfäden) festsitzt. Eine auf der Schraubenaxe befestigte Trommel zählt die Bruchtheile einer Umdrehung, während die ganzen Umdrehungen an einer Theilung oben am Gehäuse in üblicher Weise abgelesen werden.

Das Gehäuse kann durch einen Träger t mit dem beweglichen Arm des Spectrometers verbunden werden, sodass die Mitte der Quarzkeile sich vor der Mitte des Analysators befindet.

Die *Justirung* des Instrumentes ist eine sehr einfache und sichere. Nachdem die Polarisationsebene im Polarisatior $\perp$ zur Einfallsebene gestellt und das Beobachtungsrohr auf den Spalt gerichtet ist, wird der Analysator gekreuzt und der Compensator angeschraubt. Der zweite Tubus wird ausgezogen und am ersten solange gedreht, bis Dunkelheit eintritt. Dann

wird der dritte Tubus eingeschoben und wieder solange gedreht, bis Dunkelheit eintritt, worauf die Schraube *s* anzogen wird. Die Hauptschnitte der Quarzkeile sind jetzt für alle Fälle richtig gegen einander orientirt. Sollte die Orientirung gegen die Einfallsebene durch Abnehmen des Compensators kleine Aenderungen erfahren, so lässt sich durch Lösen der Stellschrauben *S* leicht die richtige Einstellung wieder hervorrufen.

Zur Erreichung der grössten Genauigkeit müssen diese Einstellungen mit Sonnen- oder electrischem Lichte ausgeführt werden.

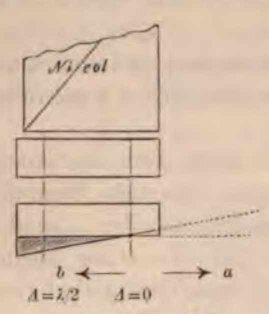
Die Wahl der Grösse der Keilwinkel hängt von der Grösse der Nicols ab. Es ist nothwendig, dass man den Weg des Streifens von der Stellung, wo die Phasendifferenz der $\perp$ und $\|$ zur Einfallsebene polarisirten Componenten $\Delta = o$ ist bis zu der, wo $\Delta = {}^1/_2\,\lambda$ ist, verfolgen kann. Diese Verschiebung ist nothwendig und hinreichend, indem man bei Messungen von Phasenänderungen, die $\lambda/_2$ überschreiten, durch Drehen der Nicols um 90° bis zu beliebigen Vielfachen von $\lambda/_2$ — wenigstens bei durch farbige Gläser nahezu homogen gemachtem Lichte — gelangen kann. Bei dem für das hiesige Laboratorium angefertigten Instrumente beträgt der Keilwinkel 30′. Der zweite Keil ist durch eine planparallele Platte ersetzt, um die Grösse der Verschiebung und somit die Genauigkeit zu erhöhen. Die Fläche der geraden Nicols am Apparat beträgt 11×11 mm.

Für das genannte Instrument entsprechen der Verzögerung $= \lambda$: ca. 3000 τ (Trommeltheile), und die grössten Abweichungen zweier Zahlen in dem gleichen Beobachtungssatze erreichen nicht 20 τ. Die grössten bei ungünstiger Beobachtung vorkommenden Abweichungen der Messung bleiben also unter 0,009 λ, eine Grösse, die bei den Einstellungen in den Compensatoren üblicher Construction auch gefunden wird [1]), dabei ist das Resultat hier aber frei von jedem Fehler, der durch falsche Orientirung entsteht.

Die beschriebene Construction lässt nur eine Compensation der Beschleunigung oder Verzögerung zu. Der zur Compen-

1) K. E. F. Schmidt, Zeitschr. f. Instrum.-Kunde p. 443. 1891.

sation dienende Theil ist die keilförmige Schicht, um welche das Prisma die Planplatte an Dicke übertrifft, es genügt also diese allein zu betrachten. Ist die Prismenkante || der optischen Axe, so wird bei Beschleunigung der ⊥ gegen die || Componente der Streif nach *a* rücken, bei Verzögerung nach *b*, nur letztere Verschiebung lässt sich verfolgen, da bei der Verschiebung in Richtung *a* der Interferenzstreifen bald an die Grenze des Gesichtsfeldes gelangt; ist die optische Axe ⊥ zur Prismenkante, so findet das umgekehrte statt. Man kann jedoch mit jedem der Instrumente sowohl Beschleunigungen wie Verzögerungen messen. Ist der Compensator, wie im ersten Falle, auf Compensation der Verzögerung gebaut, so hat man zur Messung von Verzögerungen die Nicols so zu stellen, dass zunächst der der Phasendifferenz 0 entsprechende Streif im Gesichtsfeld erscheint. Um Beschleunigungen zu messen, würde das eine Nicol um 90° gedreht werden müssen und von der Stellung auszugehen sein, wo $\Delta = \lambda/2$ ist. Im ersten Falle compensirt man die Verzögerung, im zweiten fügt man zu der Beschleunigung noch so viel zu, dass der Unterschied wieder $\lambda/2$ beträgt.



Es ist noch zu erwähnen, dass bei dem angegebenen Keilwinkel die Streifen nur mit schwachen Vergrösserungen zu betrachten sind. Ich ersetzte mit gutem Erfolg das Ocular des Beobachtungsrohres durch eine Blende mit einer kleinen runden Oeffnung und beobachte ohne jede Vergrösserung.

Der Compensator erfordert natürlich eine gleichmässige Beleuchtung über die ganze Strecke, längs der die Verschiebung erfolgt.

Halle a. S., Phys. Laboratorium, Januar 1892.

IV. *Bemerkung zur Abhandlung des Hrn. Waitz ber die Messung der Fortpflanzungsgeschwindig- eit electrischer Wellen in verschiedenen Dielectricis*[1]*; von L. Arons und H. Rubens.*

Hr. Waitz bespricht in einem Aufsatz „Ueber die Mes- ng der Fortpflanzungsgeschwindigkeit electrischer Wellen in rschiedenen Dielectricis" auch unsere Arbeit.[2] Er schreibt 528):

„Es wurde bei diesen Beobachtungen aber nicht der ganze f einer Seite der Zuleitungsstelle gelegene Theil des Drahtes ein anderes Medium als Luft gebracht, sondern von der ien Schmalseite des Rechtecks war nur ein Stück Draht rch das andere Medium geführt, und dies Drahtstück lag ch der Versuchsanordnung und, wie auch directe Beobach- ng zeigte, in der Nähe eines Schwingungsknotens des Systems. n hatten sich mir aber bei ähnlichen, schon vor dem Er- heinen der Arbeit der Herren Arons und Rubens ange- llten Versuchen Differenzen gegen das Maxwell'sche Gesetz geben und bei Verfolgung der Beobachtungen hatte sich zeigt, wie aus dem Nachfolgenden hervorgeht, dass diese dingt seien durch die relative Lage des mit Flüssigkeit ngebenen Drahtstückes gegen die Schwingungsknoten und uche. Es erklärt sich dann die Uebereinstimmung der obachtungsresultate der Herren Arons und Rubens mit axwell's Gesetz wahrscheinlich aus dem Umstande, dass e von ihnen untersuchte Strecke der Welle in der Nähe ies Schwingungsknotens gelegen war."

Hr. Waitz behauptet vor allen Dingen, wir würden andere rsuchsergebnisse erhalten haben, wenn wir den Wechsel des electricums an anderen Stellen als an den Knotenpunkten rgenommen hätten. Wir haben uns selbstverständlich davon erzeugt, dass wir *keine* andere Lage des Indifferenzpunktes

---

1) Waitz, Wied. Ann. **44.** p. 527. 1891.

2) Arons u. Rubens, Wied. Ann. **42.** p. 581. 1891.

erhielten, wenn wir den Kasten an verschiedenen Stellen der Leitung anbrachten; nur wurde der Abfall zum Minimum schwächer, wenn wir uns den Enden der Drahtleitung näherten. Natürlich beschränkten wir uns für die definitiven Messungen auf diejenige Stellung, bei welcher das Minimum am schärfsten ausgeprägt war, das Resultat also am leichtesten mit grosser Genauigkeit erhalten werden konnte.

Es ist uns unmöglich, über die Bedeutung der von Hrn. Waitz erhaltenen Werthe ein Urtheil abzugeben. Scheinbar ganz unbedeutende Umstände können die Versuchsresultate erheblich beeinflussen. Die strengste kritische Durcharbeitung seiner Methode ist für jeden Beobachter auf diesem Gebiet unerlässlich. So musste, worauf wir erst nach längerer Zeit verfielen, bei unserer Methode z. B. vermieden werden, dass die Seiten des Vierecks über die Eckpunkte hinaus Verlängerungen besassen. Jede derartige Verlängerung konnte zu Resonanzerscheinungen Veranlassung geben, welche die messende Verfolgung des eigentlichen Vorganges vereitelten. Sodann war es nothwendig, die Stelle der Drahtleitung auf welche sich die Vergleichung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezog, völlig in Metall einzuschliessen. Nur wenn, wie wir ausdrücklich hervorheben, an dieser Stelle der ganze Schwingungsvorgang sich einmal in Luft, das andere mal im untersuchten Dielectricum abspielte, liessen sich einwurfsfreie Resultate erhalten. Hr. Waitz bemerkt selbst (p. 531) von seinen Untersuchungen sprechend: „Dagegen gaben die weiteren Gefässe überhaupt grössere Werthe der Compensationslängen, und wandte man ganz enge Glasröhren von einigen Millimeter Durchmesser an, so zeigte sich nur ein sehr geringer Einfluss der in ihnen enthaltenen Flüssigkeit auf das Fortschreiten der Welle.“ Freilich konnte Hr. Waitz bei seiner Methode keine Aenderung der Erscheinung wahrnehmen, wenn er, wie nebenbei bemerkt wird, die Holz- oder Glasgefässe durch Metallkästen oder Röhren ersetzte. Wir überzeugten uns bei unseren Versuchen davon, dass bei Benutzung eines Glaskastens statt des Blechkastens die Lage des Indifferenzpunktes eine erheblich andere war, und dass diese Verschiebung sofort ins Auge fiel, wenn man nur eine Metallhülle über den Glaskasten schob oder wieder entfernte. Die Lage des Indifferenzpunktes

XIV. *Bemerkung zur Abhandlung des Hrn. Waitz über die Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit electrischer Wellen in verschiedenen Dielectricis*[1]*; von L. Arons und H. Rubens.*

Hr. Waitz bespricht in einem Aufsatz „Ueber die Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit electrischer Wellen in verschiedenen Dielectricis“ auch unsere Arbeit.[2]) Er schreibt (p. 528):

„Es wurde bei diesen Beobachtungen aber nicht der ganze auf einer Seite der Zuleitungsstelle gelegene Theil des Drahtes in ein anderes Medium als Luft gebracht, sondern von der einen Schmalseite des Rechtecks war nur ein Stück Draht durch das andere Medium geführt, und dies Drahtstück lag nach der Versuchsanordnung und, wie auch directe Beobachtung zeigte, in der Nähe eines Schwingungsknotens des Systems. Nun hatten sich mir aber bei ähnlichen, schon vor dem Erscheinen der Arbeit der Herren Arons und Rubens angestellten Versuchen Differenzen gegen das Maxwell'sche Gesetz ergeben und bei Verfolgung der Beobachtungen hatte sich gezeigt, wie aus dem Nachfolgenden hervorgeht, dass diese bedingt seien durch die relative Lage des mit Flüssigkeit umgebenen Drahtstückes gegen die Schwingungsknoten und Bäuche. Es erklärt sich dann die Uebereinstimmung der Beobachtungsresultate der Herren Arons und Rubens mit Maxwell's Gesetz wahrscheinlich aus dem Umstande, dass die von ihnen untersuchte Strecke der Welle in der Nähe eines Schwingungsknotens gelegen war.“

Hr. Waitz behauptet vor allen Dingen, wir würden andere Versuchsergebnisse erhalten haben, wenn wir den Wechsel des Dielectricums an anderen Stellen als an den Knotenpunkten vorgenommen hätten. Wir haben uns selbstverständlich davon überzeugt, dass wir *keine* andere Lage des Indifferenzpunktes

1) Waitz, Wied. Ann. **44.** p. 527. 1891.

2) Arons u. Rubens, Wied. Ann. **42.** p. 581. 1891.

Wanddicke des Hohlcylinders leicht so berechnen, dass der an den Enden geschlossene Cylinder in einer concentrirten $CuSO_4$-Lösung schwimmt, in Wasser dagegen untersinkt; es lässt sich dann eine Concentration herstellen, in welcher der Cylinder nur eben untersinkt, mithin auf sein Axenlager fast gar keinen Druck ausübt.

Der kleine von mir benutzte Apparat bestand aus einem länglichen Glasgefäss mit viereckigem Querschnitt. Der Kupfercylinder, welcher fast die ganze Breite des Kastens ausfüllte, hatte bei einer Höhe von 4,5 cm einen Durchmesser von 10 cm. Die Wandstärke betrug etwa 1,8 mm. An den Enden war er durch eingekittete Hartgummiplatten geschlossen, durch welche die Axe, ein Glasstäbchen von 1 mm Durchmesser, nach beiden Seiten um wenige Millimeter hervorragte. Die Axenlager bestanden aus kleinen dreieckig eingefeilten Hartgummiplättchen, welche an die Wand des Glasgefässes angekittet waren. Der Cylinder drehte sich langsam und continuirlich bei Strömen von 0,1 bis 1 Ampere; die Bewegung verlangsamt sich allmählich, in erster Linie wohl dadurch, dass die Cylinderoberfläche durch die Electrolyse rauh wird; bei längerem Laufen (mehrmaliger ganzer Umdrehung) schien die Bewegung regelmässiger zu werden. Gelegentliche Versuche ergaben eine angenäherte Proportionalität der Umdrehungsgeschwindigkeit mit der Stromintensität. Genauere Versuche waren an dem vorhandenen Apparat nicht auszuführen. Möglicherweise aber könnte das Princip in der Hand eines geschickten Technikers zur Construction eines continuirlichen electrolytischen Electricitätszählers (für Gleichstrom) führen.

Berlin, Physik. Inst. d. Univ.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1892. ANNALEN № 3.
DER
PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XLV.

I. *Ueber Interferenzerscheinungen in Newton'schen Farbengläsern und anderen Linsencombinationen; von Eug. Blasius.*

(Hierzu Tafel VI Fig. 1—11.)

In den folgenden Paragraphen ist eine Reihe von Interferenzerscheinungen besprochen, welche im Newton'schen Farbenglase oder in Fernrohrobjectiven beobachtet werden können. Einige davon sind der Theorie nach bei der gewöhnlichen Anordnung der Gläser immer vorhanden, andere haben ihren Grund in besonderen Verhältnissen gewisser Linsencombinationen. Zum Theil wurden die Erscheinungen zufällig beobachtet und es musste nach einer theoretischen Erklärung derselben gesucht werden, zum Theil wurden sie auf Grund von Rechnungen gefunden und dann experimentell auf ihre Uebereinstimmung mit der Theorie geprüft.

§ 1. Ueber Differenzsysteme nach Knox und v. d. Willigen und entsprechende Summensysteme.

Knox[1]) hat durch Anwendung zweier verschiedenen dünnen Luftschichten Interferenzerscheinungen erhalten, welche, wie schon in einer früheren Arbeit[2]) erwähnt wurde, principiell für dünne Platten ganz dasselbe sind, wie die Brewster'schen Linien für dickere Platten. v. d. Willigen[3]) beobachtete im Newton'schen Farbenglase solche Streifen und gab eine sehr ausführliche Theorie derselben. Mach[4]) fand für das Princip, welches diesen Erscheinungen, wie auch den

1) J. Knox, Phil. Trans of the Roy. Soc. p. 161—181. 1815.
2) E. Blasius, Wied. Ann. **45**. p. 316. 1829.
3) S. M. v. d. Willigen, Verslagen en Mededeel d. Afd. Natuurk. **17.** Pogg. Ann. **123**. p. 558—581. 1864.
4) E. Mach, Pogg. Ann. **150**. p. 625—636. 1873.

von Stefan[1]) beschriebenen Nebenringen im Newton'schen Farbenglase zu Grunde liegt, die einfachste Form. Seiner Darstellung wollen wir uns im Folgenden anschliessen. Die Streifen, wie sie v. d. Willigen beobachtete, entstehen danach durch Interferenz von Lichtstrahlen, welche mehreremale an der dünnen Luftschicht reflectirt werden. Liegt nämlich eine planconvexe Linse von grossem Krümmungsradius auf einer undurchsichtigen ebenen Fläche mit der convexen Seite auf, so wird der Beobachter nicht nur das ursprüngliche System Newton'scher Ringe erkennen können, sondern auf seiner Seite davon noch mehrere reflectirte Bilder desselben in regelmässigem Abstande. An den Stellen nun, wo sich das erste System und das zweite schneiden, befinden sich Querstreifen, welche parallel und äquidistant sind. Ein Strahl wird an der dünnen Luftschicht in zwei getrennt, welche den Gangunterschied A haben sollen; werden diese von der oberen Seite der Linse nochmals zu der dünnen Luftschicht zurückgeworfen, so theilen sie sich wieder in je zwei Antheile, mit dem Gangunterschied B. Die Parallelstreifen sind nun zu erklären durch die Interferenz zweier Strahlenantheile vom Gangunterschied $A—B$. Wenn es Hrn. Lummer[2]) gelang, ausser dem Differenzsystem $A—B$, auch das Summensystem $A+B$ bei den von ihm angewandten dicken Platten zu erhalten, so müsste das hier erst recht möglich sein, wo die Gangunterschiede A und B so viel kleiner sind.

Wir beziehen die Interferenzcurven auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt in dem Centrum M_1 der ursprünglichen Newton'schen Ringe und dessen x-Axe in der Verbindungslinie dieses Punktes mit den reflectirten Bildern M_2, M_3 ... desselben liegt. Dann werden die Newton'schen Ringe um M_1 und diejenigen um M_2, wenn die Entfernung $M_1 M_2 = a$ ist, durch die Gleichungen:

(I) $$x^2 + y^2 = r_1^2 \quad \text{und}$$

(II) $$(x-a)^2 + y^2 = r_2^2$$

dargestellt. Dabei stehen die Radien der Ringe (r_1 und r_2)

1) J. Stefan, Pogg. Ann. **123.** p. 650—653. 1864. u. **125.** p. 160 bis 162. 1865.

2) O. Lummer, Wied. Ann. **24.** p. 417—439. 1885.



mit der Dicke der Luftschicht an den betreffenden Stellen, d_1, bez. d_2 oder den Gangunterschieden $\varDelta_1 = 2d_1$, $\varDelta_2 = 2d_2$ und dem Krümmungsradius der Linse R_1 in der Beziehung:

$$r_1^2 = 2d_1 R_1 = \varDelta_1 R_1$$
$$r_2^2 = 2d_2 R_1 = \varDelta_2 R_1$$

oder, wenn wir der grösseren Allgemeinheit halber annehmen, dass die Strahlen das zweitemal nicht in demselben Newton'schen Glase reflectirt, sondern auf ein anderes geworfen werden, dessen Krümmungsradius R_2 ist:

$$(1) \qquad \begin{cases} r_1^2 = 2d_1 R_1 = \varDelta_1 R_1 \\ r_2^2 = 2d_2 R_2 = \varDelta_2 R_2. \end{cases}$$

Eine Linie des Differenzsystemes ist durch die Bedingung:

$$\varDelta_d = \varDelta_1 - \varDelta_2 = \text{const.},$$

eine Linie des Summensystems durch die Bedingung:

$$\varDelta_s = \varDelta_1 + \varDelta_2 = \text{const.}$$

bestimmt. Multiplicirt man die Gleichung (I) mit R_2, (II) mit R_1 und setzt in dieselben die Werthe für r_1 und r_2 aus (1) ein, so erhält man durch Addition, bez. Subtraction der beiden so gewonnenen Gleichungen:

$$\text{(III)} \qquad x^2 - \frac{2aR_1}{R_1 + R_2}x + y^2 - aR_2 = \varDelta_s \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

und

$$\text{(IV)} \qquad x^2 + \frac{2aR_1}{R_2 + R_1}x + y^2 + aR_2 = \varDelta_d \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Sowohl das Differenzsystem, wie das Summensystem, besteht hiernach aus concentrischen Kreisen.

Für den Specialfall, dass $R_1 = R_2 = R$ ist, kann das Multipliciren der Gleichungen (I) und (II) mit R_2 und R_1 unterbleiben und man findet durch Addition und Subtraction:

$$\text{(IIIa)} \qquad x^2 - ax + y^2 = \frac{\varDelta_s}{2}R - \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{(IVa)} \qquad 2ax - \varDelta_d R - a^2 = 0.$$

Mit diesen Gleichungen hat man es bei der gewöhnlichen Darstellungsweise der Newton'schen Ringe zu thun. Das Differenzsystem D_1 (Gleichung IVa) besteht aus äquidistanten. der y-Axe parallelen Linien. Diejenige darunter, welche für alle Farben dem Gangunterschiede $\varDelta_d = 0$ entspricht, halbirt

die Strecke zwischen den Mittelpunkten M_1 und M_2 der Newton'schen Ringsysteme. Im Gegensatz zum Differenzsystem sind die Linien des Summensystems (S_1) auch in diesem besonderen Falle Kreise. Ihr gemeinsamer Mittelpunkt liegt ebenfalls in der Mitte zwischen den Mittelpunkten der Newton'schen Kreise, und ihre Gleichung wird, wenn wir das Coordinatensystem sich selbst parallel verschieben, sodass der Anfangspunkt in den Mittelpunkt des Systems fällt:

$$x^2 + y^2 = \frac{\Delta_s}{2} R - \frac{a^2}{4}.$$

Das Quadrat des Radius r_s dieser Ringe ist demnach:

$$r_s^2 = \Delta_s \frac{R}{2} - \frac{a^2}{4},$$

der Gangunterschied Δ_s' im Centrum des Systems, also für $r_s = 0$

$$\Delta_s' = \frac{a^2}{2R}.$$

Wie man auch durch andere Ueberlegung leicht einsieht, haben wir es daher mit Ringen um so höherer Ordnung zu thun, je grösser der Abstand der beiden Newton'schen Systeme und je kleiner R, also je enger die Newton'schen Ringe sind. Das Gesetz, nach welchem die Ringe bei den letzteren aufeinander folgen ist:

$$r^2 = \Delta R.$$

Trennt man die Linse ein wenig von ihrer Unterlage, so ziehen sich bekanntlich die Newton'schen Ringe im Innern zusammen, und die Abhängigkeit ihrer Radien von den betreffenden Gangunterschieden, sowie dem Gangunterschiede Δ_1 in der Mitte, drückt sich dann aus in der Formel:

$$r^2 = (\Delta - \Delta_1) R = \Delta R - \Delta_1 R.$$

Man erkennt ohne weiteres, dass dies dieselbe Beziehung ist, wie die, welche eben für das Summensystem abgeleitet wurde. Es muss also das Summensystem, was die Aufeinanderfolge der Ringe anlangt, ganz genau so aussehen wie ein Newton'sches Ringsystem in einer Gläsercombination, deren Linse einen Krümmungsradius $R/2$ hat und soweit von der Unterlage abgehoben ist, dass der Gangunterschied in der Mitte $= a^2/2R$ ist.



Die Summen- und Differenzsysteme greifen ineinander ein, vollkommen wie die Summen- und Differenzsysteme bei den dicken Platten. Sind Δ_1 und Δ_2 die Gangunterschiede für die beiden Newton'schen Ringsysteme und $\Delta_1 = m_1 (\lambda / 2)$, $\Delta_2 = m_2 (\lambda / 2)$ so sind die Gangunterschiede für das Summen-bez. das Differenzsystem:

$$\Delta_s = \Delta_1 + \Delta_2 = (m_1 + m_2) \frac{\lambda}{2},$$

$$\Delta_d = \Delta_1 - \Delta_2 = (m_1 - m_2) \frac{\lambda}{2}.$$

Für die hellen Linien der Newton'schen Ringe müssen m_1 und m_2 gerade Zahlen sein, für die dunkeln Linien ungerade. Sind m_1 und m_2 entweder beide gerade oder beide ungerade, so ist sowohl ihre Summe wie ihre Differenz gerade, d. h. die hellen Streifen des Summen- und des Differenzsystems gehen durch die Schnittpunkte der hellen Linien des einen Newton'schen Systems mit den hellen Linien des anderen und der dunkeln des einen mit den dunkeln des anderen; sie sind also nicht continuirlich, sondern aus abwechselnd hellen und dunkleren Stellen zusammengesetzt. Ungerade Werthe von $m_1 + m_2$ und $m_1 - m_2$ ergeben sich, wenn von den Summanden der eine gerade, der andere ungerade ist. Die dunkeln Linien des Summen- und des Differenzsystems werden also durch die Schnitte der hellen Ringe des einen Newton'schen Systems mit den dunkeln des anderen gehen, sind continuirlich, können aber nicht ganz schwarz sein. Die Figur, welche Mascart[1]) p. 134 gibt, stellt die Differenzstreifen dar, in Fig. 1 sind die Summenlinien hinzugefügt, M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Newton'schen Ringe. Die Figur stellt die wirklichen Verhältnisse aber nur dar, wenn wir sie uns in der Richtung $M_1 M_2$ verkürzt denken, weil man bei schiefer Incidenz weder die Newton'schen Ringe noch das Summensystem als Kreissystem, sondern als Ellipsensystem sieht, während bei senkrechter Incidenz M_1 mit M_2 zusammenfallen würde.

Bei diffusem Tageslicht sowohl, wie bei dem Lichte gewöhnlicher Lampen, kann man die Linien des Summensystems erkennen, wenn man sich des von Herschel[2]) und Knox

1) **Mascart**, Ann. d. Chim. et de Phys. (4) **23.** p. 116—156. 1871.
2) **J. Herschel**, Phil. Trans. p. 180. 1807; p. 259. 1809; p. 149. 1810.

angewandten Mittels bedient, nämlich überflüssiges Licht abblendet. Wie die Ringe der verschiedenen Systeme ineinandergreifen, erkennt man am besten bei homogenem Licht, und da die Orte der Ringe des Summensystems durch die Ringe der Newton'schen Systeme, wie durch ein höheres Coordinatensystem sich bestimmen, so hat man keine Messungen nöthig, um die Uebereinstimmung von Theorie und Beobachtung festzustellen.

Die Summensysteme bieten der Beobachtung im allgemeinen viel weniger Interesse als die Differenzsysteme und sind auch nicht so auffallend, weil sie auf den Raum beschränkt sind, wo die Farben der Newton'schen Ringe vorherrschen, während es für die Differenzsysteme ja gerade charakteristisch ist, dass sie auch an Stellen sichtbar sind, wo die Farben der Systeme, aus welchen man sie construiren kann, schon lange in Weiss höherer Ordnung übergegangen sind. Da es nicht mit jeder Linsencombination möglich ist, sich von dem Vorhandensein des Summensystems zu überzeugen, so mag erwähnt werden, dass es in gewissen Newton'schen Gläsern so deutlich ist, dass es Anderen auffiel, denen nur die Art der Abblendung gezeigt wurde, obwohl sie von der Existenz der Linien keine Kenntniss hatten.

Bei dieser Gelegenheit mag auf zwei Umstände aufmerksam gemacht werden, die zu Täuschungen Anlass geben können. Erstens erhält man, wenn man mehrere Systeme von regelmässigen Linien übereinanderlegt, zuweilen den Eindruck von secundären Systemen aus rein geometrischen Gründen. Solche Curven beobachtet man beispielsweise, wenn man durch zwei hintereinander befindliche Drahtnetze sieht. Zaungitter zeigen oft ähnliche Erscheinungen. Aber auch auf Zeichnungen kann man unter Umständen derartige Systeme entdecken, die nicht in der Absicht des Zeichners gelegen haben. So sehe ich auf der Figur von Mascart (p. 134) seitlich von A und B Kreissysteme, deren Mittelpunkt auf derselben Höhe wie A und B und in der Entfernung AB rechts von B und links von A zu liegen scheinen. Es ist daher in manchen Fällen speciell bei Summensystemen der Nachweis nothwendig, dass wirklich Interferenzen der Erscheinung zu Grunde liegen. Ein anderer Grund zu Täuschungen kann namentlich bei dün-

nen Glasplatten vorkommen. Sind die Ränder solcher Platten glatt, so wie sie beim gewöhnlichen Bruch entstehen, so sieht man in Folge vielfacher Reflexionen an den beiden Flächen der Platten zahlreiche Linien, die besonders bei homogenem Lichte den Eindruck von Interferenzlinien hervorbringen können. Bei gewöhnlichem Lichte wird man stutzig werden, wenn man sieht, dass die Linien so viel zahlreicher sind, als man sie sonst ohne Anwendung besonderer Mittel bei Interferenzerscheinungen wahrnimmt. Knox scheint allerdings, trotzdem er kein homogenes Licht anwandte, in einem Falle (Exp. 16 bis 18) diese zahlreichen Linien gesehen zu haben. Dass er sich über ihre Erklärung nicht äussert, ist weniger auffallend, als die Art, wie er ohne jede theoretische Grundlage und zum Theil auf falsche Schlüsse hin richtig experimentirte.

Untersucht man bei der gewöhnlichen Zusammenstellung der Newton'schen Gläser Erscheinungen von der Art der Summen- und Differenzsysteme, so hat man meist Erscheinungen zu trennen, die von Reflexionen an der Aussenseite des oberen Glases und solche die von Reflexionen an der Aussenseite des unteren Glases herrühren. Die Deutung der Interferenzlinien wird einfacher, wenn man wie oben Verwechselungen dadurch vermeidet, dass man die untere Platte der Combination von undurchsichtigem Glase wählt. Ausser den schon erwähnten Systemen sieht man in einer solchen Combination noch ein System von Querlinien D', welches viel enger als das erste Differenzsystem ist, diesem parallel läuft und durch das Centrum M_2 des einmal reflectirten Newton'schen Systemes geht. Man erkennt leicht in diesen Linien das Differenzsystem zwischen dem um M_1 liegenden ursprünglichen und dem um M_3 liegenden zweimal reflectirten Newton'schen System. Der Abstand von M_3 und M_2 ist derselbe (a), wie zwischen M_2 und M_1. Der Mittelstreifen des neuen Differenzsystems muss also, weil er den Abstand zwischen den Systemen M_1 und M_3 halbirt durch das Centrum M_2 gehen. Der Abstand der Streifen ist, wie sich aus (IVa) ergibt, ceteris paribus umgekehrt proportional dem Abstande der betreffenden Newton'schen Systeme, also in unserem Falle halb so gross, wie der Abstand der Differenzstreifen, welche aus der Combination der Newton'schen Ringe mit ihrem ersten Bilde

oder des ersten Bildes mit dem zweiten entstehen. Das System ist eines von denen, welche leichter in gemischtem, als in homogenem Lichte zu beobachten sind, auch ist es wie bei den meisten der hier behandelten Erscheinungen nothwendig, überflüssiges Licht, wie Herschel und Knox es thaten, abzublenden. Der Gang der zur Interferenz kommenden Strahlen ist Fig. 2 Taf. VI $ABCDEF$ und $AB_1\,C_1\,D_1\,E_1\,F$. Die bei den Versuchen benutzte Linse hatte einen Krümmungsradius von ca. 6 m und eine Dicke von 6,53 mm; letztere kommt bei der Bestimmung von a in Betracht.

§ 2. Ueber die von Brewster in Fernrohrobjectiven gefundenen Linien und ähnliche Linien.

Brewster hatte die nach ihm benannten Linien in zwei planparallelen Platten von gleicher Dicke im Jahre 1817 gefunden, er vermuthete darauf, dass auch Linsencombinationen zu ähnlichen Erscheinungen Anlass geben könnten, und fand in der That im Jahre 1822 farbige Linien in einem achromatischen Fernrohrobjectiv von Berge. Da er dann seine Beobachtungsmethode wieder vergass, so gelang es ihm erst viel später [1]), nach grösseren Schwierigkeiten, die Versuche zu wiederholen und an einigen anderen achromatischen Fernrohrobjectiven zu bestätigen. Die Erscheinungen, welche er beschreibt sind folgende. Liegt Fig. 3 Taf. VI das Auge des Beobachters E in der optischen Axe der Linsencombination, ist S ein kleines Licht, $ABCD$ das Objectiv und G ein kleiner Schirm, der das Auge vor den directen Strahlen der Flamme schützt, so sind die Interferenzlinien, entsprechend der allseitigen Symmetrie um die optische Axe des Systems Kreise. Die inneren und äusseren Linien sind nach den Beobachtungen Brewster's farbig, dazwischen liegen achromatische Kreise.[2]) Neigt man das System, sodass das Licht nicht mehr annähernd in der Richtung der Axe auffällt, so verändert sich die Form der Linien und man beobachtet Curven, wie die in Fig. 4 Taf. V dargestellten. Da die Linsen der Fernrohrobjective

1) Sir D. Brewster, Transactions of the Royal Society of Edinburgh **12.** p. 191—196. (Read Jan. 2. 1832.) 1834. Abdruck Phil. Mag. (3) **1.** p. 19—23. 1832; vgl. auch Brewster, A Treatise on Optics p. 133—135. 1853.

2) Bei genauer Justirung müsste das Centrum farblos sein.

wegen ihrer immerhin beträchtlichen Krümmung nicht wie die Planplatten an benachbarten Stellen gleiche Dicke besitzen, so kann allerdings der Fall leicht vorkommen, dass an irgend einem Punkte die optische Weglänge in der convexen Linse dieselbe ist, wie diejenige in der concaven. Eine Interferenzerscheinung, welche sich in gewöhnlichem Lichte über die ganze Linsenoberfläche erstreckt, verlangt aber überall so genau abgepasste Dickenverhältnisse, dass man von vornherein nicht geneigt sein wird, die von Brewster in den Fernrohrobjectiven beobachteten Linien durch gleiche Dicke der beiden Linsen zu erklären. Daher mag es kommen, dass der Grund der Erscheinung nicht aufgeklärt wurde, und dass die Linien später zu Farbenerscheinungen dünner Blättchen gerechnet wurden. Hat man einmal die Erscheinung, welche Brewster beschreibt, gesehen, so ist es nicht schwer dieselben in den verschiedensten Combinationen wieder zu finden. Die besonders charakteristische Form der Linien, die durch Fig. 4 dargestellt wird, kann man ganz ausgezeichnet in Combinationen sehen, welche aus den dünnen, als Brillengläser gebräuchlichen Linsen zusammengesetzt sind. Bei der Untersuchung der Linien war mir eine Sammlung derartiger Gläser, wie sie für Aerzte und Optiker im Brillenkasten zusammengestellt ist, sehr nützlich. Man erhält die Linien, indem man eine biconcave Linse des Brillenkastens mit einer biconvexen von höherer Nummer, also schwächerer Krümmung combinirt. Dabei zeigt sich, dass die Linien durchaus nicht an bestimmte Combinationen gebunden sind, sondern dass ein und dieselbe biconcave Linse mit einer ganzen Folge von biconvexen, und eine biconvexe mit einer ganzen Reihe von biconcaven die charakteristische Form der Linien erkennen lässt. Dies Alles bei Anwendung einer gewöhnlichen Gas- oder Petroleumlampe, sowohl als bei homogenem Lichte. Die Combinationen, von denen Brewster spricht und die eben erwähnten, allgemein solche, deren biconcave Linse stärker gekrümmt ist, als die biconvexe, sind aber auffallenderweise nicht die einzigen, welche zu der sonderbaren Form von Interferenzlinien Anlass geben. Auch ganze Reihen von anderen Combinationen, bei denen die convexe Linse stärker gekrümmt ist als die concave, zeigen dieselbe charakteristische Form der farbigen Streifen. Ich

fand diese Erscheinung zuerst in einigen losen Fraunhofer'schen Objectiven, welche ich der Güte der Herren Reinfelder und Hertel in München verdanke. Die Gläser gaben in gewöhnlichem Lichte beim Aneinanderpressen der Linsen, grosse schön ausgebildete Newton'sche Ringe und daneben Streifen von der Form, die Brewster beschrieb. Mit Hülfe der Linsen des Brillenkastens konnte festgestellt werden, dass die Erscheinung bei Combinationen der angegebenen Art ganz gewöhnlich ist und, dass bei solchen eine Linse, mag sie biconvex oder biconcav sein, mit einer ganzen Reihe von andersartigen, die Erscheinung gibt. Knox beschreibt einen Versuch mit einer solchen Combination, bei welchem er möglicherweise, wenn auch nicht gerade wahrscheinlicherweise, die Form dieser Linien schon gesehen hat. Die Krümmung der Linien, von der er spricht, ist jedenfalls nicht so eigenartig, wie dass sie sich theilweise zu geschlossenen Curven zusammenziehen. Sollte er letzteres mit seiner Bemerkung über die elliptischen Formen gemeint haben, so hatte er auch diese Linien vor Brewster entdeckt.[1])

Da namentlich die Breite der Streifen die Möglichkeit ausschliesst, sie durch die gleiche Dicke der beiden Linsen zu erklären, könnte man zunächst daran denken, dass sie durch die dünne Luftschicht zwischen den Gläsern hervorgebracht würden, also nur eine modificirte Form der Newton'schen Ringe wären. Bei der zweiten Art der Linsencombinationen ist diese Annahme schon deshalb unmöglich, weil die Newton'schen Ringe gleich in gewöhnlichem Lichte neben den anderen auftreten und zwar ohne erhebliche Abweichungen von ihrer gewöhnlichen Gestalt. Aber auch für die Combinationen von der Art der Brewster'schen reicht die Erklärung nicht aus, denn einerseits könnten die Linien sich nur an ganz be-

1) l. c. Exp. 4. Another mode of producing those fringes was by applying a convex and a concave lens together, the curvature of the one differing but little from that of the other. This apparatus produced a larger set of primary rings and consequently broader fringes, than by either of the foregoing experiments; but in this case none of them were straight except the central fringe, all the rest being bent more or less in elliptical shapes, conformable to the surfaces between which they were formed.

schränkten Theilen der Combination vorfinden, weil die Luftschicht an den meisten Stellen durchaus nicht dünn genug ist, um kleine Gangunterschiede der interferirenden Strahlen zu bewirken; andererseits kann man in homogenem Lichte auch hier die Form der Interferenzlinien der dünnen Luftschicht beobachten, und diese ist, wie man es erwarten musste, nahezu kreisförmig, bezw. bei schief einfallendem Lichte elliptisch, ganz ähnlich den gewöhnlichen Newton'schen Ringen. Da die Dicke der Luftschicht nach dem Centrum zunimmt, so liegen hier die Ringe höherer Ordnung innen.

Ein dritter Versuch zur Erklärung der Streifen, und wie sich herausstellt der richtige, liegt in der Annahme, dass wir es zwar mit Brewster'schen Linien zu thun haben, aber mit solchen, welche dadurch entstehen, dass die eine Linse oder die Zwischenschicht von Luft die Rolle der beiden gleich dicken Platten übernimmt. Eine der Linsenoberflächen dient dann nur als Spiegel, welcher das Licht, nachdem es die Schicht von Glas oder Luft passirt hat, noch einmal auf dieselbe unter nahe gleichem Winkel zurückwirft. Nach dieser Erklärungsweise, wonach die Streifen von derselben Art sind, wie die durch v. d. Willigen untersuchten, brauchen die beiden Linsen an keiner Stelle gleich dick zu sein.

Beim Aufsuchen der Linien in dem Falle, dass die Convexlinse stärker gekrümmt ist, als die concave, schienen dieselben durch andere Reflexionen zu entstehen, wie im anderen Falle. Um dies genauer zu untersuchen, wurde die eine Hälfte der unteren Fläche einer biconcaven Linse mit Asphaltlack bestrichen und dadurch die Intensität des von den lackirten Theilen reflectirten Lichtes bedeutend geschwächt. Wurde nun eine stärker gekrümmte Biconvexlinse aufgelegt, so waren die Streifen vorzugsweise da zu sehen, wo die untere Linse nicht überzogen war, und nur sehr schwach an den lackirten Theilen. Also ist in diesem Falle das Zustandekommen der Linien von der Reflexion der untersten Fläche der unteren concaven Linse abhängig. In gleicher Weise verhielten sich die Fraunhofer'schen Objective, wenn die untere Fläche der biconcaven Linse zum Theile lackirt wurde. Wir werden daher zu der Annahme geführt, dass die Streifen in diesen Fällen durch Interferenz von Strahlen entstehen, welche wie

$ABCD$ und AB_1C_1D Fig. 5, Taf. VI verlaufen. Die Streifen müssen ein Differenzsystem zwischen den Newton'schen Ringen und ihrem in der untersten Fläche der Combination reflectirten Bilde darstellen. In der That kann man in den nichtlackirten Theilen deutlich das Newton'sche System und sein reflectirtes Bild erkennen (an den lackirten Theilen ist letzteres natürlich sehr geschwächt) und zugleich sehen, wie sich diese beiden Systeme nach den in § 1 dargelegten Grundsätzen in den Linien des neuen Systemes schneiden. Auch an den lackirten Stellen sieht man übrigens ausser den Newton'schen Ringen reflectirte Bilder derselben, die aber von Reflexionen an der obersten Fläche der Convexlinse herrühren und mit den Newton'schen Ringen zu Differenzstreifen von der gewöhnlichen Form Anlass geben.

Wurde nun auf dieselbe biconcave Linse statt der stärker gekrümmten eine schwächer gekrümmte biconvexe Linse gelegt, so waren die Streifen von der charakteristischen Form, mit den zum Theile geschlossenen Curven, an den lackirten Stellen womöglich besser zu erkennen, als an den nichtlackirten. Der Gang der Lichtstrahlen, welche zur Interferenz kommen, muss also der in Fig. 6, Taf. VI durch $ABCD$ und AB_1C_1D dargestellte sein, d. h. dieselbe Interferenz, welche im obigen Falle die Streifen von der gewöhnlichen Form erzeugte, ruft hier die von Brewster beobachteten Linienzüge hervor. Der Zusammenhang der Curven mit den Newton'schen Ringen konnte, weil letztere selbst bei derartigen Combinationen wegen der grossen Gangunterschiede nicht so scharf sind, wie bei den anderen Combinationen, noch nicht nachgewiesen werden. Die Entwickelungen v. d. Willigen's müssten, wenn sie ohne Beschränkung durchgeführt werden, von der Form der Curven in den erwähnten Fällen Rechenschaft geben. Ich habe sie jedoch noch nicht so gestalten können, dass die Resultate übersichtlich sind, und begnüge mich daher mit dem experimentellen Nachweis, dass die Beobachtungen wenigstens für die Fraunhofer'schen Objective und die ähnlich zusammengesetzten Combinationen die erwähnte Beziehung der Systeme mit den Newton'schen ergeben.

§ 3. Ueber die auf Grund der Poisson'schen Interferenzen zu erklärenden Streifen.

Eine Linsencombination, welche Hrn. Höhl im physikalischen Institute des Polytechnikums in München dazu gedient hatte, die Theorie der Newton'schen Ringe bei durchfallendem Lichte, welche Hr. Gumlich[1]) ausgearbeitet hat, zu verifiziren, liess ausser den verschiedenen reflectirten Bildern der Newton'schen Ringe und den Differenz- und Summensystemen, wie sie in § 1 beschrieben sind, eine ganze Reihe von Interferenzerscheinungen erkennen, die wie die Summensysteme noch nicht beobachtet, aber sehr viel schwieriger zu erklären sind. Von den Gläsern der Combination war das eine planparallel, das andere planconvex, und der Krümmungsradius des letzteren beträgt nach Messungen des Hrn. Höhl 6,2 m.

Bei diffusem Himmelslicht erkennt man an der Stelle, wo sich aus den beiden ersten Newton'schen Ringsystemen M_1 und M_2 die Differenz- und Summensysteme entwickeln, parallele Linienzüge, welche sich ähnlich wie die Differenzsysteme hauptsächlich nach den beiden Seiten erstrecken, die aber nicht wie die Differenzsysteme angenähert geradlinig, sondern gekrümmt sind. Der Sinn der Krümmung stimmt bei dem einen Liniensystem mit dem Sinn der Krümmung bei den ursprünglichen Newton'schen Ringen, bei dem anderen mit dem Sinn der Krümmung bei den einmal reflectirten Newton'schen Ringen an den betreffenden Stellen überein. Die Stärke der Krümmung ist in beiden Fällen dieselbe, so dass die beiden Liniensysteme gegen eine Querlinie, und zwar ungefähr gegen den mittelsten Differenzstreifen symmetrisch zu liegen scheinen, ebenso wie das ursprüngliche und das einmal reflectirte System Newton'scher Ringe. Dabei ist die Krümmung bedeutend geringer als die der Newton'schen Ringe an derselben Stelle, so dass die Systeme sich seitlich in dem Raum zwischen den Newton'schen Ringen und dem Differenzsysteme befinden (k_1 und k_2 Fig. 1 Taf. VI). Um die Ringe zu sehen blendet man wie Herschel und Knox es thaten, das unnöthige Licht ab, und zwar so-

---

1) Gumlich, Wied. Ann. **34.** p. 827. 1888.

wohl das von der obersten, wie das von den mittleren Flächen kommende, so dass man im zweiten Schatten beobachtet und die Newton'schen Ringe bei durchfallendem Lichte sieht. Man erkennt dann, dass die Streifen enger sind, als die des Differenzsystemes.

Während die Linien in der betreffenden Linsencombination bei diffusem Tageslicht immerhin sehr deutlich sind, bin ich nicht sicher, dass man sie bei Natriumlicht darin erkennen kann. Dies erklärt sich wohl daraus, dass in gemischtem Lichte an den seitlichen Stellen, wo man das neue Streifensystem sieht, die anderen, Newton'schen Ringe sowohl wie die Differenzlinien fehlen, während bei Anwendung von homogenem Lichte das ganze Gesichtsfeld auf der Combination von den verschiedensten Streifensystemen angefüllt ist. Indess sind die Linien dieser Art, wie ich mich bei anderen Combinationen überzeugte, unter Umständen auch recht gut bei Natriumlicht zu erkennen.

In der erwähnten Combination von Gläsern entstehen, wie wir im Folgenden darthun werden, Interferenzerscheinungen, die sich durch die annähernd gleiche Dicke der Gläser erklären. Zu dieser Klasse von Linien gehören die beschriebenen indessen nicht, denn legt man auf eine plangeschliffene Platte von undurchsichtigem Glase eine planconvexe Linse von der Krümmung der erwähnten und von der Dicke 6,53 mm, so erhält man sehr schön in Lampenlicht, sowohl wie in diffusem Tageslicht und bei Abblendung im zweiten Schatten Linien von der Lage und Form der beschriebenen. Diese Linien entstehen aus den Newton'schen Ringen des reflectirten Lichtes ebenso wie die vorigen aus denen des durchfallenden Lichtes. Bei dieser Anordnung sind auch in Natriumlicht Streifen zu erkennen, welche sich völlig wie ein neues Newton'sches Ringsystem ausnehmen, dessen Centrum vom Beobachter aus jenseits des Mittelpunktes M_1 der Newton'schen Ringe in derselben Entfernung liegt, wie das erste reflectirte Bild von M_1 diesseits. Auch die Ringradien des neuen Systemes stimmen mit denen der Newton'schen Ringe überein, und es hat den Anschein, als ob die Linien k_1 mit Ringen desselben identisch wären.

Nach dem was pag. 390 über Möglichkeiten zur Täuschung gesagt wurde, hätten wir gerade dieses System mit Misstrauen



zu betrachten, denn es entspricht genau einem der seitlichen Systeme in der Mascart'schen Figur. Glücklicherweise kann aber die in gemischtem Lichte beobachteten Streifen, ebenso wie die Streifen von Knox ein solcher Zweifel nicht treffen — sie sind sicher als Interferenzerscheinung aufzufassen — denn aus der Uebereinanderlagerung von verschiedenem Weiss höherer Ordnung sind auf physiologischen Wege keine farbigen Streifen zu erklären. Aus demselben Grunde können die Linien nicht als Summensysteme irgendwelcher in der Combination vorhandener Systeme aufgefasst werden. Können es Differenzsysteme sein? Die Differenzsysteme der drei ersten Newton'schen Ringsysteme, nämlich des ursprünglichen und seiner zwei ersten reflectirten Bilder haben wir früher schon behandelt, und dieselben sind neben den jetzt in Frage kommenden Linien deutlich zu erkennen. Weitere Möglichkeiten ergeben sich, wenn man die Differenzsysteme zwischen den Newton'schen Ringen und ihren Differenz- und Summensystemen oder den beiden letzteren Arten allein untersucht. Man könnte daran denken, das Streifensystem aus den ursprünglichen Newton'schen Ringen und dem Differenzsystem D_2 zwischen dem einmal und dem zweimal reflectirten Newton'schen Systeme abzuleiten d. h. also aus der Interferenz von Strahlen, von denen der eine Fig. 7, Taf. VI den Weg $ABCDEG$, der andere den Weg $AB_1C_1DEF_1G$ zurücklegt. Ganz abgesehen davon, dass sich für die Streifen k_2, welche durch ihre zu D_1 symmetrische Lage auf einen ähnlichen Ursprung hinweisen, nach dieser Voraussetzung keine Erklärung finden lässt, ist diese Möglichkeit deshalb ausgeschlossen, weil der Null-Streifen des Systems nicht zwischen dem Newton'schen Ringsystem und dem einmal reflectirten Bilde liegen, sondern durch den Mittelpunkt des letzteren gehen müsste. In diesem Mittelpunkt M_2 ist nämlich die Ordnung der ursprünglichen Ringe und der zweimal reflectirten Ringe die gleiche. Da der Gangunterschied des einmal reflectirten Systemes in diesem Punkte 0 ist, so ist der Gangunterschied des Differenzsystemes D_2 gleich dem der Newton'schen Ringe, und demgemäss der Gangunterschied der neuen Streifen $= 0$.[1])

1) Die Streifen dieses Systemes habe ich bis jetzt auch noch nicht aufgefunden.

Wir können jetzt versuchen, die Summenstreifen zur Erklärung heranzuziehen. Bilden wir die Differenz zwischen der Summe der Gangunterschiede der beiden ersten Newton'schen Ringe Δ_1 und Δ_2 und der Differenz der Gangunterschiede des einmal und des zweimal reflectirten Systems Δ_2 und Δ_3, d. h. das Differenzsystem zwischen S_1 und D_2, so ist der Gangunterschied

$$\Delta = (\Delta_1 + \Delta_2) - (\Delta_3 - \Delta_2) = \Delta_1 + 2\Delta_2 - \Delta_3.$$

Das System hat also ebenfalls seinen Null-Streifen in dem Centrum des einmal reflectirten Newton'schen Systems, weil dort $\Delta_2 = 0$, $\Delta_1 - \Delta_3 = 0$ ist, entspricht also gleichfalls nicht den Bedingungen unseres Systems.

Damit sind die Combinationen der uns bekannten Systeme erschöpft, abgesehen von einigen Fällen, bei denen der Gangunterschied Null nicht vorkommt, wir müssen also andere Möglichkeiten aufsuchen.

In einer Arbeit, welche später wenig Beachtung gefunden zu haben scheint, beschreibt Jamin eine Interferenzerscheinung, welche unter gewissen Umständen mit den Newton'schen Ringen zusammen vorkommt. Er erzeugte die Newton'schen Ringe, indem er zwei Prismen aufeinanderlegte, von denen die Berührungsfläche des einen schwach convex, die des anderen eben geschliffen war. Liess er homogenes Licht nahezu unter dem Winkel der Totalreflexion auffallen, so schalteten sich zwischen und nahezu parallel den Newton'schen Ringen neue Linien ein. Jamin[1]) spricht sich, allerdings sehr vorsichtig dafür aus, die Linien durch Interferenzen von Strahlen zu erklären, deren Gangunterschied gegeneinander nicht von einem einzigen Hin- und Hergang eines Strahles in der dünnen Luftschicht, sondern von mehreren Wiederholungen dieses Weges herrührt. Dass derartige mehrfache Reflexionen bei der Theorie der Newton'schen Ringe zu berücksichtigen seien, hatte schon Poisson Fresnel gegenüber hervorgehoben. Indessen kam man damals zu dem Resultat, dass keine neuen Interferenzlinien dadurch hervorgerufen werden. Der Umstand, dass an der Grenze der totalen Reflexion die relativen Intensitäten der vielfach reflectirten Strahlen ganz andere sind, als

1) J. Jamin, Ann. d. chim. et de phys. (3) **36.** p. 158—193. 1852.

sonst, mag recht wohl, wie Jamin annimmt, der Grund zu der von ihm beobachteten Erscheinung sein. Eine Entscheidung darüber ist jedoch nicht leicht zu fällen, weil die Verhältnisse, wenn man allen Umständen Rechnung tragen will, sehr complicirt sind. Der nächst einfache Fall von Interferenzen nach den Newton'schen Ringen würde demgemäss der sein, dass Strahlen, welche die Luftschicht gar nicht passiren, mit solchen interferiren, welche dieselbe zweimal hin und her durchlaufen. In erster Annäherung berechnet würden die dadurch entstehenden Linien Ringe wie die Newton'schen sein, concentrisch mit diesen, aber enger. Die Ordnung der Ringe muss vom Centrum nach aussen zunehmen. Wenn die beobachteten Linien schon diesen Bedingungen nicht genügen, so wird der Unterschied zwischen Beobachtung und Theorie noch bedeutender, wenn man die Gläser ein wenig voneinander trennt, so dass man in gewöhnlichem Lichte von den eigentlichen Newton'schen Ringen nichts mehr sieht. Man müsste dann erwarten, dass die neuen Linien ebenfalls nicht mehr sichtbar seien, denn die Gangunterschiede sind ja etwa doppelt so gross wie die bei den Newton'schen Ringen. Dagegen findet man, dass die Linien nicht verschwinden, sondern sich ebenfalls zu Ringen zusammenschliessen, oder besser gesagt, sich stärker krümmen und als geschlossene Ringe sichtbar werden; es ist ja nicht ausgeschlossen, dass sie schon vorher dieselbe Gestalt haben, aber nur zu gross sind, um auf den Gläsern Platz zu finden. In noch höherem Grade widersprechen dieselben Beobachtungen einer Erklärung der Linien durch die anderen Interferenzen, welche nach Poisson durch wiederholte Reflexionen in der dünnen Luftschicht entstehen, denn diese müssten wegen des grösseren Gangunterschiedes erst recht vor den Newton'schen Ringen verschwinden, wenn man den Abstand der Gläser vergrössert. Zugleich schliesst die Thatsache, dass die neuen Linien als Ringe vorhanden sind, nachdem die ursprünglichen Ringe und ihre reflectirten Bilder es nicht mehr sind, auch die Möglichkeit aus, die ersteren direct aus einer Reflexion der letzteren zu erklären.

Nach allen diesen misslungenen Versuchen führt schliesslich eine Verbindung der durch die Poisson'schen Strahlen erzeugten Ringe mit den Newton'schen auf die Erklärung der

neuen Linien. Der Gangunterschied, den ein an der oberen Grenze der Luftschicht in dem Farbenglase reflectirter Strahl gegen denjenigen erhält, welcher zweimal die Luftschicht hin und her durchläuft, ist wie bemerkt, das Doppelte vom Gangunterschiede der Newton'schen Ringe an derselben Stelle. Die dunklen Linien der aus dieser Interferenz entstehenden Erscheinung fallen also an die Stellen, wo die Newton'schen Ringe eine ungerade Anzahl von Viertelwellen, die hellen dorthin, wo diese eine gerade Anzahl von Viertelwellen Gangunterschied haben. Die Gleichung eines neuen Ringes vom Gangunterschied Δ' ist also

$$x^2 + y^2 = r'^2$$

wenn r' sein Radius ist und $r'^2 = \Delta'/_2 R$, die Gleichung des einmal reflectirten Systems Newton'scher Ringe, vgl. § 1:

$$(x - a)^2 + y^2 = r_2^2$$

worin

$$r_2^2 = \Delta_2 R.$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit zwei und ziehen davon die zweite ab, so erhalten wir

$$x^2 + 2\,ax + y^2 - a^2 = (\Delta' - \Delta_2)\,R.$$

Diese Gleichung, in welcher einfach für $\Delta' - \Delta_2$ der Gangunterschied $-\Delta$ der von uns untersuchten Interferenzerscheinung einzusetzen ist, stellt thatsächlich ein System von Kreisen dar, deren Mittelpunkt ($x = -a$, $y = 0$), wie die Erscheinung in Natriumlicht es zeigt, ebensoweit auf der einen Seite des Mittelpunktes M_1 der Newton'schen Ringe entfernt ist, wie das erste reflectirte Bild des Mittelpunktes M_2 auf der anderen. Transformirt man zu parallelen Coordinaten mit dem Anfangspunkt im Centrum der Kreise, indem man $x - a$ für x einsetzt, so ergibt sich

$$x^2 + y^2 = -\Delta R + 2\,a^2.$$

Der Radius eines zum Gangunterschied Δ gehörigen Kreises ist demnach

$$r = \sqrt{-\Delta R + 2\,a^2}$$

Der Gangunterschied Δ_c im Centrum der Ringe bestimmt sich dadurch, dass $r = 0$ gesetzt wird zu:

$$\Delta_c = \frac{2\,a^2}{R}$$

Dies ist derselbe Gangunterschied, den die Newton'schen Ringe im Abstande $a\sqrt{2}$ vom Centrum haben. Umgekehrt haben unsere Ringe im Abstande $a\sqrt{2}$ vom Centrum den Gangunterschied, den die Newton'schen im Centrum besitzen, nämlich Null; denn setzt man in dem Ausdrucke für r $\Delta = 0$, so wird $r = a\sqrt{2}$.

Durch Differentiation der Gleichung

$$r^2 = - \Delta R + 2a^2$$

folgt

$$2r\,dr = - R\,d\Delta.$$

Daraus erhalten wir die Entfernung dr' von einem Ringe zum nächsten, indem wir $d\Delta = \lambda$ setzen:

$$dr' = \frac{\lambda R}{2r}$$

Diese Entfernung zweier benachbarten Ringe beträgt also bei dem Ringe für den Gangunterschied Null

$$\Delta r'_0 = \frac{\lambda R}{2a\sqrt{2}}$$

Die Breite der äquidistanten Knox'schen Streifen D_1 ist

$$\frac{\lambda R}{2a}$$

Die neuen Streifen müssen also, wie es die Beobachtung ergab, enger als die Differenzstreifen D_1 sein, und zwar im Verhältniss $1/\sqrt{2}$.

Leider ist es nahezu ausgeschlossen, die Resultate der Rechnung genau mit den Beobachtungen zu vergleichen, denn die neuen Streifen sind nicht mehr deutlich zu unterscheiden, wo sie sich mit den Differenzstreifen und Newton'schen Ringen kreuzen. Daher kann man weder sehen in welchem Verhältniss der Schnitt des Null-Streifens mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte M_1 und M_2 der Newton'schen Ringe die Strecke $M_1 M_2$ theilt, noch wie breit die Streifen an der Stelle, wo sie den Differenzstreifen parallel laufen, sind. Soweit sich allerdings aus der Richtung und Entfernung der Streifen an seitlich gelegenen Stellen schliessen lässt, genügen sie den Forderungen der Rechnung.

Das Gesetz für die Aufeinanderfolge der Ringe, nämlich

$$2r\,dr = - R\,d\Delta$$

ist, abgesehen von dem Vorzeichen von $d\Delta$ genau dasselbe, wie für die Newton'schen Ringe selbst, wenn für letztere der Krümmungsradius der angewandten Linse R ist. Dadurch würde sich auch die Erscheinung erklären, dass die in Natriumlicht beobachteten Streifen so aussehen, als wenn sie eigentlich das erste Glied in der Reihe der Newton'schen Ringe und ihrer reflectirten Bilder vorstellten, d. h. als wenn das ursprüngliche System der Newton'schen Ringe nur ein reflectirtes Bild von ihnen wäre.

Bei den bisherigen Beobachtungen waren die Linien im gemischtem Lichte nicht im Gesichtsfelde geschlossen, so dass eine nach der Theorie sehr characteristische Eigenschaft derselben nur in homogenem Lichte beobachtet werden konnte. Aus den obigen Rechnungen folgt, dass der Mittelpunkt der neuen Ringe ceteris paribus um so näher an den der Newton'schen Ringe rückt, je näher diesem sich andererseits seine reflectirten Bilder befinden. Letztere Entfernungen hängen aber wesentlich von der Dicke der benutzten Linse ab, wählen wir daher eine dünnere Linse, so können wir auch erwarten, den Mittelpunkt der neuen Ringe näher an denjenigen der Newton'schen zu bringen. Dies gelingt in der That mit den einfachsten Hülfsmitteln, nämlich ganz gewöhnlichen biconvexen Brillengläsern, welche man auf eine ebene reflectirende Unterlage legt. Die Aehnlichkeit der neuen Linien mit einem Newton'schen System fällt hier, wenn die Verhältnisse günstig sind, d. h. wenn die farbigen Linien so nahe dem Mittelpunkt der Ringe kommen, dass dort kein Weiss höherer Ordnung mehr sichtbar wird, auch in gemischtem Lichte auf.

Mit dickeren Linsen kann man übrigens unter Umständen auch ganz dasselbe erreichen. Wenn man nämlich dieselben von ihrer Unterlage ein ganz wenig abhebt, so geht mit den Linien eine auffallende Veränderung vor sich. Die Krümmung derselben wächst sehr schnell und zugleich werden sie breiter. Bald schliessen sie sich im Gesichtsfelde zusammen, bewahren aber noch ihren Character als Knox-Brewster'sche Streifen. Beim weiteren Aufheben der Linse rücken sie ihrem Centrum dann immer näher und verwandeln sich schliesslich in ein System, welches auch in gemischtem Lichte dem Newton'schen täuschend ähnlich aussieht, und wie dieses, aber erst

nach ihm im Centrum zusammenschrumpft und verschwindet. Wir wollen die Erscheinung theoretisch nur bis zu dem Moment verfolgen, in welchem eben die Newton'schen Ringe aufgehört haben in gemischtem Lichte sichtbar zu sein, d. h. wir wollen annehmen, dass der Gangunterschied Δ_m, welcher durch das Abheben des Glases zu den Gangunterschieden der Newton'schen Ringe hinzukommt, nur eine kleine Anzahl von Wellenlängen beträgt. Dann wird der Gangunterschied der Poisson'schen Strahlen in erster Annäherung um das doppelte, $2\,\Delta_m$ vermehrt. Es gilt also (vgl. p. 402)

$$x^2 + y^2 = r'^2$$
$$r'^2 = \left(\frac{\Delta'}{2} - \Delta_m\right) R$$

wenn man r' den Radius des Poisson'schen Ringes vom Gangunterschied Δ' nennt. Ferner ist für das einmal reflectirte System der Newton'schen Ringe

$$(x - a)^2 + y^2 = r_2^{\,2}$$
$$r_2^{\,2} = (\Delta_2 - \Delta_m)\,R.$$

Multipliciren wir die Gleichung des ersten Systems mit zwei und ziehen davon die Gleichung des zweiten ab, so erhalten wir als Gleichung der neuen Ringe

$$x^2 + 2\,ax + y^2 - a^2 = (\Delta' - \Delta_2)\,R - \Delta_m\,R.$$

Die Kreise besitzen also dasselbe Centrum wie früher. Transformiren wir die Coordinaten auf dieses Centrum als Anfangspunkt, so wird aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 = -\,\Delta\,R - \Delta_m\,R + 2a^2.$$

Der Radius des zum Gangunterschied Δ gehörigen Ringes ist jetzt

$$r = \sqrt{-\,\Delta\,R - \Delta_m\,R + 2\,a^2}$$

und soll $r=0$ werden, so ist der dazu gehörige Gangunterschied

$$= \Delta_m - \frac{2\,a^2}{R}.$$

Hebt man die Gläser soweit voneinander ab, dass $\Delta_m = 2\,a^2/R$ wird, so muss der Streifen für den Gangunterschied Null sich in den Mittelpunkt der Ringe zusammengezogen haben. Der Werth von $\Delta_m = 2\,a^2/R$ ist aber gleich dem Gangunterschied

der gewöhnlichen Newton'schen Ringe im Abstande a vom Centrum; d. h. wenn bei Trennung der Gläser derjenige Newton'sche Ring, welcher ursprünglich durch den Mittelpunkt des einmal reflectirten Newton'schen Systems geht, im Centrum verschwindet, so stellen die neuen Ringe auch in farbigem Licht gerade ein neues Newton'sches System vor. Interessant ist dabei noch, dass die Beziehung ganz unabhängig von der Wellenlänge ist.

Der Gang der Strahlen, deren Interferenz zu den eben behandelten Streifen Anlass gibt, ist Fig. 8 Taf. VI $A B C C' C'' D$ bez. $A B_1 C_1 D$. Die symmetrisch dazu gelegenen Streifen k_2 rühren von der Interferenz derselben Strahlen her, wenn man Auge und Licht vertauscht. Da die Mittelpunkte der Poisson'schen Ringe und der Newton'schen Ringe gegenüber dem vorigen Falle nur vertauscht sind, so ist es nicht nothwendig, die Entwickelungen auf's Neue durchzuführen. Die Gestalt und Lage der Streifen muss immer symmetrisch zu denen der vorigen in Bezug auf den Mittelstreifen des Differenzsystems sein.

In der Gläsercombination, welche wir oben anwandten, nämlich der dicken planconvexen Linse auf der undurchsichtigen ebenen Platte, waren noch einige Linien zu sehen, welche grosse Aehnlichkeit mit den eben beschriebenen besitzen, und zwar namentlich mit den letzten Phasen derselben, ehe sie beim Trennen der Gläser verschwinden. Die neuen Linien haben von vornherein die elliptische, im Gesichtsfeld geschlossene Form und das in auffallender Weise an die Newton'schen Ringe erinnernde Ansehen, welches wir so häufig auch bei den anderen Interferenzerscheinungen wiederfinden. Der Mittelpunkt dieses Systems liegt jenseits des Mittelpunktes der ursprünglichen Newton'schen Ringe auf der Linie, welche letzteren mit seinen reflectirten Bildern verbindet, aber näher an demselben, wie der Mittelpunkt des vorigen Systems. Wie die Ringe des vorigen Systems schrumpfen auch die neuen in ihrem Centrum zusammen, wenn man die Linse abhebt. Sie erklären sich durch die Poisson'schen Strahlen nächsthöherer Ordnung in Verbindung mit den Newton'schen Ringen. Die Gleichung der Linien, welche durch Interferenz des an der oberen Fläche der dünnen Luftschicht reflectirten Lichtes mit

demjenigen entstehen, welches in der Luftschicht dreimal hin und her geworfen worden ist, heisst

$$x^2 + y^2 = r_{,,}^{\,2},$$

wobei $r_{,,}$ der Radius eines Ringes mit dem Gangunterschiede $\varDelta_{,,}$ durch die Beziehung

$$r_{,,}^{\,2} = \frac{\varDelta_{,,}}{3} R$$

verknüpft ist. Die Gleichung des einmal reflectirten Bildes der Newton'schen Ringe ist, wie früher

$$(x - a)^2 + y^2 = r_2^{\,2},$$

indem gleichzeitig wieder

$$r_2^{\,2} = \varDelta_2 R$$

ist. Wir erhalten das dem Gangunterschied $\varDelta = \varDelta_2 - \varDelta_{,,}$ entsprechende Differenzsystem, wenn wir die Werthe von $r_2^{\,2}$ und $r_{,,}^{\,2}$ in die Kreisgleichungen einsetzen und die zweite von der mit drei multiplicirten ersten abziehen. So ergibt sich

$$x^2 + y^2 + ax - \frac{a^2}{2} = (\varDelta_{,,} - \varDelta_2)\frac{R}{2} = -\varDelta\frac{R}{2}.$$

Transformiren wir nach dem Mittelpunkte der durch diese Gleichung dargestellten Ringe, d. h. den Punkt $x = -a/_2$, $y = 0$, indem wir $x - a/_2$ für x einsetzen, so wird

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4}a^2 - \varDelta\frac{R}{2} = r^2.$$

In dem Centrum ($r = 0$) ist der Gangunterschied gleich $^3/_2\, a^2/R$, also so gross wie der des Newton'schen Ringes vom Radius $a\sqrt{^3/_2}$. Dass der Mittelpunkt der beobachteten Ringe thatsächlich sehr nahezu, wenn nicht genau in den Punkt $x = -a/_2$, $y = 0$ fällt, erkennt man an einem reflectirten Bilde derselben, welches genau symmetrisch zu dem Mittelstreifen des Differenzsystems D_1 ist, dessen Mittelpunkt also bei $x = +a/_2$, $y = 0$ liegt. Da die Entfernung der reflectirten Bilder bei den übrigen Interferenzlinien, ebenso wie für die Newton'schen, a beträgt, so muss demnach der Mittelpunkt des Systems selbst bei $x = -a/_2$, $y = 0$ sein.

In derselben Weise wie bei den früheren Linien lässt sich nachweisen, dass auch diese Ringe sich beim Abheben der Gläser im Mittelpunkte zusammenziehen und dort verschwinden

müssen. Die Rechnung bietet kein neues Moment und kann daher übergangen werden.

Will man eine genauere Theorie der in diesem Paragraphen beschriebenen Linien geben, so muss man auch auf die Phasenänderungen bei den Reflexionen Rücksicht nehmen, welche in den vorstehenden Rechnungen vernachlässigt sind.

Es mag eigenthümlich erscheinen, dass die Poisson'schen Strahlen, deren Wirksamkeit bisher so sehr zurücktrat, dass man nur unter ganz ungewöhnlichen Verhältnissen, und dann nicht mit voller Sicherheit, die von ihnen direct veranlassten Ringe beobachtete, als Grundlage zur Erklärung von Erscheinungen dienen sollen, welche häufig und deutlich auftreten. Es ist aber dieser Umstand nicht ganz unerklärlich. Die Poisson'schen Ringe der verschiedenen Ordnungen sind in erster Annäherung alle concentrisch und lagern sich derart übereinander, dass man den Einfluss der einzelnen im Gesammtbilde nicht wohl erkennen kann. Dagegen liegen die Differenzsysteme, zu denen sie mit den Newton'schen Ringen zusammen Veranlassung geben, weit voneinander getrennt und können deshalb als gesonderte Systeme sichtbar werden.

§. 4. Die beweglichen Systeme.

In der Linsencombination, welche im vorigen Paragraphen zuerst erwähnt wurde, fanden sich, bei Abblendung überflüssigen Lichtes, im dritten Schatten noch weitere Interferenzerscheinungen, welche nicht darauf zurückgeführt werden konnten, dass die Gläser nahezu gleich dick waren, weil sie sich später auch in vielen Combinationen zeigten, welche dieser Bedingung nicht genügten. Ein Theil der Erscheinung bestand aus einem System von parallelen Linien D, welches in jeder Hinsicht den von v. d. Willigen genauer untersuchten Knox-Brewster'schen Linien ähnlich war, mit dem einen allerdings sehr auffallenden Unterschiede, dass seine Lage sich nicht ohne Weiteres aus der der Newton'schen Ringe und ihrer reflectirten Bilder ergab. Namentlich tritt dieser Unterschied hervor, wenn man das obere Glas der Combination bewegt, so dass die Newton'schen Ringe an verschiedene Stellen gebracht werden. Lässt man dieselben vom Beobachter gegen das Licht zu wandern, so bewegen sich die neuen Linien gerade im entgegengesetzten Sinne, wobei sie

ihrer ursprünglichen Lage parallel bleiben. Dies ist der Fall, welches von beiden Gläsern auch oben liegen mag, das ebene oder das planconvexe. Wurde ein Theil der ebenen Seite des Letzteren mit Asphaltlack überzogen und die planparallele Platte auf die convexe Fläche desselben gelegt, so waren die Linien auf den lackirten Theilen nahezu beseitigt, zum Beweise dafür, dass bei ihrer Entstehung eine Reflexion an der betreffenden Fläche mitwirkt. Dieselben Streifen waren auch sichtbar, wenn die ebenen Flächen der beiden Gläser aneinanderlagen. Besonders bemerkenswerth ist die Beweglichkeit der Streifen in dem Falle, dass die Gläser durch eine Fassung in ihrer gegenseitigen Lage festgehalten werden, und dann das ganze System in der Ebene seiner Planflächen herumgedreht wird. Das Liniensystem wandert dabei, indem es der Querrichtung wieder nahezu parallel bleibt, zwischen zwei äussersten Stellungen hin und her, die aber nur bei manchen Combinationen beide in's Gesichtsfeld fallen. Bei der erwähnten Combination thun sie es z. B. nicht, sondern das Streifensystem geht, wenn man dieselbe fortgesetzt in einem Sinne herumdreht, erst in einer Richtung aus dem Gesichtsfelde, kehrt von dort wieder zurück, verschwindet dann nach der entgegengesetzten Seite und kommt auch von dort zurück. In den Fällen, dass die beiden äussersten Lagen der Linien noch in's Gesichtsfeld fallen, kann man beobachten, dass eine Drehung der Gläser in der Ebene ihrer Planflächen um 180° erforderlich ist, damit die Linien aus der einen Stellung in die andere gehen. Mehreremale erstreckte sich bei Combinationen der Bereich, über den die Linien sich bewegen, von den äussersten in gemischtem Lichte sichtbaren Stellen der Newton'schen Ringe, bis zu den äussersten unter denselben Bedingungen sichtbaren Ringen des zweimal reflectirten Bildes derselben, d. h. über den ganzen Raum, den in gewöhnlichem Lichte die drei ersten Newton'schen Systeme einnehmen.

Die Streifen sind, wie man leicht erkennen kann, wenn sie nahezu mit den Differenzstreifen D_1 oder D_2 zusammenfallen etwa von derselben Breite wie jene, und in ihrer Begleitung treten, was die Aehnlichkeit noch vermehrt, gekrümmte Streifen auf, welche gegen sie ungefähr ebenso liegen, wie die beiden in § 3 zuerst beschriebenen Systeme k_1 und k_2 zu D_1.

Das eine dieser Systeme k_1' ist in entgegengesetztem Sinne gekrümmt, wie das andere k'_2. Das dem Beobachter nähere System k'_2 wendet ihm seine concave Seite zu, das andere seine convexe. Die Krümmung ist in unserem Falle wie bei den erwähnten Systemen nicht so stark, dass die Curven im Gesichtsfeld geschlossene Linienzüge bilden. So stellten sich die Systeme wenigstens Anfangs dar. Während die in § 3 beschriebenen Linien vollständig symmetrisch zu dem Mittelstreifen des Differenzsystemes D_1 lagen, ist das für unsere neuen gekrümmten Systeme bezüglich des Mittelstreifens der beweglichen geraden Linien D im allgemeinen durchaus nicht der Fall. Die Curven k'_1 können bei gewissen Lagen der Linien D in der Nähe der Mittellinie $M_1 M_2 M_3$ in das Gebiet der Curven D hineinlaufen, während die Curven k'_2 auch wo sie den D am nächsten kommen, nämlich gleichfalls in der Mittellinie, immer noch durch einen Zwischenraum von denselben getrennt sind, und umgekehrt. In beiden Fällen sind die Linien k'_1 und k'_2 sowohl was die Stärke der Krümmung, wie auch was ihre Breite anlangt, von einander verschieden Während das System D, sowohl wie die Linien k'_1 und k'_2 sich dadurch besonders auszeichnen, dass sie sich über bedeutende Strecken bewegen können, ohne dass sich die Newton'schen Ringe merklich ändern, denn auch k'_1 und k'_2 machen die Verschiebungen von D in gleichem Sinne mit, besteht doch ein deutlicher Zusammenhang zwischen den Systemen D, k'_1, k'_2 und den Newton'schen Ringen. Das sieht man am besten, wenn D bei seiner Bewegung entweder in das Gebiet der bei gewöhnlichem Lichte sichtbaren Newton'schen Ringe, oder dasjenige ihres zweimal reflectirten Bildes gelangt. Zugleich erkennt man, dass bezüglich der erwähnten beiden Systeme Newton'scher Ringe eine Art reciproker Beziehung zwischen den Linien k'_1 und k'_2 zu herrschen scheint. Diese Beziehung ist derart, dass wenn sich D aus der Mittellage zwischen den Mittelpunkten M_1 und M_3 der besagten Newton'schen Ringe etwa nach M_1 hin bewegt, das Verhalten von k'_1 und k'_2 genau dasselbe ist, wie dasjenige bezw. von k'_2 und k'_1, wenn ich D in der entgegengesetzten Richtung, also nach M_3 zu bewege. Es tauschen dabei gleichzeitig M_1 und M_3, sowohl wie k'_1 und k'_2 ihre Rollen. Danach müssen, wenn der Mittelstreifen von D

in der Mitte zwischen M_1 und M_3 liegt, d. h. durch M_2 geht, die Systeme k'_1 und k'_2 zu diesem Mittelstreifen symmetrisch sein. Das ist auch in manchen Combinationen der Fall, obwohl in anderen Gläsern Unregelmässigkeiten, von denen D entschieden mehr besitzt als D_1, eine geringe Neigung der Linien D gegen die Linien D_1 und daher auch eine kleine Abweichung von der erwähnten Symmetrie veranlassen. Bewegen sich nun die D soweit nach M_1, dass sie sich mit den in gewöhnlichen Lichte sichtbaren Ringen des Newton'schen Systemes M_1 schneiden, so werden die Streifen von k'_1 immer breiter und ihre Krümmung nimmt zu. Zugleich erkennt man dann, dass die Streifen k'_1 aus dem Schnitte der Linien D mit den Newton'schen entstehen. Im Gegensatz hierzu werden die Linien k'_2 bei derselben Bewegung immer enger, während ihre Krümmung abnimmt, und es entsteht zwischen ihnen und den Linien D ein sich vergrössernder Zwischenraum. Die Veränderungen der k'_1 und k'_2, im Falle D sich nicht in der Richtung von M_1 nach M_3, sondern in der entgegengesetzten bewegt, ergeben sich aus der vorher erwähnten reciproken Beziehung.

Bei der Theorie der Erscheinungen haben wir vorzugsweise zu berücksichtigen, einerseits, dass namentlich die Linien des Geradensystems nicht unmittelbar mit den Newton'schen Ringen zusammenhängen, andererseits, dass noch keine grosse Anzahl von Reflexionen bei denselben in Betracht kommen, da die Linien im dritten Schatten sichtbar sind. Diesen und allen anderen Eigenthümlichkeiten wird man gerecht, wenn man das Geradensystem durch die Interferenz von Strahlen erklärt, welche wie $ABCD$ und AB_1C_1D in Fig. 9 (Taf. VI) verlaufen. Man erkennt, dass derartige Interferenzsysteme sich nicht direct aus den Newton'schen Ringen ableiten lassen. Um aber überhaupt einen Aufschluss über ihre Form auf möglichst einfache Weise zu erhalten, machen wir verschiedene Voraussetzungen. Zuerst, dass die Dicken und, der Brechungsexponent der angewandten Gläser gleich sind, und dann, dass es möglich wäre, die Interferenz von Strahlen zu beobachten, für welche die Wege, die sie hinter den Stellen B, bez. B_1 zurücklegen, genau gleich wären, oder auch die Interferenz von Strahlen, bei welchen eine Wegdifferenz erst

hinter den Punkten C, bez. C_1 eintritt. Weder der eine noch der andere der beiden zuletzt angegebenen Fälle, ist thatsächlich mit unseren gewöhnlichen Mitteln zu erreichen. In beiden würde der Gangunterschied der Strahlen daher rühren, dass der eine Strahl die Luftschicht, der andere eine gleich dicke Glasschicht durchläuft. Nennen wir die Dicke der Luftschicht d, so besteht, wie früher, die Beziehung:

$$r^2 = 2\,d\,R,$$

aber der Gangunterschied Δ ist nicht gleich $2d$, sondern $d(n-1)$. In der Formel $r^2 = (2\Delta/(n-1)) \cdot R$ können wir daher einfach $2R/(n-1)$ als Krümmungsradius eines Glases auffassen, und ersehen dann, dass die Curven, welche unseren fingirten Interferenzen entsprechen, die Form von Newton'schen Ringen haben, von denen das eine System direct gesehen, das andere einmal an der obersten und einmal an der untersten Fläche der Gläser reflectirt wird. Obwohl die beiden Systeme selbst nicht entstehen können, so lassen sich doch die Linien, welche durch Interferenz der Strahlen $ABCD$ und AB_1C_1D entstehen, als Differenzsystem derselben auffassen. Die Entfernung der Mittelpunkte der fingirten Systeme wäre gleich derjenigen des Mittelpunktes der Newton'schen Ringe von seinem zweimal reflectirten Bilde. Die Breite der Differenzstreifen wäre also nach § 1, da a hier zweimal so gross wie das frühere, $2R/(n-1)$ etwa viermal so gross wie R ist, immerhin das Doppelte von derjenigen der Differenzstreifen D_1. Vorher erwähnten wir, dass die Beobachtung sie von gleicher Breite liefert. Das ist aber nur für einen bestimmten Einfallswinkel der Fall. Bei steilerem Einfall werden die beweglichen Streifen im Verhältniss zu den festen, deren Abstand natürlich auch wächst, immer breiter, sodass sich möglicherweise die von der Theorie geforderte Entfernung der Streifen ergeben kann. Bei schrägerem Einfall dagegen sinkt das Verhältniss der Breiten bis unter 1. Es ist also von einer Bestätigung der Theorie, was die Breite der Streifen anlangt, nicht die Rede. Allerdings steckt in den obigen Voraussetzungen auch viel mehr Hypothetisches, als es bei den früheren Rechnungen der Fall ist. Es scheint, als ob die Berechnung der Streifenbreite sich nicht auf so kurzem Wege

durchführen lasse, und die Theorie, ohne derartige Hülfsmittel, ist so wenig einfach und übersichtlich, dass wir hier vorläufig davon absehen wollen. Nur mag noch erwähnt werden, dass die Bewegung der Streifen bei Drehung der Gläser, in der Richtung ihrer ebenen Flächen, nicht erklärt werden kann, wenn man annimmt, dass die Axe der Linse mit der Normalen der planparallelen Platte zusammenfällt und dass um diese gemeinsame Axe der ganzen Combination alles symmetrisch ist. Welche Abweichung von der Symmetrie die Bewegung der Streifen vorzugsweise veranlasst, darüber müssen eingehendere Versuche mit zahlreichen Combinationen und die entsprechenden Rechnungen Aufschluss geben.

Halten wir an unserer Erklärung der Streifen fest — eine principiell andere Erklärung habe ich überhaupt nicht finden können — so ergeben sich die krummen Begleiter der beweglichen geraden Streifen durch die Interferenz von Strahlen, welche wie $A'AB_1C_1DE$ und $A'ABCD''E$ oder wie $A'B'C'D'E$ und $A'ABCD''DE$ verlaufen. Wir haben es hier nun mit dem merkwürdigen Falle zu thun, dass, trotzdem die beweglichen Streifen sich rechnerisch durchaus nicht durch Anwendung des bisherigen kürzenden Verfahrens behandeln lassen, dieses Verfahren wieder Bedeutung erlangt, wenn es sich darum handelt, den Zusammenhang der gekrümmten Streifen einerseits mit den Newton'schen, andererseits mit den geraden beweglichen Streifen zu erklären. Die Strahlen $A'ABCD''DE$ und $A'ABCD''E$ erzeugen nämlich durch ihre Interferenz das System der Newton'schen Ringe (Gangunterschied Δ_1), diejenigen $A'AB_1C_1DE$ und $A'B'C'D'E$ das zweimal reflectirte Bild derselben (Gangunterschied Δ'_3). Nennen wir die Gangdifferenzen der geraden beweglichen und der krummen Streifen, bez.:

$$A'AB_1C_1DE - A'ABCD''DE = \Delta_g$$

und

$$A'AB_1C_1DE - A'ABCD''E = \Delta_{k'_1}$$
$$A'B'C'D'E - A'ABCD''DE = \Delta_{k'_2}$$

so ist:

$$(\Delta_g - \Delta_{k'_1}) = A'ABCD''E - A'ABCD''DE = \Delta_1$$
$$(\Delta_g - \Delta_{k'_2}) = A'AB_1C_1DE - A'B'C'D'E = \Delta'_3,$$

d. h. die Systeme k'_1 und k_2' sind als Differenzsysteme der

geraden beweglichen mit dem ursprünglichen, bez. dem einmal an der obersten und einmal an der untersten Fläche reflectirten Bilde des Newton'schen Systems anzusehen. Daraus erklären sich vollkommen die beobachteten Eigenschaften von k'_1 und k'_2, wenn wir die Rechnungen nach Analogie derjenigen in § 1 führen.

§ 5. Ueber die durch gleiche Dicke der Gläser verursachten Interferenzsysteme.

Im Vorhergehenden wurden mehrfach Interferenzen erwähnt, welche im Newton'schen Farbenglase dadurch entstehen, dass die benutzten Gläser bestimmte Dickenverhältnisse haben. Die Erscheinungen fanden sich zuerst in derselben Combination, welche Hrn. Höhl im physikalischen Institute des Münchener Polytechnikums zu einer Prüfung der Theorie der Newton'schen Ringe in durchgehendem Lichte gedient hatte. Sie umfassen eine ganze Reihe von Streifensystemen, die durch ihre grosse Regelmässigkeit und ihren Zusammenhang, sowohl untereinander, wie mit den Newton'schen Ringen selbst und einigen anderen unter den oben beschriebenen Interferenzerscheinungen von Interesse sind.

Die auffallendsten der neuen Interferenzlinien sind in der erwähnten Gläsercombination bei Anwendung von Natriumlicht zu erkennen und bilden zwei Systeme von concentrischen Ringen, welche mit den Newton'schen Ringen selbst die grösste Aehnlichkeit haben. Die Ringe folgen, wie jene immer enger aufeinander, je weiter sie von ihrem, jedem Systeme gemeinsamen Mittelpunkte entfernt sind. Sie sind sichtbar, ohne dass irgendwelches Licht abgeblendet wird, werden aber besonders deutlich, wenn man nach dem Herschel'schen Verfahren im zweiten Schatten beobachtet. Die Mittelpunkte der beiden Systeme fallen nicht mit denjenigen der Newton'schen Systeme zusammen, und durch ihre Lage verliert im allgemeinen das gesammte Bild von Interferenzerscheinungen den einen Grad von Symmetrie, welcher ihm bisher noch eigen war, nämlich die Symmetrie zwischen rechts und links. In besonderen Fällen lässt sich diese Symmetrie allerdings wieder herstellen; denn die Lage der Ringe ist von der Lage der Gläser abhängig. Dreht man die Gläser in der Ebene ihrer ebenen

Flächen etwa um das Centrum der ursprünglichen Newton'schen Ringe, so bewegen sich die Mittelpunkte der neuen Systeme ebenfalls und zwar in gleichem Sinne mit. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte bleibt dabei immer ungefähr parallel der Richtung vom Beobachter auf das Licht zu, und der Abstand der Mittelpunkte scheint gleichfalls ziemlich constant zu bleiben. Man könnte demnach daran denken, dass das dem Beobachter nähere System das reflectirte Bild des entfernteren wäre. Der Abstand der beiden Mittelpunkte ist allerdings bedeutend geringer wie der der Newton'schen Ringe und ihres reflectirten Bildes. Möglicherweise könnte aber der scheinbare Ort der Interferenzerscheinung, über den wir bisher noch nichts wissen,[1]) so nahe an die reflectirende Fläche rücken, dass sich dadurch der geringere Abstand erklärte. Ganz unverträglich mit der Annahme, dass das eine System nur das reflectirte Bild des anderen ist, bleibt aber wohl ein anderer Umstand, welcher in hohem Grade auffallend ist, und den man bei der vorerwähnten Drehung der Combination bemerkt. Obwohl nämlich die Gläser durch eine Metallfassung in ihrer gegenseitigen Lage festgehalten wurden, so dass sich die Ordnung der Newton'schen Ringe nicht änderte, schrumpften die neuen Ringe entweder zusammen, um im Mittelpunkte zu verschwinden, oder sie entwickelten sich aus diesem und dehnten sich rasch aus; und zwar war der Zustand des einen Ringsystemes immer gerade der entgegengesetzte, wie der des anderen. Bewegen sich die Mittelpunkte der Ringe vom Beobachter auf das Licht zu, so dehnen sich die Ringe des dem Lichte näheren Systemes aus und die anderen ziehen sich zusammen.

Die Curven, auf denen sich die Mittelpunkte bewegen, sind Ovale, welche die Mittelpunkte des ursprünglichen und des einmal reflectirten Newton'schen Systemes einschliessen. Die Ringe der beiden Systeme haben, abgesehen von dem erwähnten Unterschiede, grosse Aehnlichkeit, sie würden als

1) Der Ort der Newton'schen Interferenzringe selbst ist nach den neueren Untersuchungen (vgl. die Arbeiten von Sohncke und Wangerin sowie von Feussner) ja auch durchaus kein einfacher. Ich halte mich bei den ohnehin verwickelten Erscheinungen einstweilen an die Schätzungen, welche den ersten Annäherungen entsprechen.

Newton'sche Ringe aufgefasst Gläsern von annähernd derselben Krümmung angehören, und zwar müsste die Krümmung beträchtlich stärker sein als die der benutzten Gläser, was man daran sieht, dass beide Ringsysteme bedeutend enger sind als die Newton'schen Ringe.

In der Begleitung der beiden Systeme, die nach ihrer Stellung, ihrer Grösse und ihrer gemeinsamen Bewegung einen nahen inneren Zusammenhang vermuthen lassen, befindet sich ein weiteres System von Ringen, welches ebenfalls als ein Newton'sches System aufgefasst werden könnte. Auch dieses ist enger wie das System der echten Newton'schen Ringe und ungefähr, aber nicht ganz von derselben Breite wie die beiden erwähnten Systeme. Diese Angaben beziehen sich auf den allgemeinen Charakter des Gesetzes, nach dem die Ringe aufeinander folgen, und der ändert sich sehr wenig, wenn bei den veränderlichen Systemen auch ganze Reihen von Ringen im Mittelpunkte verschwunden sind, oder sich daraus entwickelt haben. Unser Ringsystem, welches wir das System III nennen wollen, besteht zwar auch aus concentrischen Ringen, sein Mittelpunkt fällt aber wieder nicht mit dem der Newton'schen Ringe zusammen, sondern bewegt sich bei einer Drehung der Gläser um diesen in gleichem Sinne mit herum. Die gegenseitige Stellung der drei Systeme lässt sich nicht ganz einfach beschreiben. Das dritte scheint gewissermassen die beiden anderen, I und II mit den ursprünglichen Newton'schen Ringen und ihrem einmal reflectirten Bilde zu verbinden, indem es sich immer zwischen dieselben lagert. Es dreht sich also auf einem kleineren Oval um die beiden Mittelpunkte der besagten Newton'schen Ringe als die Mittelpunkte der Systeme I und II und liegt immer auf der Seite, nach der sich auch jene, von den Newton'schen Systemen aus gesehen, befinden. Da sich aber keines von den drei Systemen direct auf einem Kreise, oder bei schiefer Incidenz der entsprechenden Ellipse, um den Mittelpunkt eines Newton'schen Systemes bewegt, so ist der innere Zusammenhang der Bewegung der drei Systeme einigermassen complicirt und aus einer blos experimentellen Untersuchung schwer zu ersehen. Die Ringe III stehen zu denen I und II dadurch in einem gewissen Gegensatze, dass sie bei einer Umdrehung der Gläser wesentlich nur ihre Stellung ändern,

und nicht wie jene rasch im Centrum verschwinden oder daraus hervorquellen. Im Uebrigen sind die Bedingungen, unter denen man sie sieht, ungefähr dieselben, wie für die Ringe I und II. Homogenes Licht ist dazu erforderlich und eine Abblendung unnöthiger Strahlen von grossem Vortheile.

Die gemeinsame Bewegung der Systeme hat etwas vom Getriebe vieler Zahnräder, und dieser Eindruck wird noch verstärkt durch ein weiteres System IV, welches in der erwähnten Combination gegen die anderen zurücktrat, dafür aber wieder eine Eigenthümlichkeit aufwies, welche jene dort nicht besitzen und welche bei der Erklärung der ganzen Reihe als wichtiger Anhaltspunkt diente. Herr N. Schlumberger machte mich auf dieses System aufmerksam, als ich ihm die übrigen in homogenem Lichte zeigte. Es besteht wieder aus scheinbar concentrischen Kreisen, deren Mittelpunkt diesmal aber ausserhalb der Gläser liegt. Sonst nimmt das neue System an der Bewegung der anderen Theil, und zwar wie das System III, ohne wesentliche Veränderung der Ringe selbst. Der Theil des Systems, den wir sehen können, besteht aus nahezu äquidistanten Linien, welche ziemlich geringen Abstand haben, ähnlich wie die Newton'schen Ringe in einiger Entfernung vom Mittelpunkte. Bei Beobachtung der im vorigen Paragraphen beschriebenen beweglichen Streifen hatte ich zuweilen bei gewöhnlichem Lampenlichte an der einen Seite der Gläser ein ganz feines gebogenes Streifensystem gefunden, dessen concave Seite nach aussen gekehrt war. Bei Drehung der Gläser in der Ebene ihrer ebenen Flächen bewegte sich das System in gleichem Sinne mit, da es aber so sehr nach der Seite lag, verschwand es schnell aus dem Gesichtsfelde. Bewegt man die Gläser weiter, bis sie etwa einmal halb herumgedreht sind, so kommen die Streifen des Systems auf der anderen Seite wieder in das Gesichtsfeld zurück. Ihr Aussehen ist wieder dasselbe wie früher, ihre concave Seite ist wieder nach aussen gekehrt, so dass der von ihnen sichtbare Theil zu dem früher sichtbaren nicht parallel, sondern symmetrisch liegt. Auch hier bewegen sich die Streifen in gleichem Sinne wie die Ringe I, II, III, und wie die beweglichen Streifen des vorigen Paragraphen und verschwinden bei weiterer Drehung aus demselben Grunde wie früher aus dem

Gesichtsfelde. Die Streifen sind offenbar nicht durch sehr complicirte Verhältnisse veranlasst, denn man sieht sie beim Abblenden des Lichtes schon im ersten Schatten. Ihr Zusammenhang mit den beweglichen Streifen des vorigen Paragraphen ist sehr wahrscheinlich. Sie sind indessen nicht symmetrisch zu jenen, sondern der muthmassliche Mittelpunkt der gebogenen Streifen liegt ziemlich weit ab von dem mittelsten der beweglichen geraden Streifen. Zuweilen sieht man nun ein zweites System krummer Linien, welches ähnlich aussieht, als ob es das reflectirte Bild des ersteren wäre. Durch den Schnitt dieser beiden gekrümmten scheint das bewegliche gerade System zu gehen. Wie dem auch sei, von besonderem Interesse sind die gebogenen Streifen jedenfalls, und umsomehr, als sie mit dem in Natriumlicht gesehenen System IV übereinzustimmen scheinen. Dass Linien, welche in die Classe der Knox-Brewster'schen gehören und in gemischtem Lichte aus einer Reihe farbiger Streifen bestehen, welche sich beiderseits einem farblosen anschmiegen, in homogenem Lichte sich zu einem Systeme Newton'scher Ringe ergänzen, ist im Verlaufe der vorliegenden Untersuchung schon verschiedentlich vorgekommen. Während die wenigen in weissem Lichte sichtbaren Linien des Systems IV nur in gewissen Lagen der Gläser in das Gesichtsfeld fallen, lässt sich an ihrer Fortsetzung in homogenem Lichte erkennen, dass das System sich ähnlich wie I, II und III, nur auf einem grösseren Ovale, um die Newton'schen Ringe herumbewegt. Andererseits ist die Identität des IV. Systems mit den farbigen Streifen dadurch von Werth, dass sie uns lehrt, dass wenigstens einige von den bei den Systemen I, II, III und IV vorkommenden Interferenzen solche mit niederem Gangunterschiede sind.

Auch die Erscheinungen, welche im vorigen Paragraphen beschrieben wurden, beobachtete ich zuerst in derselben Linsencombination, fand dieselben dann aber in ähnlichen Gläsern wieder. Machte ich dagegen hier den Versuch mit einer planconvexen Linse von gleicher Krümmung und einer anderen planparallelen Platte, so war von den sämmtlichen Erscheinungen I, II, III, IV keine einzige zu sehen. Dasselbe Resultat hatte ich bei vielen anderen Gläsern sowohl bei Combinationen von der beschriebenen Art, wie bei solchen von

Biconvexlinsen mit ebenen Platten, von biconvexen Linsen unter sich, oder von solchen mit biconcaven Linsen. In einigen Ausnahmefällen, und zwar mit Linsen des erwähnten Brillenkastens, fanden sich Erscheinungen wieder, welche unter Umständen den Systemen I, II, III und IV ausserordentlich ähnlich waren. Meistens fanden sich solche zusammengehörige Gläser unter den Biconvexlinsen. Nur in einem Falle konnte ein System, welches mit einem der genannten übereinzustimmen schien, in der Combination einer biconcaven mit einer biconvexen Linse beobachtet werden. Dass endlich derartige Ringe nur einmal in der Verbindung einer Convexlinse mit einer planparallelen Platte vorkamen, liegt wohl daran, dass nur wenige Planplatten von geeigneter Dicke zur Verfügung standen. Die Experimente führen nämlich darauf, dass bei dieser Erscheinung in anderer Weise wie bei den sämmtlichen früher beschriebenen, die Dickenverhältnisse der Gläser eine Rolle spielen. Es ist gar nichts Ungewöhnliches, dass man die Erscheinung in einer Linsencombination sieht, aber nicht in einer anderen, bei der nur die eine Linse durch eine andere, ihr an Krümmung ganz gleiche, ersetzt wird.

Manche unter den Combinationen zweier Biconvexlinsen zeigten die Systeme I bis IV in genau demselben Zusammenhange, wie die Gläser, in welchen sie zuerst gefunden wurden. Obwohl die Ringe, ebenso wie die Newton'schen, viel enger waren, wie dort, gestatteten sie die Beobachtung nicht unwesentlicher Eigenheiten. Schon der Umstand, dass man mit den neuen Combinationen nicht so vorsichtig zu sein brauchte wie mit der früheren, war von grossem Vortheile. Bei Interferenzerscheinungen dieser Art ist nämlich die Gefahr sehr bedeutend, dass man sie einigemal sieht, dann, ehe man ihre Erklärung findet, bei Veränderung der Versuche verliert und schliesslich grosse Mühe und lange Zeit darauf verwenden muss, um sie nur wieder zu erhalten. Brewster erwähnt, dass er diese Erfahrung machte, ich hatte Gelegenheit, sie verschiedentlich zu wiederholen, und liess daher die Linsen der ersten Combination dauernd in ihrer Fassung.

In dieser Combination waren auch in gewöhnlichem Lichte die Linien des IV. Systems zu sehen gewesen. In den neuen Gläsern war das häufig anders und die Erscheinungen wechselten

schnell, wenn die Linsen aufeinander hin und her bewegt wurden. Zuweilen war keines von den vier Systemen deutlich, zuweilen alle miteinander. In letzterem Falle war unter Umständen auch das IV. System ebenso wie die übrigen nur in homogenem Lichte zu erkennen, bei anderen Lagen eines oder das andere auch in gemischtem Lichte und, was das Wichtigste ist, einigemale auch alle vier Systeme in letzterem. Das heisst also, die sämmtlichen Systeme I bis IV werden bei gewissen Lagen bestimmter Linsen durch Interferenz von Strahlen mit ganz geringen Gangunterschieden hervorgebracht. Speciell für das IV. System bemerkenswerth war noch, dass sein Mittelpunkt bei den neuen Linsencombinationen in das Gesichtsfeld fiel und dort, bei Drehung der Linsen um eine Linie, welche ungefähr mit ihren Axen zusammenfiel, auch blieb. Ferner fällt auf, dass man die farbigen Linien desselben oft als geschlossene Kreise oder Ellipsen beobachten konnte, und dass auch die Ringe in der Nähe des Mittelpunktes sowohl in homogenem Lichte wie in gemischtem, wenn in letzterem Falle durch Verschiebungen der beiden Linsen gegeneinander bewirkt wurde, dass kein Weiss höherer Ordnung, sondern Farben in der Mitte vorhanden waren, ganz das Aussehen eines Newton'schen Systems hatten. Aehnlich verhalten sich auch die farbigen Systeme I und II. Die Ringe des einen verschwinden bei Drehung der Combination um ihre Axe[1]) im Centrum, während die des anderen sich daraus entwickeln. Also auch diese Systeme sind unter Umständen sowohl in gemischtem, wie in homogenem Lichte den Newton'schen Ringen ähnlich. Das Gleiche findet endlich zuweilen für die Ringe des III. Systems statt.

Die Annahme, dass die sämmtlichen vier Systeme sich durch gleiche Dicke der Gläser erklären könnten, hat vielleicht etwas Befremdliches, wenn man bedenkt, wie gut die Platten in einem Interferenzrefractor gearbeitet sein müssen und wie stark dagegen die Dicke bei den Linsen von Stelle zu Stelle variirt. Dass dadurch aber nicht ähnliche Interferenzerscheinungen in Linsen ausgeschlossen werden, ersieht man schon daraus, dass wir die einfachen Knox'schen Streifen,

---

1) Annähernd fallen ja meistens bei den Versuchen die Axen der benutzten Linsen zusammen.

welche v. d. Willigen genauer untersuchte, nicht nur als Brewster'sche Streifen in der dünnen Luftschicht, sondern auch als solche der Linse auffassen können, auf welche das Licht, nachdem es sie einmal passirt hat, durch die untergelegte Planplatte zurückgeworfen wird. Mach hat ja nachgewiesen, dass die Schicht zwischen den Gläsern durchaus nicht sehr dünn zu sein braucht. Von den Interferenzerscheinungen in den Fernrohrobjectiven und ähnlichen Liniencombinationen gilt dasselbe.

Werden nun zwei Linsen von sehr angenähert gleicher Dicke aufeinandergelegt, so haben wir zunächst einige Möglichkeiten der Interferenz zu berücksichtigen, die wir schon bei der Behandlung der Streifen in zwei nahezu parallel gehaltenen Platten von gleicher Dicke [1]) erwähnt haben. In einem Fall können zwei Strahlen interferiren, von denen der eine (Fig. 10 Taf. VI) den Weg ABC_2D_1EF, der andere $AB_1C_1D_1EF$ einschlägt, ein anderesmal können es Strahlen mit dem Verlaufe ABC_2D_1EF und $ABCDEF$ sein. Aufs engste verbunden mit beiden ist die Möglichkeit, dass der Strahl $ABCDEF$ mit $AB_1C_1D_1EF$ interferirt.

Ferner kann man noch Interferenz zwischen $ABCDEE'F$ und ABC_2D_1EF und endlich zwischen ABC_2D_1EF und AB_1C_1F erwarten. Alle diese Interferenzen zu untersuchen würde sehr schwierig sein, wenn sich nicht einige Beziehungen zwischen ihnen und einigen früher schon behandelten Systemen herausstellten. Beginnen wir z. B. bei den letzten Fällen, und sei:

$$ABCDEE'F - ABC_2D_1EF = \varDelta_{III}$$
$$ABC_2D_1EF - AB_1C_1F = \varDelta_{IV}\,.$$

Dann findet sich, dass durch Interferenz zweier der hierbei vorkommenden Strahlen ein System entsteht, welches wir schon kennen, nämlich das Summensystem der Newton'schen Ringe und ihres einmal reflectirten Bildes; denn:

$$ABCDEE'F - AB_1C_1F = \varDelta_s = \varDelta_1 + \varDelta_2\,.$$

Aus dieser Gleichung zusammen mit den vorigen folgt nun:

$$\varDelta_s = \varDelta_{III} + \varDelta_{IV}\,,$$

d. h. die beiden Systeme, welche den Gangunterschieden $\varDelta_{III}$ und $\varDelta_{IV}$ entsprechen, stehen miteinander und dem besagten Summensysteme der beiden Newton'schen Systeme in einem

1) Eug. Blasius, Wied. Ann. 45. p. 316—352. § 4. 1892.

sehr einfachen Zusammenhange. Von dem Summensystem wissen wir, dass es den Gesetzen der Newton'schen Ringe gehorcht, von den Systemen I, II, III und IV sind wir nach den Beobachtungen geneigt, das gleiche anzunehmen. Ist das aber der Fall, so müssen die Centra der zu Δ_s, Δ_{III} und Δ_{IV} gehörigen Ringe auf einer Geraden liegen. Man kann dies aus den § 1 gegebenen Formeln ableiten, ersieht es aber auch bei Beachtung der Symmetrieverhältnisse. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte von I und II ist ungefähr parallel der Linie, auf welcher die Mittelpunkte der reflectirten Bilder des Newton'schen Systems liegen, und da sowohl das Centrum von I wie das von II sich meistens seitlich von dieser Linie befindet, so geht die Verbindungslinie der Mittelpunkte I und II jedenfalls im allgemeinen nicht durch denjenigen des Summensystems. Aber auch die Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten von I und II mit denjenigen von III und IV thun dasselbe in gewissen Lagen nicht. So kommt z. B. bei der Umdrehung der Gläser zweimal der Fall vor, dass M_{II} ebensoweit von dem Centrum M_1 der Newton'schen Ringe, wie von dem ihres einmal reflectirten Bildes M_2 absteht (Fig. 11 Taf. VI), dann befinden sich einerseits M_1 M_{III} und M_{II} sowie M_2, M_{III}, M_I, andererseits aber auch M_1, M_I, M_{IV} und M_2, M_{II}, M_{IV} auf je einer Geraden. Zugleich erkennt man hier, dass die beiden Mittelpunkte, deren Verbindungslinien durch M_s, den Mittelpunkt des Summensystems gehen, nur M_{III} und M_{IV} sein können. Es wird also das Ringsystem um M_{III} dem Gangunterschiede Δ_{III} und dasjenige um M_{IV} dem Gangunterschiede Δ_{IV} entsprechen, oder umgekehrt.

Bezeichnen wir nun:

$$ABC_2D_1EF - AB_1C_1D_1EF = \Delta_I$$
$$ABC_2D_1EF - ABCDEF \quad = \Delta_{II},$$

so müssen die Systeme, welche durch die entsprechenden Interferenzen entstehen, wohl I und II sein. Dass dies in der That der Fall ist, lässt sich durch den Zusammenhang der Interferenzen untereinander folgendermassen bestätigen. Aus den Ableitungen des § 1 ergibt sich, dass Strahlen, welche den Verlauf $AB_1C_1D_1EF$ und AB_1C_1F haben, das Newton'sche System um M_1 mit dem Gangunterschiede Δ_1, Strahlen wie $ABCDEF$

und $A_1 B_1 C_1 F$ das einmal reflectirte Bild des Newton'schen Systems mit dem Gangunterschiede Δ_2 erzeugen, d. h.:

$$\begin{aligned} AB_1 C_1 D_1 EF - AB_1 C_1 F &= \Delta_1 \\ ABCDEF \quad - AB_1 C_1 F &= \Delta_2. \end{aligned}$$

Setzen wir die Werthe, welche sich hieraus für $AB_1 C_1 D_1 EF$ und $ABCDEF$ ergeben, in die Ausdrücke für Δ_I und Δ_{II} ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} ABC_2 D_1 EF - (AB_1 C_1 F + \Delta_1) &= \Delta_I \\ ABC_2 D_1 EF - (AB_1 C_1 F + \Delta_2) &= \Delta_{II}\,. \end{aligned}$$

Nun ist aber, wie wir oben sahen:

$$ABC_2 D_1 EF - AB_1 C_1 F = \Delta_{IV}\,.$$

Es folgt daher:

$$(G) \qquad \begin{cases} \Delta_{IV} - \Delta_1 = \Delta_I \\ \Delta_{IV} - \Delta_2 = \Delta_{II} \end{cases}$$

und mit Berücksichtigung des Umstandes, dass

$$\Delta_{III} + \Delta_{IV} = \Delta_* = \Delta_1 + \Delta_2$$

gehen diese Gleichungen in die Folgenden über:

$$(G') \qquad \begin{cases} \Delta_{III} + \Delta_{II} = \Delta_1 \\ \Delta_{III} + \Delta_I = \Delta_2. \end{cases}$$

Die Gleichungen (G) und (G′) sind ungemein wichtig; denn sie führen uns in der Erkenntniss des Zusammenhanges der Systeme mit einem Male sehr viel weiter. Schon aus Symmetriegründen ergibt sich, dass, wenn die durch die Gleichungen verknüpften einzelnen Systeme aus concentrischen Ringen bestehen, die Mittelpunkte je dreier in einer Gleichung (G) oder (G′) vereinigten Systeme auf einer Geraden liegen müssen. In der That finden wir, dass die Systeme I und II den Bedingungen genügen, welche wir für die Systeme mit den Gangunterschieden Δ_I und Δ_{II} abgeleitet haben. In der speciellen Lage, welche in Fig. 11 angegeben ist, sieht man besonders gut, dass M_I, M_{II}, M_{III} und M_{IV} die Mittelpunkte der vier neuen Systeme mit denjenigen der Newton'schen Systeme M_1 und M_2 in der Weise zusammenhängen, dass M_{III} in den Schnittpunkt der Verbindungslinien $\overline{M_1 M_2}$ und $\overline{M_I M_2}$, M_{IV} in denjenigen von $\overline{M_1 M_I}$ und $\overline{M_2 M_{II}}$ fällt. Da diese Beziehungen auch für die allgemeineren Lagen der Systeme be-

stehen bleiben, so klärt sich fast mit einem Schlage der ganze, auf den ersten Blick so complicirt erscheinende Zusammenhang derselben auf, und man erkennt nun, wenn man die Versuche wiederholt, dass in der That die Ringmittelpunkte den gefundenen Gesetzmässigkeiten gehorchen. Wenn schon nach dieser Uebereinstimmung nicht viel Zweifel darüber herrschen kann, dass für die Erscheinungen die richtige Erklärung gefunden ist, so bestätigt sich die Theorie noch in bemerkenswerther Weise durch den Aufschluss, den sie über einige schon erwähnte Eigenthümlichkeiten der Systeme I und II gibt. Die Gangunterschiede der bei diesen Systemen zur Interferenz kommenden Strahlen sind:

$$ABC_2D_1EF - AB_1C_1D_1EF = \Delta_I$$
$$ABC_2D_1EF - ABCDEF \quad = \Delta_{II}.$$

Aus denselben ergibt sich ein Differenzsystem:

$$ABCDEF - AB_1C_1D_1EF = \Delta_I - \Delta_{II}.$$

Ein Vergleich mit § 1 zeigt, dass dieses Differenzsystem identisch ist mit dem Differenzsystem der Newton'schen Ringe D_1, d. h. mit den Knox-Brewster'schen Streifen, die v. d. Willigen genauer untersuchte. Da diese äquidistanten Geraden senkrecht zu der Einfallsebene des Lichtes liegen und bei einer Drehung der Gläser an ihrer Stelle bleiben, so erklärt sich, dass die Mittelpunkte der Systeme I und II derart liegen, dass ihre Verbindungslinie auf den Differenzlinien senkrecht steht, oder durch den im Unendlichen gelegenen Mittelpunkt des als Kreissystem von unendlich grossem Radius aufgefassten Differenzsystems geht. Ferner folgt aber auch, dass die Ringe des einen Systems aus ihrem Centrum hervorquellen müssen, wenn die des anderen in dem ihrigen verschwinden, falls der Abstand der beiden Systeme I und II derselbe bleibt.

Wir können demnach die sämmtlichen vier neuen Systeme aufbauen aus einem einzigen unter ihnen und den bekannten Systemen. Die allen gemeinsame Aehnlichkeit mit Newton'schen Ringen, wird sich im Anschluss an die in § 1 gegebenen Rechnungen erklären, wenn es gelingt, nur für eines derselben diesen Charakter festzustellen.

Die Methode abgekürzter Rechnungen versagt hier aber, gerade so wie einmal im vorigen Paragraphen, d. h., sie würde

sich wohl anwenden lassen, und eines der neuen Ringsysteme ebenso als Summensystem von leichter berechenbaren fingirten Ringsystemen ableiten lassen, wie das bewegliche gerade System als Differenzsystem derselben möglich war; aber bei den Abweichungen, welche die Beobachtung in jenem Falle von der Theorie zeigte, werden wir auch hier von dieser Theorie vorläufig absehen. Die genaueren Rechnungen werden, wie für die Linien des vorigen Paragraphen auf den Mangel an Symmetrie Rücksicht nehmen müssen, der in beiden Fällen die Bewegung der Systeme bei Drehungen der Gläser in der Ebene ihrer ebenen Flächen verursacht.

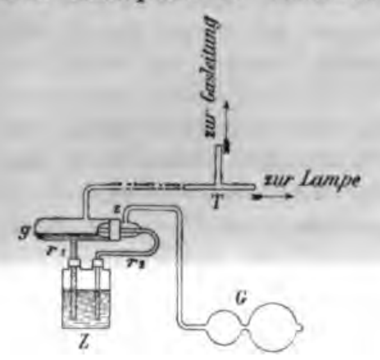
Schluss.

In den Gläsercombinationen, welche zur Erzeugung der Newton'schen Farbenringe dienen, hat zuerst Knox auch Interferenzen anderer Art entdeckt. Ausser den durch ihn, später namentlich durch v. d. Willigen und Mach untersuchten Erscheinungen, lassen sich noch, wie wir gesehen haben, eine ganze Reihe weiterer Systeme beobachten. Zum Theile sind dieselben schon dann vorhanden, wenn eine Convexlinse auf einer undurchsichtigen Unterlage ruht, zum Theil nur, wenn auch die Unterlage eine durchsichtige Linse oder Platte ist, und eine andere Art endlich blos dann deutlich, wenn zwischen den Dicken der beiden angewandten Gläser einfache Verhältnisse bestehen. Einige von diesen Erscheinungen können auch in Linsencombinationen vorkommen, welche nicht die gewöhnlichen Newton'schen Ringe zeigen. Hierher gehören die von Brewster in Fernrohrobjectiven beobachteten Systeme.

Berlin, Physik. Inst. d. Univ., 1891.

II. *Argandlampe für Spectralbeobachtungen;* *von E. Pringsheim.*

Bei der Einstellung und dem Gebrauche von Spectral-Apparaten, -Photometern etc., ist man häufig genöthigt, abwechselnd weisses und monochromatisches Licht anzuwenden. Um das unbequeme Wechseln der Lichtquellen zu vermeiden, bediene ich mich einer Einrichtung, welche gestattet, eine in weiter Entfernung vom Beobachter aufgestellte Argandlampe nach Belieben abwechselnd als weisse und als monochromatische Lichtquelle zu benutzen. Das angewendete Verfahren ist eine für viele Zwecke sehr bequeme Modification der von Gouy[1]) angegebenen Methode zur Erzeugung farbiger Flammen. In den Schlauch, welcher die Lampe mit der Gasleitung verbindet, wird an irgend einer Stelle ein T-förmiges Glasrohr *T* s. Figur) eingesetzt, dessen einer Ansatz durch einen Schlauch von beliebiger Länge mit einem Zerstäuber *Z* verbunden ist. Dieser zerstäubt mit Hülfe eines gewöhnlichen Gummigebläses *G* (das man natürlich auch durch ein Wasserstrahlgebläse oder dergleichen ersetzen kann) eine Flüssigkeit, etwa Kochsalzlösung, und mischt die aus dem Gebläse kommende Luft nebst den in ihr suspendirten Flüssigkeitsstäubchen dem Leuchtgase bei. Auf diese Weise wird der Lampe gleichzeitig mit der zum Entleuchten der Flamme nöthigen Luft auch die Salzlösung zugeführt, welche das monochromatische (oder ein anderes spectroskopisch zu beobachtendes) Licht erzeugt. Durch Regulirung des an der Gasleitung befindlichen Hahnes und durch passende Wahl des Druckes im Gebläse



1) Gouy, Ann. d. chim. et phys. (5) 18. p. 28. 1879.



hat man es in der Hand, dasjenige Verhältniss von Luft und Gas herzustellen, welches zum vollständigen Entleuchten nöthig ist. Der Hahn an der Lampe muss dabei stets ganz geöffnet sein. Den Zerstäuber selbst habe ich mir nach der von Ebert[1]) gegebenen Anweisung aus Glas hergestellt, jedoch habe ich ihn ein für alle Mal fest zusammengekittet. Er ist, wie aus der Figur ersichtlich, bequem auf einer Woulff'schen Flasche anzubringen. Der Glascylinder g dient zur Ablagerung der groben Flüssigkeitstheilchen. Um die Saughöhe nicht zu gross werden zu lassen, bringt man durch Neigen der Flasche anfangs etwas Flüssigkeit nach g hinein. Dann kann man mit dieser Flüssigkeitsmenge Monate lang arbeiten, da der Verbrauch sehr gering ist. Der eigentliche Zerstäuber z ist in g, ebenso wie die Glasröhren r_1 und r_2 in der Woulff'schen Flasche durch Kautschukstopfen befestigt. Wählt man zur Füllung der Flasche ein Gemisch verschiedener Salzlösungen, so hat man eine Lichtquelle, die man ohne Aenderung ihrer Aufstellung abwechselnd zur Untersuchung von Absorptionsspectren und zur Aichung der Scala benutzen kann.

Berlin, Phys. Inst., 15. Januar 1892.

---

1) Ebert, Wied. Ann. **32.** p. 347. 1887.

III. *Das Kirchhoff'sche Gesetz und die Strahlung der Gase; von E. Pringsheim.*

I. Die Strahlung des Natriums.

1. Einleitung.

§ 1. Das Kirchhoff'sche Gesetz ist die theoretische Grundlage für die Spectralanalyse der Gestirne; aus ihm lässt sich die wichtige Folgerung herleiten, dass leuchtende Körper Licht von derjenigen Wellenlänge besonders stark absorbiren, für welche ihr Emissionsspectrum ein Maximum zeigt. Diese Eigenschaft ist für diejenigen Körper von besonderer Bedeutung, welche ein charakteristisches Emissionsspectrum besitzen, also für die *Gase*.

Das Kirchhoff'sche Gesetz gilt nicht für alle Arten des Leuchtens, sondern nur für diejenigen Vorgänge, bei denen die Lichtemission lediglich eine Function der Temperatur ist, bei denen also die gesammte in Form von Strahlung ausgesandte Energie unmittelbar aus der Wärmebewegung stammt, und ebenso die ganze durch Absorption dem strahlenden Körper zugeführte Energie unmittelbar in Wärme umgesetzt wird.

Bei den gewöhnlichen experimentellen Methoden zur Erzeugung der Gasspectra sind wir von vornherein keineswegs sicher, dass diese Bedingung erfüllt ist. Wenn wir Gase oder Metalldämpfe in Geissler'schen Röhren, im galvanischen Lichtbogen, oder durch den zwischen Metallelectroden überspringenden Funken zum Glühen bringen, so werden sie Träger der electrischen Entladung, und diese ist höchst wahrscheinlich, ganz oder theilweise, die directe Ursache des Leuchtens. Ausserdem treten, wenigstens bei den beiden letztgenannten Vorgängen Verbrennungen, also chemische Processe auf, welche ebenfalls die zur Strahlung nöthige Energie herzugeben im Stande sind. Auch bei Flammen sind chemische Processe die Ursache des Leuchtens, und wenigstens bei allen denjenigen „nicht leuchtenden“, d. h. schwach leuchtenden,

Flammen, deren Verbrennungsproducte lediglich in Kohlensäure und Wasserdampf bestehen, scheint die Strahlung nur von dem chemischen Vorgang abzuhängen, sodass bei allen diesen Flammen unabhängig von ihrer Temperatur, die Strahlung qualitativ [1]) und quantitativ [2]) die gleiche zu sein scheint, wenn die gleiche Menge Wasserdampf und Kohlensäure gebildet wird. Bringen wir in einer solchen Flamme, etwa der nichtleuchtenden Bunsenflamme, eine fremde Substanz, z. B. Natrium zum Glühen indem wir irgend ein Salz dieses Elements in sie einführen, so sind wir keineswegs sicher, dass das gelbe Licht, das die Flamme jetzt aussendet, lediglich dadurch entsteht, dass metallischer Natriumdampf durch die Wärme der Flamme bis zur Glühtemperatur erhitzt ist, sondern da sich das Natrium zweifellos in der Flamme oxydirt, so ist es von vornherein sehr wahrscheinlich, dass dieser Oxydationsprocess selbst eine Lichtemission hervorruft. Daher ist es sehr zweifelhaft, ob die in Flammen zum Glühen gebrachten Dämpfe der Bedingung des Kirchhoff'schen Gesetzes genügen. So glaubt E. Wiedemann [3]) aus der Art der Umkehrung der Natriumlinien schliessen zu müssen, dass das Natriumlicht der Bunsenflamme nicht allein durch die hohe Temperatur des Natriums, sondern auch durch andere Vorgänge („Chemi-Luminescenz") erzeugt wird.

Wir sind also bei allen diesen Methoden, Gase zum Leuchten zu bringen, nicht sicher, dass die Temperaturerhöhung die einzige Ursache des Glühens ist; aber noch mehr, es ist nicht einmal bewiesen, dass Gase durch blosse Temperaturerhöhung überhaupt zum Leuchten gebracht werden können. W. Siemens [4]) sagt hierüber: „Versuche darüber, ob hoch erhitzte, reine Gase wirklich Licht ausstrahlen, sind meines Wissens bisher nicht mitgetheilt. Betrachtungen über die Lichtemission der Sonne . . . und eigene Beobachtungen liessen es mir unwahrscheinlich erscheinen, dass erhitzte Gase selbst leuchten . . ." Weiter zeigt Siemens dann, dass

1) W. H. Julius, Arch. Néed. des sciences exactes **22.** p. 310. 1888.

2) R. v. Helmholtz, Die Licht- und Wärmestrahlung verbrennender Gase. Berlin (L. Simion) p. 69. 1890.

3) E. Wiedemann, Wied. Ann. **37.** p. 215. 1888.

4) W. Siemens, Wied. Ann. **18.** p. 311. 1883.

Sauerstoff, Kohlensäure, Stickstoff und Wasserdampf bei einer Temperatur von mehr als 1500° C. keine Lichtstrahlen aussenden.[1])

§ 2. Demnach ergeben sich zwei wichtige Fragen über das Leuchten der Gase:

1. Haben Gase die Fähigkeit durch blosse Temperaturerhöhung leuchtend zu werden?

2. Können wir gasförmige Lichtquellen herstellen, welche den Bedingungen des Kirchhoff'schen Gesetzes genügen?

Es ist klar, dass durch Verneinung der ersten Frage die zweite sich von selbst erledigen würde, und dass mithin durch Bejahung der zweiten Frage die erste ebenfalls in bejahendem Sinne entschieden wäre.

2. Natrium im Ofen.

§ 3. Um eine Antwort auf diese Fragen zu erlangen, schien es mir am zweckmässigsten, zunächst solche Gase der Untersuchung zu unterwerfen, welche besonders bequem und bei verhältnissmässig niedrigen Temperaturen zum intensiven Leuchten zu bringen sind und ein möglichst charakteristisches Spectrum besitzen. Ich begann meine Versuche daher mit *Natrium*.

Zunächst suchte ich Natrium unter Ausschluss der Verbrennung und anderer chemischer Veränderungen durch blosses Erhitzen zum Glühen zu bringen. Zu diesem Zwecke wurde ein Ofen construirt, dessen zweckmässige Einrichtung ich der gütigen Unterstützung des Directors der Königlichen Porzellanmanufactur, Hrn. Dr. Heinecke verdanke.

Der zu erhitzende Körper befindet sich in einem Rohr von unglasirtem Porzellan, dessen Länge 60 cm, dessen lichte Weite 3,6 cm beträgt. Das Rohr ragt an beiden Enden etwa 11 cm aus dem Ofen heraus und wird in einer Länge von 22 cm von den Flammen umspült. Die Heizvorrichtung ist aus der Fig. 1 p. 431, welche einen Querschnitt des Ofens darstellt, ersichtlich, alle schraffirten Theile sind aus Chamotte hergestellt. Auf jeder Seite befinden sich vier grosse Bunsenbrenner a, a_1 von 2 cm Durchmesser, deren Flammen in dem Luft-

1) Vgl. auch W. Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 587. 1879 und 19. p. 73. 1883.

canal b, b_1 emporsteigen und durch den Schlitz S von oben in den Raum c, c_1 gelangen, wo sie das Porzellanrohr P umspülen. Die Verbrennungsgase ziehen durch den etwa 80 cm langen eisernen Schornstein d nach unten ab und gelangen durch das mit einer Klappe K versehene Rohr e in den Kamin des Hauses. Der Schornstein d ist von einem eisernen Mantel umgeben, welcher unten mit Luftlöchern versehen ist. Durch diese tritt die Luft in den Hohlraum f, f_1, wird dort durch die Hitze der durch d abgeführten Verbrennungsgase vorgewärmt und durch Canäle g, g_1 an die Oeffnungen der Bunsenbrenner geführt. Der Ofen ist durch einen abnehmbaren Deckel D geschlossen, welcher in seiner Mitte eine durch einen Chamottestöpsel C verschliessbare Oeffnung besitzt.

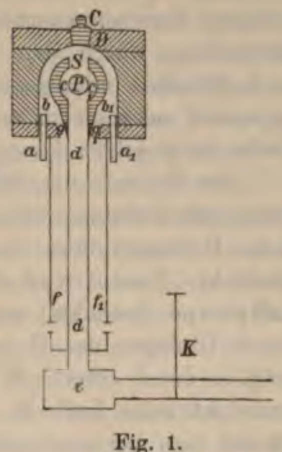


Fig. 1.

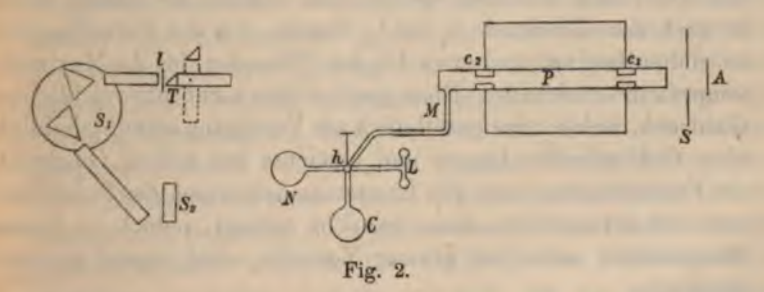


Fig. 2.

Durch diese kann man während des Brennens in den Flammenraum hineinsehen, die Verbrennung controlliren und danach die Luftzufuhr durch Drehen der Klappe K regeln. Das Porzellanrohr ist auf der einen Seite durch eine aufgekittete Messinghülse verlängert, in welche ein Messingrohr M (Fig. 2) seitlich einmündet, und an beiden Enden durch nahezu planparallele Glasplatten geschlossen, die durch eine Messingverschraubung mit Hülfe von Luftpumpenfett luftdicht angepresst werden können. Die Enden des Rohrs werden durch eine

Wasserspülung abgekühlt, sodass der Kitt und das Fett auch bei noch so langer Brenndauer stets fest und dicht bleiben. Das Rohr *M* ist durch Glasröhren und kurze, sorgfältig gedichtete Kautschukverbindungen mit einem Vierweghahn *h* verbunden, durch den man das Porzellanrohr abwechselnd nach Belieben mit einer Luftpumpe *L*, einem Kohlensäureapparat *C* oder einem mit Stickstoff gefüllten Gasometer *N* in Verbindung setzen kann.

Der Betrieb des Ofens ist ein sehr einfacher. Die zu erhitzende Substanz wird in kleinen Porzellanschiffchen in das Rohr *P* eingeschoben und die Glasfenster werden fest aufgeschraubt. Darauf wird das Innere des Porzellanrohrs mit der Luftpumpe zunächst möglichst weit ausgepumpt und dann durch Umlegen des Hahnes *h* mit einem der neutralen Gase gefüllt; durch öfteres Wiederholen dieser Operation wird die atmosphärische Luft so weit als möglich beseitigt. Darauf zündet man bei abgenommenen Deckel *D* die Bunsenbrenner an und lässt die Verbrennungsgase zunächst mit Luft gemischt durch den Ofen in den Schornstein gehen. Wenn das Porzellanrohr genügend angewärmt ist, setzt man den Deckel *D* auf den Ofen und überlässt diesen sich selbst. Es dauert dann je nach dem Gasdruck $^1/_4$ bis $^1/_2$ Stunde, ehe das Porzellanrohr zu glühen beginnt, und etwa $1^1/_2$ bis 2 Stunden, bis die Maximaltemperatur erreicht ist. Diese ging bei dem nicht sehr reichlichen Gasdruck, welcher mir gewöhnlich zur Verfügung stand, erheblich über Goldschmelze hinaus und erreichte bei hohem Gasdruck die Feldspathschmelze. Ein langsames Anwärmen des Porzellanrohrs ist erforderlich, damit es nicht springt; jedoch ist dieses Missgeschick auch bei grosser Vorsicht nicht immer zu vermeiden.

§ 4. Das Innere des glühenden Porzellanrohrs wurde spectroskopisch untersucht und zwar konnte sowohl das Absorptions- als das Emissionsspectrum beobachtet werden. Als Lichtquelle für die Absorptionsbeobachtungen diente eine Argandlampe *A* (Fig. 2), welche hinter einem Schirm *S* so aufgestellt war, dass ihr Licht durch die beiden Glasfenster des Porzellanrohrs hindurchging. Eine durch eine Klappe verschliessbare Oeffnung des Schirmes *S* erlaubt das Licht der Lampe nach Belieben abzuschneiden, wenn man das Emissions-

spectrum untersuchen will. Um die von der glühenden Ofenwand ausgehenden Strahlen abzublenden und gleichzeitig die Hitze im Ofen zusammenzuhalten, werden in das Innere des Porzellanrohrs zwei central durchbohrte Chamottecylinder c_1 und c_2 eingesetzt, jedoch soweit an das Ende des Porzellanrohrs, dass sie nicht ins Glühen gerathen; die Weite der Durchbohrung beträgt 1 cm. Um nach Belieben in schneller Aufeinanderfolge mit grosser oder geringer Dispersion arbeiten zu können, stellte ich ein totalreflectirendes Prisma T auf einem Arm drehbar vor dem Collimatorrohr eines grossen Spectralapparates S mit zwei Rutherford'schen Prismen auf. Wenn das Prisma T bei Seite geschoben ist (diese Stellung ist in Fig. 2 punktirt) kann das die Axe des Rohrs P durchsetzende Licht ungehindert in den grossen Spectralapparat eindringen und wird dort in ein Spectrum von so grosser Dispersion zerlegt, dass die beiden Natriumlinien deutlich getrennt erscheinen; wird dagegen das Prisma T vor den Collimator gebracht, welche Stellung durch einen Anschlag fixirt ist, so wird das Licht seitwärts abgelenkt und durch ein Prisma mit gerader Durchsicht S_2 bei verhältnissmässig kleiner Dispersion, dafür aber erheblich grösserer Intensität beobachtet. Dieses Spectrum zeigt die beiden Natriumlinien nicht getrennt. Das Ocular des Spectralapparates S_1 befindet sich unmittelbar neben diesem Prisma S_2, sodass der Beobachter, ohne seine Stellung zu verändern, nach Belieben mit grosser oder kleiner Dispersion (durch Umlegen des Prismas T), im Absorptions- oder Emissionsspectrum (durch Oeffnen oder Schliessen der Klappe des Schirmes S) arbeiten kann. Zur Einstellung der Spectralapparate und um stets die Stelle der Natriumlinie im Spectrum zu finden, bediene ich mich der von mir beschriebenen Einrichtung[1]), welche dem Beobachter erlaubt, von seinem Platze aus nach Belieben in der über 3 m entfernten Argandlampe abwechselnd weisses und Natriumlicht zu erzeugen.

Der Spalt des Spectralapparates S_1 war herausgenommen und wurde durch einen bei den verschiedenen Versuchen an verschiedenen Stellen angebrachten Spalt ersetzt, von welchem durch eine Convexlinse l ein reelles Bild in der Focalebene des Collimatorobjectivs entworfen wurde.

1) E. Pringsheim, Wied. Ann. **45**. p. 426. 1892.

Die Beobachtung durch das Prisma S_2 geschieht mit blossem Auge, indem man direct auf den Spalt accommodirt. Die Entfernung beider Apparate von dem Ofen ist so gross, dass keine von den Seitenwänden des Ofens ausgehende Strahlen in sie eindringen können. Das Porzellanrohr ist bei nicht zu starker Gluth ebenso luftdicht wie in der Kälte, man kann es mit der benutzten zweistiefligen Luftpumpe mit Leichtigkeit bis auf etwa 1 cm Quecksilberdruck auspumpen, und die Luft dringt dann so langsam ein, zweifellos zwischen den Glasplatten und den Enden des Rohrs, dass der Druck in einer Stunde etwa um 0,5 cm steigt. Erst bei heller Rothgluth zeigt sich das unglasirte Porzellan unter Druck merklich undicht für Luft.

§ 5. Die ersten Versuche wurden mit kohlensaurem Natron angestellt, sie ergaben ein negatives Resultat; *auch bei den höchsten erreichbaren Temperaturen war weder im Emissions- noch im Absorptionsspectrum eine Spur der Natriumlinien zu entdecken,* gleichgültig ob die Beobachtung in Luft, N oder CO_2 angestellt wurde. Das selbe Ergebniss hatten Versuche mit Chlornatrium. Erst bei Anwendung von metallischem Natrium trat das gesuchte Spectrum auf. Die Versuchsanordnung war folgende. Zwischen der Lampe A und dem Rohr P war ein linearer Spalt von ungefähr 1 mm Breite angebracht, sodass das Natriumlicht der Argandlampe in den Spectroskopen ein, resp. zwei Natriumlinien lieferte, und das weisse Licht der selben Lampe ein ziemlich reines Spectrum bildete. Als Spalt für das Emissionsspectrum des glühenden Natriumdampfes diente dagegen die Durchbohrung des Chamottecylinders c_2, sodass dieses Spectrum ein, bez. zwei gelbe Kreise an Stelle der D-Linien zeigte. Das metallische, sorgfältig von Oxyd befreite Natrium wurde in kleinen Quantitäten von einigen Zehntelgramm in einem Porzellanschiffchen in den Ofen eingeführt, und dieser dann mit von O möglichst befreitem N gefüllt. Bei beginnender Rothgluth verdampft das Natrium und bildet einen farbigen Dampf, dessen Absorptionsspectrum eine Reihe von Banden zeigt. Auf diese Erscheinung soll später näher eingegangen werden. Mit steigender Temperatur wird der Dampf schnell heller und bald vollständig durchsichtig. Jetzt zeigt er eine deutliche Emissionslinie bei D und ebenso

im Absorptionsspectrum an der gleichen Stelle zwei starke schwarze balkenartige Linien, deren Breite von der Dichtigkeit des Dampfes abhängt und häufig so gross ist, dass der Zwischenraum zwischen beiden Linien in dem grossen Apparat vollständig verschwindet. Ausserdem ist stets noch ein schwaches, continuirliches Emissionsspectrum vorhanden, welches nicht durch blosse Reflexion der von dem glühenden Ofenrande ausgehenden Strahlen an der hinteren Glasplatte, sondern durch die glühende Gasmasse selbst oder in ihr suspendirte Theilchen erzeugt wird, wovon man sich durch Entfernen des Glasfensters leicht überzeugen kann. Die gleichen Erscheinungen zeigen sich, wenn man das Natrium nicht in N, sondern in atmosphärischer Luft verdampft. Nur tritt hier auch schon während des Verdampfens an der glühenden Natriumoberfläche gelbes Natriumlicht auf. Dies erklärt sich daraus, dass beim Verdampfen das im Ofen befindliche O dazu verwendet wird Natrium zu oxydiren, sodass dann kein O mehr im Ofen sich befindet. Oeffnet man die Fenster des Ofens, so hört nach kurzer Zeit die Lichterscheinung ganz auf, da alles Natrium oxydirt ist. Ist der Ofen mit N gefüllt, so destillirt das Natrium allmählich an die Enden des Rohrs hinüber, aber dies geht so langsam vor sich, dass man bei fortgesetztem Brennen des Ofens die Spectralerscheinung stundenlang ohne merkliche Veränderung der Intensität beobachten kann. Auf die Einzelheiten dieser Erscheinungen soll noch später eingegangen werden.

Sehr ähnliche Versuche sind schon früher von Lockyer[1]) und von Liveing und Dewar[2]) angestellt worden. Diese Untersuchungen bezogen sich lediglich auf die Absorptionsspectra und nur gelegentlich wird erwähnt, dass auch Emissionsspectra von Na und Th wahrgenommen wurden. Da die hier behandelte Frage zu jener Zeit keineswegs acut war, vielmehr niemand daran zweifelte, dass alles Leuchten der Gase wesentlich eine Function der Temperatur sei, so erregten diese Beobachtungen der Emissionsspectra kaum die Aufmerksamkeit der Experimentatoren, und diese

1) Lockyer, Proc. Roy. Soc. **22.** p. 371. 1874; Compt. rend. **78.** p. 1790. 1874.

2) Liveing u. Dewar, Proc. Roy. Soc. **27.** p. 132. 1878.

gaben sich keine Mühe, bei ihren Versuchen alle chemischen Vorgänge auszuschliessen.

§ 6. Es könnte scheinen, dass durch die beschriebenen Versuche die oben aufgestellten Fragen beantwortet seien, dass wir hier alle chemischen Umsetzungen ausgeschlossen und daher das Leuchten des Natriumdampfes als reine Function der Temperatur anzusehen hätten. Das ist jedoch keineswegs der Fall. Wenn man sich klar macht, eine wie ausserordentlich feine Reaction die Spectralbeobachtung ist, wie gering die Mengen der Substanz sind, welche man durch sie nachzuweisen im Stande ist, so sieht man leicht ein, dass, wenn das Leuchten eine Folge der Oxydation ist, eine ganz verschwindend kleine Menge O schon genügt, um die Spectralerscheinung hervorzurufen. Daraus folgt, dass es ein ganz vergebliches Bemühen ist, N oder irgend ein anderes Gas so vollständig von O reinigen zu wollen, dass der zurückbleibende Rest von O nicht genügte, um die Oxydation der zur Spectralreaction erforderlichen äusserst geringen Menge Natrium zu veranlassen. Hierzu kommt noch eins. Das Porzellanrohr selbst enthält O in Form von Silicaten, und es ist an sich sehr wahrscheinlich, dass das Natrium in der Glühhitze diese Substanzen reducirt. In der That wird die Oberfläche des Porzellanrohrs von dem glühenden Natrium angegriffen, und es bildet sich ein brauner glasiger Ueberzug, welcher neben metallischem Si, wie wir später sehen werden, Natriumsilicat enthält. Mithin kann das Natrium aus dem Porzellan selbst so viel O entnehmen, als es für die Oxydation und das dadurch hervorgebrachte Leuchten etwa brauchen würde. Ein Rohr aus Metall[1]), statt aus Porzellan, würde wohl kaum die nöthige Undurchlässigkeit für Gase in der Glühhitze besitzen und überdies würden solche Versuche auch nichts beweisen, da die vollständige Freiheit von O weder zu erreichen, noch durch irgend ein chemisches Mittel so nachweisbar ist, dass man das Leuchten nicht doch noch auf eine Oxydation schieben könnte. So sehr ist eben die Spectralanalyse allen anderen chemischen Methoden an Empfindlichkeit überlegen.

1) Vgl. auch p. 456 und 457.

3. Kalte Flammen.

§ 7. Wir müssen daher versuchen, auf einem anderen Wege eine Antwort auf unsere Frage zu finden. Setzen wir einmal voraus, dass sowohl in unserem Ofen als in Flammen das Leuchten des Na-Dampfes lediglich durch die Temperaturerhöhung bedingt sei, so muss die Minimaltemperatur, bei welcher das Leuchten im Ofen beginnt, die gleiche sein wie die niedrigste Flammentemperatur, bei der noch Na-Licht zu erzeugen ist. Wir werden also diese Annahme prüfen können, wenn wir die Temperaturen vergleichen, bei denen das Na-Spectrum in Flammen und in unserem Ofen sichtbar zu werden beginnt. Dazu ist es nöthig eine Flamme herzustellen, deren Temperatur wir beliebig herabdrücken können, bis unter die Grenze, welche zur Erzeugung des Na-Lichtes erforderlich ist. Versuche, eine solche Flamme durch Abkühlung einer Bunsenflamme mit Luft, CO_2 oder N zu erhalten, sind gescheitert, da auf diese Weise genügend tiefe Flammentemperaturen nicht zu erreichen waren. Ich musste mich daher nach anderen Mitteln umsehen. Für eine Flamme von möglichst geringer Temperatur ist die Hauptbedingung die, dass der Brennstoff eine möglichst geringe Entzündungstemperatur besitzt, da diese die Minimaltemperatur darstellt, bei welcher die Flamme eben noch brennen kann. Ich entschied mich daher für eine Mischung von Schwefelkohlenstoff und Luft, da ein Gemisch von CS_2 und Luft eine Entzündungstemperatur von nur 149° besitzen soll.[1])

Aus einem grossen Glockengasometer *G* (Fig. 3 p. 438), das etwa 0,1 cbm Luft fasste und dessen Füllung durch einen Blasebalg *B* geschah, strömte die Luft durch das Rohr r_1 aus und wurde dann mit Hülfe des T-Rohres T_1 in zwei Theile getheilt. Der eine Theil strömte durch r_2 in die mit CS_2 gefüllte Woulff'sche Flasche *W*, strich dort über die Oberfläche der Flüssigkeit hinweg und ging dann durch einen mikrometrisch verstellbaren Hahn h_1 in einen Gasvertheilungshahn *V*. Hier mischte er sich mit dem zweiten Theile, welcher von T_1 durch das Rohr r_3 und den Hahn h_2 direct nach *V* geleitet wurde. So-

1) Roscoe-Schorlemmer, Lehrb. d. Chemie. 7. Aufl. p. 120. 1882.

dann ging die Luft durch den Druckregulator *R*, von dort durch einen Kautschukschlauch in ein Glasrohr *B* von 1 cm Durchmesser, welches als Brenner diente. In der Woulff'schen Flasche *W* sättigte sich die Luft mit CS_2-Dämpfen und durch Einstellen des Hahnes h_2 und der Mikrometerschraube von h_1 konnte man das Mischungsverhältniss zwischen CS_2 und Luft beliebig variiren. Der Druckregulator *R* bestand aus zwei durch einen Kautschukschlauch communicirenden Glasröhren *a* und *b* von 5 cm Durchmesser; *b* war oben offen, *a* mit Hülfe eines luftdicht eingesetzten Korkes k_1, durch den das Glasrohr r_4 hindurchgesteckt war, in den Weg der mit CS_2-Dampf beladenen Luft eingeschaltet. Die beiden Glasröhren *a* und *b*

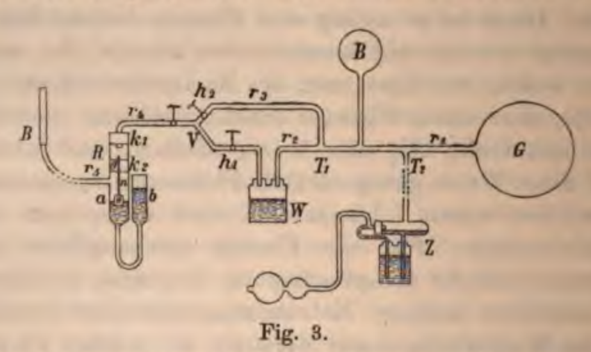


Fig. 3.

waren in ihrem unteren Theil mit Wasser gefüllt, in *a* befand sich ein Schwimmer *s*, der an einer langen, feinen Stahlnadel *n* hing. Diese Nadel ging durch ein enges Glasrohr *g* hindurch, welches durch einen im Rohr *a* luftdicht eingesetzten Kork k_2 gehalten wurde und trug an ihrem oberen Ende einen kleinen, sehr stark conisch zugehenden Knopf aus Siegellack, welcher je nach der Höhenstellung der Nadel die Oeffnung des Glasrohrs *g* mehr oder weniger weit frei liess und bei der tiefsten Stellung der Nadel vollständig verschloss. Die Luft strömte aus r_4 durch das Glasrohr *g* hindurch und durch das seitliche Ansatzrohr r_5 nach dem Brenner *B*. Sobald der Luftdruck in *a* unterhalb des Korkes k_2 steigt, sinkt das Wasserniveau und mit ihm der Schwimmer *s*; der Siegellackknopf der Stahlnadel verkleinert die freie Oeffnung des Glasrohrs *g* und damit den Luftdruck in *a*; lässt der Druck in *a* nach, so hebt sich die Nadel und vermehrt den durch *g* hindurchgehenden Luft-

strom. Durch passende Stellung des Rohrs *b* und geeignete Wahl der Wassermenge kann man bei jedem gewünschten Druck die Nadel *n* so einstellen, dass eine minimale Veränderung ihrer Stellung schon eine starke Veränderung des Luftstromes herbeiführt. Dann regulirt der Apparat sehr empfindlich. Jedoch ist es nöthig, die Schwingungen des Wassers zu dämpfen, weil sonst ein abwechselndes, tactmässiges Oeffnen und Schliessen des Glasrohrs *g* eintritt, und der Apparat nicht als Regulator, sondern als Motor arbeitet. Diese Dämpfung erreicht man durch eine dünne Oelschicht, welche man auf die Wasseroberflächen bringt.

Da die Flamme bei niedriger Temperatur sehr leicht ausging, wurde sie nicht direct an dem Glasrohr entzündet, sondern in einer geringen Höhe (etwa 3 mm) darüber an einem Ringe von feinem Platindraht, welcher durch einen electrischen Strom dauernd in dunkler Rothgluth erhalten wurde. An diesem Draht entzündet sich das CS_2-Luftgemisch fortdauernd und bildet über ihm eine scharfbegrenzte Flamme. Die Temperatur dieser Flamme kann sehr tief herabgedrückt werden, ihr Licht ist wenig intensiv, aber ausgeprägt blau und im verdunkelten Zimmer sehr deutlich zu erkennen. Die Temperatur und die erzeugte Wärmemenge ist so gering, dass man den Finger dauernd in die Flamme hineinhalten kann, ohne mehr als eine mässige Wärmeempfindung zu spüren. Durch das T-Rohr T_2 kann man mit Hülfe eines Zerstäubers *Z* eine Chlornatriumlösung der Luft beimischen und so in der Flamme bei genügend hoher Temperatur Na-Licht erzeugen.

4. Temperaturmessungen.

§ 8. Zur Temperaturmessung in den Flammen und dem Ofen dienten Thermonadeln. Zwei feine Drähte, Palladium und Platin, von 0,15 mm Durchmesser wurden mit Gold möglichst fein zusammengelöthet, sodass die Löthstelle ein ausserordentlich kleines Volumen besass. Diese Nadeln konnte man in die Flammen einführen und so die Temperatur an einer eng begrenzten Stelle messen. Für die Bestimmung der Ofentemperatur dienten Nadeln, die aus Drähten der selben Substanzen von 0,3 mm Durchmesser hergestellt waren. Die Messung des Thermostromes geschah mit einem Wiedemann'-

schen Galvanometer, bei dem ein kleiner Stabmagnet und ein ringförmiger Magnet zu einem astatischen System vereinigt waren. Um den Einfluss der Widerstandsänderung mit der Temperatur zu beseitigen, wurden grosse Widerstände in den Stromkreis eingeschaltet. Die Nadeln wurden in einem Paraffinbad geaicht, dessen Temperatur mit Quecksilberthermometern gemessen wurde; die Zahlenangaben unter 300° sind demnach bis auf etwa 1° richtig, die Angaben über 300° dagegen sind durch Extrapolation nach der linearen Formel gewonnen und haben daher nur die Bedeutung einer willkürlichen Scala. Dabei sind jedoch die mit verschiedenen Nadeln gefundenen Zahlen vollständig mit einander vergleichbar, da man annehmen darf, dass bei den verschiedenen, aus dem gleichen Material hergestellten Nadeln die Abweichung von dem linearen Gesetze die gleiche ist.

Zunächst wurde die CS_2-Flamme so regulirt, dass sie gerade noch regelmässig brannte; sie hatte dann eine sehr lange, spitze Gestalt und die häufig wiederholte Messung mit der Thermonadel an der heissesten Stelle unterhalb der Spitze ergab Temperaturen, welche zwischen 114 und 146° C. lagen. Wir können daher mit Sicherheit sagen, dass diese Flamme bei Temperaturen unter 150° noch brennt, also noch unterhalb der Entzündungstemperatur des brennbaren Gemisches, durch welches sie entsteht. Das dabei ausgesandte Licht hat eine ziemlich beträchtliche photographische Wirkung; das beigegebene Bild (Fig. 4) stellt ein Positiv dar, dessen Negativ Hr. W. Michelson in halber natürlicher Grösse anzufertigen die Güte hatte. Die Flamme zeigt ein continuirliches Spectrum, das im rothen Theil weit schwächer ist als im blauen und violetten; ein ebensolches Spectrum erhält man[1]), wenn man Schwefel in Luft anzündet und wenn man Schwefelwasserstoff verbrennt. Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, dass wir es hier mit Gasen zu thun haben, die lediglich infolge chemischer Processe, nicht in-


Fig. 4.

1) Kayser, Spectralanalyse. p. 322. 1883.

folge ihrer hohen Temperatur leuchten. Der continuirliche Eindruck des Spectrums ist vielleicht durch die Uebereinanderlagerung mehrerer Bandenspectra verursacht.

Bei diesen tiefsten Temperaturen ist es nicht möglich, eingespritztes Na zum Glühen zu bringen; dazu muss die Temperatur der Flamme bedeutend höher sein. Bringt man zunächst eine grössere Menge des Salzstaubes durch Einspritzen in die zur Flammenspeisung benutzte Luft und steigert allmählich durch Aufdrehen des Mikrometerhahnes h_1 die Zufuhr von CS_2 und damit die Temperatur der Flamme, so kommt man zu einem Punkt, wo ein schwaches gelbes Na-Licht unter der Spitze der Flamme auftritt. Man beobachtet diese Erscheinung am besten, wenn man die Flamme durch ein Prisma mit gerader Durchsicht betrachtet, da man dann durch das Eigenlicht der CS_2-Flamme weniger geblendet wird. Eine minimale Vermehrung der CS_2-Zufuhr verändert das Aussehen der Flamme sehr wesentlich, eine minimale Verringerung lässt das gelbe Licht vollkommen verschwinden, sodass es keine grossen Schwierigkeiten macht, die Flamme dauernd in unmittelbarer Nähe der Minimaltemperatur zu erhalten, bei der noch das Leuchten des Na eintritt. War dieser Zustand erreicht, so wurde die Thermonadel in die Mitte des gelbleuchtenden Theiles der Flamme gebracht und die Ablesung am Galvanometer vorgenommen. Wenn nach ihrer Vollendung das Aussehen der Flamme noch unverändert war und eine minimale Drehung des Mikrometerhahns h_1 genügte, um das gelbe Licht zum Verlöschen zu bringen, so konnte man mit Sicherheit annehmen, dass man die gewünschte Temperatur annähernd richtig bestimmt hatte. Es fanden sich nach der willkürlichen Scala unserer Thermonadeln gemessen Temperaturen, die zwischen 1322 und 1357 lagen.

§ 9. Zur Messung der Temperatur im Ofen wurden die Drähte der dazu benutzten Thermonadeln mit Asbestfäden umwickelt und durch das Messingrohr in die Mitte des Ofens eingeführt. Mittelst eines T-förmigen Glasrohres, in dessen einen Schenkel die Drähte luftdicht eingekittet waren, während die beiden anderen Schenkel zu dem Messingrohr resp. zu der Luftpumpe führten, wurden die Drähte der Thermonadel zu einem Quecksilbercontacte hingeleitet, welcher die Verbindung

mit dem Galvanometer vermittelte. Die Beobachtungen wurden mit Hülfe des Prismas S_2 ohne Spalt ausgeführt, da diese Anordnung die grösste Empfindlichkeit ergab. Dabei wurde immer abwechselnd bei steigender Temperatur der Moment des Erscheinens und bei abnehmender der des Verschwindens der Emission des Na-Lichts beobachtet; beide Zahlen stimmen ausnahmslos sehr gut überein. Alle auf diese Weise gefundenen Zahlen für die Minimaltemperatur, bei welcher das Licht des Natriums im Ofen zu beobachten war, ergaben Werthe zwischen 1050 und 1080.

Demnach würde es scheinen, als ob die Leuchttemperatur des Na im Ofen erheblich unterhalb der in den Flammen gefundenen läge. Jedoch muss man gegen die Vergleichbarkeit beider Zahlen ernste Bedenken haben. Was wir hier beobachtet haben, ist nicht die Temperatur, bei welcher das Na bei der benutzten Versuchsanordnung anfängt, sein charakteristisches Licht auszusenden, sondern es ist die Temperatur, bei welcher unser Auge beginnt dieses Licht wahrzunehmen. Und wie gross die Intensität des Lichtes sein muss, damit wir es wahrzunehmen im Stande sind, das hängt von den mannigfachsten Umständen ab. Zunächst ist es von der grössten Wichtigkeit, in welchem Zustande sich unser Auge befindet, und bis zu welchem Grade alles fremde Licht abgehalten ist. Und in der That konnte die gute Uebereinstimmung der Versuche untereinander nur dadurch erreicht werden, dass man alles fremde Licht so vollständig wie irgend möglich auszuschliessen suchte und dass man stets mit vollkommen ausgeruhtem Auge an die Beobachtungen ging. Da nun das Nebenlicht bei den Flammen ein nicht unerheblich helleres war, als bei dem Ofen, so würde sich schon daraus die gefundene Temperaturdifferenz wenigstens zum grossen Theil erklären lassen. Ferner ist für die Intensität der Lichtemission die Dicke der strahlenden Schicht und die Dichtigkeit des Natriums von der grössten Bedeutung und bei gleicher Intensität schwach leuchtender Flächen hängt die Wahrnehmbarkeit sehr wesentlich von ihrer Ausdehnung ab. Aus allen diesen Gründen ist daher eine genaue Vergleichung der bei dem Ofen und bei den Flammen gefundenen Zahlen nicht zulässig. Wir dürfen daher aus diesen Versuchen weder den

Schluss ziehen, dass die Temperatur, bei welcher die Lichtemission der Na beginnt, für die Flammen und den Ofen die gleiche ist, noch den, dass beide Temperaturen wesentlich verschieden sind.

Dagegen ist durch diese Versuche festgestellt, *dass Natriumsalze in Flammen das für das Na charakteristische Licht bei Temperaturen aussenden, bei welchen sie durch blosses Erhitzen in neutralen Gasen keine Spur von Lichtemission zeigen, dass dagegen metallisches Na im Ofen in neutralen Gasen erhitzt das gleiche Emissionsspectrum hat wie die Natronsalze in den Flammen.*

Daraus folgt, dass das Leuchten des Na in den Flammen nicht in der Weise zu Stande kommt, wie man es sich allgemein vorgestellt hat [1]), dass nämlich die Salze verdampfen und infolge der hohen Temperatur dissociirt werden. Denn wenn das der Fall wäre, müsste das gleiche auch bei der Erwärmung im Ofen stattfinden und die Natronsalze müssten hier dasselbe Spectrum zeigen wie in der Flamme von gleicher Temperatur. Wir müssen daher schliessen, dass das Leuchten der Natronsalze in den Flammen eine Folge von chemischen Einwirkungen ist, welche beim blossen Erhitzen der selben Salze im Ofen nicht eintritt.

5. Reduction der Salze im Ofen.

§ 10. Welcher Art können diese chemischen Einwirkungen in den Flammen sein? Directe Oxydationsvorgänge sind ausgeschlossen, da die Salze im Ofen in einer Atmosphäre von Luft nicht leuchten, es müssen also Reductionsvorgänge sein, die das Licht verursachen. Und in der That sind wir im Stande durch diese selben Reductionsvorgänge auch in unserem Ofen die Salze zum Glühen zu bringen. Dies können wir entweder mit dem selben Reductionsmittel thun, welches in den Bunsenflammen thätig ist, nämlich dem Leuchtgas oder auch, was wegen der grösseren chemischen Uebersichtlichkeit angenehmer ist, mit Wasserstoff. Zu diesem Zwecke wurde folgende Anordnung getroffen. (Fig. 5.) Das An-

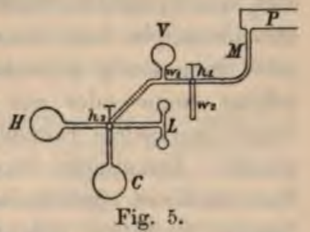


Fig. 5.

1) Vgl. Kayser, Spectralanalyse. p. 19. 1883; Mousson, Physik. 2. p. 558. 1881.

satzrohr M des Porzellanrohrs P war zunächst mit einem
weghahn h_1 verbunden, dessen einer Weg w_1 zu dem Vi
hahn h_2 führt. Dazwischen zweigte ein T-Rohr zu einem Va
meter V ab, welches den Druck im Rohre P abzulesen ges
Die drei anderen Wege des Hahnes h_2 waren mit der Luftpu
einem Kohlensäureapparat C und einem Wasserstoffapp
verbunden. Zwischen h_2 und C resp. H war je ein mit c
trirter Schwefelsäure gefüllter Trockenapparat angebrach
Weg w_2 des Hahnes h_1 wurde entweder mit der Leucht
tung in Verbindung gesetzt, oder er diente zum Einlass
mosphärischer Luft in das Porzellanrohr. Der Spalt befa
zwischen dem Rohr P und den Spectralapparaten. Die
Beobachtungen wurden mit einem häufig vorher zu den Ver
mit metallischem Na benutzten Porzellanrohr ausgeführt,
innere Oberfläche mit dem schon oben (p. 436) erwä
glasigen Ueberzug bedeckt war. Wurde dieses Rohr l
atmosphärischer Luft, Stickstoff oder Kohlensäure erhit
zeigte sich keine Spur von Absorption oder Emission der D-l
wenn man es jedoch im glühenden Zustande mit Hülf
Luftpumpe auspumpte und dann Wasserstoff aus dem Appa
zuliess, so trat die Emission und Absorption sofort sehr de
ein. Wenn man jetzt den Wasserstoff aus dem Rohr P w
auspumpt, so nimmt die Erscheinung an Intensität und I
der Linien sehr stark ab, bleibt aber selbst bei der stär
erreichbaren Verdünnung noch sichtbar. Lässt man dan
zuströmen, so bleibt die Absorption und Emission unverä
bestehen, hört dagegen sofort auf, wenn man an Stelle
CO_2 atmosphärische Luft einströmen lässt. Ganz die gle
Erscheinungen kann man beobachten, wenn man in ein
oder noch wenig gebrauchtes Porzellanrohr, welches leer
erhitzt keine oder nur sehr schwache Spuren der D-
zeigt, unglasirte Porzellanschiffchen mit Natronsalzen l
bringt. Untersucht wurden auf diese Weise folgende S
Natriumsilicat (gewöhnliches Natronwasserglas), Kiesels
Natron Na_2SiO_3, Natronhydrat NaOH, Kohlensaures N
Na_2CO_3, Doppelkohlensaures Natron $NaHCO_3$, Chlorna
NaCl und Bromnatrium NaBr. Die verschiedenen Salze u
scheiden sich nur durch die Intensität der Erscheinunge
stärksten wirkt NaOH, dann die kohlensauren Salze und

ziemlich gleich stark, ebenso das gewöhnliche Wasserglas, erheblich schwächer dagegen Na_2SiO_3. Nur bei NaBr konnte man auf diese Weise keine Emission oder Absorption erzielen, weil dieses Salz bei so geringen Temperaturen verdampft, dass es schon unterhalb der Rothgluth vollständig an die kalten Enden des Porzellanrohrs überdestillirt ist. Auf andere Weise gelang es jedoch bei NaBr die gleichen Erscheinungen zu beobachten. Bei NaCl wird der Versuch durch einen rothglühenden Dampf etwas beeinträchtigt, der das Rohr erfüllt, und dessen continuirliches Spectrum sich über das des Na lagert.

Durch diese Versuche ist nachgewiesen, *dass das Leuchten der Natronsalze in den Flammen durch die Reduction dieser Salze hervorgerufen und dass in den Bunsenflammen diese Reduction durch das Leuchtgas selbst hervorgebracht wird.* [1])

§ 11. Die Lichtemission und Absorption der Natronsalze bei den hohen Temperaturen des Ofens tritt nicht nur auf, wenn wir sie durch *H* oder Leuchtgas reduciren, sondern ebenso, wenn wir andere Reductionsmittel anwenden. Diese Beobachtung wurde zuerst bei einer Versuchsanordnung gemacht, welche eine schnellere Untersuchung von verschiedenen Salzen gestatten sollte, als die bis jetzt angewandte Methode. Da es nicht gut angeht, die Porzellanschiffchen in dem Ofenrohr zu wechseln, während es sich in starker Gluth befindet, so war es bei den bisherigen Versuchen nicht möglich, während eines Brandes mehr als ein einziges Salz zu untersuchen; und da der Ofen sich nach Auslöschen der Flammen sehr langsam abkühlt, und das Anheizen dann wieder längere Zeit in Anspruch nimmt, da ferner des Gasdruckes wegen nur gegen Abend mit Erfolg gearbeitet werden konnte, so war es nur in seltenen Fällen möglich täglich mehr als einen Brand zu machen. Um nun

1) Bei den äussersten, erreichbaren Temperaturen, oberhalb der Goldschmelze, zeigt sich auch in Luft und CO_2 ein sehr schwaches Natriumspectrum, wenn sich Natronsalze in grosser Menge im Ofen befinden. Dies rührt wahrscheinlich davon her, dass ein Theil des Salzes sich dissociirt und dass das so erzeugte metallische Na dann als Reductionsmittel wirkt. (Vgl. p. 452). In den Flammen kann dieser Process nicht in Betracht kommen, weil die Reduction durch das Leuchtgas und die damit verbundene Lichterscheinung unverhältnissmässig stärker ist. Uebrigens ist es sehr wahrscheinlich, dass auch bei der Dissociation das Leuchten als directe Folge des chemischen Processes eintritt.

während eines Brandes nach einander mehrere Salze anw zu können, wurde folgende Einrichtung getroffen. Zw den Hahn h_1 und das Rohr *M* wurde ein T-Rohr ein (Fig. 6), dessen senkrecht nach oben gerichteter freier Sc in einen Glashahn h_3 mit 5 mm weiter Durchbohrung mü Dieser Hahn war in Verbindung mit einem Luftpumpensc *s*, an dessen anderem Ende abwechselnd nacheinande leichter Mühe kleine Glasgefässe *g* schlossen werden konnten, von denen eines der zu untersuchenden Salze i lichst gut getrocknetem und fein risirtem Zustande enthielt. Durc passendes Stativ wurde für gewöhnli Gefäss *g* in der in der Figur ge neten Stellung festgehalten. In diese lung wurde der Hahn h_3 geöffnet un das Porzellanrohr *P* mit dem damit municirenden Gefässe *g* luftleer gep darauf wurde der Hahn h_3 geschlosse

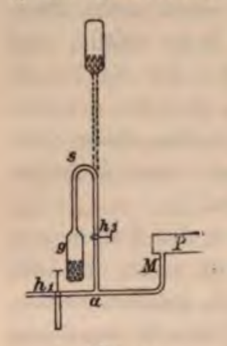


Fig. 6.

Gefäss *g* in die in der Figur punktirte Stellung übe Hahn gebracht und eine kleine Menge des Salzes in den geschüttet. Sodann wurde das Gefäss *g* wieder in ursprüngliche Lage zurückgebracht und der Hahn h_3 geö so dass das Salz in das T-Rohr hineinfiel und bei *a* l blieb. Jetzt wurde der Hahn h_3 wieder geschlossen und liess durch passende Stellung der Hähne h_1 und h_2 eine zur Verfügung stehenden Gase einströmen. Das Gas r das in *a* liegende Salzpulver mit und spritzt es in das Porz rohr *P*. Da zu diesem Zwecke ein starker Gasstrom r ist, so muss man zu diesen Versuchen die Trockenap zwischen h_2 und *C* resp. *H* entfernen, da diese ein sch Durchströmen des Gases nicht gestatten.

Bei diesen Versuchen ergab sich in Uebereinstimmun den oben beschriebenen für alle Salze, und hier auch für dass die D-Linien im Emissions- und Absorptions-Spectru fort auftreten, wenn man die Salze mit einen Strom oder Leuchtgas einspritzt, dass aber die Erscheinung aus wenn man Luft oder CO_2 dazu benutzt. Die eingesp Salze fallen bei dieser Anordnung direct auf die Obe

des Porzellanrohrs und bilden, da sie das Porzellan in der Glühhitze angreifen, eine unangenehme Verunreinigung. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, führte ich in das innere des Porzellanrohrs, soweit es der Gluth ausgesetzt ist, ein dünnwandiges Eisenrohr ein, welches die Porzellanoberfläche schützen sollte. Wurden die Versuche jetzt wiederholt, so ergaben sie ganz andere Resultate als ohne das Eisenrohr. Jetzt nämlich erschienen die D-Linien beim Einspritzen der Salze in allen Gasen, ebenso in Luft und CO_2, wie in *H* und Leuchtgas. Dabei wurde das Eisenrohr stark angegriffen und zeigte bald in der Glühhitze, auch wenn kein Salz mehr eingespritzt wurde das Na-Spectrum sehr deutlich. Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, dass das Leuchten in Luft und CO_2 bei diesen Versuchen dadurch hervorgebracht ist, dass das Eisen die Natronsalze reducirt. [1])

Ebenso wie das Eisen, kann auch die Kohle als Reductionsmittel dienen.[2]) Um dies zu zeigen, brachte ich in das jetzt nicht mit dem Eisenrohr versehene Porzellanrohr bei der in Fig 5 dargestellten Versuchsanordnung ein Porzellanschiffchen mit einem Gemisch von Na und Holzkohle. Auch hier trat die Lichterscheinung auf und zwar in CO_2, H und Leuchtgas, in Luft dagegen blieb sie aus, ohne Zweifel weil die Kohle verbrennt.

Wir haben also eine Reihe verschiedener Mittel, um die Natronsalze im Ofen zum Glühen zu bringen. Alle diese Mittel beruhen auf dem gleichen Princip: Die Salze werden reducirt,

---

1) Da auch das metallische Natrium das Eisen in der Glühhitze sehr stark angreift, so können die oben erwähnten Versuche von Liveing und Dewar noch viel weniger als unsere Versuche mit metallischem Na als Beweis dafür angesehen werden, dass Na durch blosses Erhitzen zum Leuchten gebracht werden kann. Denn Liveing und Dewar haben ihre Versuche in einem Eisenrohr angestellt, wobei das ganze Na, welches verdampft, sich mit dem Eisen zu Natriumverbindungen umsetzt, um dann bei den höheren Temperaturen durch chemische Processe leuchtend wieder ausgeschieden zu werden. Hier kann also von einem Ausschluss aller chemischen Vorgänge noch viel weniger die Rede sein, als bei unseren Versuchen mit Natrium im Porzellanrohr.

2) Die Reduction der Metallsalze im Ofen durch C und Al haben Liveing und Dewar schon bei der Untersuchung der Absorptionsspectra von Cs und Rb mit Erfolg angewendet. Proc. Roy. Soc. **28.** p. 352. 1879.

das glühende Na wird durch chemische Processe dargestellt. Das gleiche gilt von den Flammen. Auch hier glüht das Na, indem es durch chemische Vorgänge aus seinen Salzen ausgeschieden wird.

6. Unterbrechung der Reduction.

§ 12. Durch diese Erkenntniss ist aber die Frage nach dem Wesen des Leuchtens selbst noch keineswegs entschieden. Es ist immer noch möglich anzunehmen, dass das durch chemische Mittel reducirte Na dann, nachdem es reducirt ist, infolge der hohen Temperatur leuchtet, und dass es ebenso leuchten würde, wenn man es nicht bei der Glühhitze reduciren, sondern in metallischem Zustande auf die gleiche Temperatur bringen würde. Und dafür scheinen auch die früheren Versuche mit metallischem Na zu sprechen.

Wenn diese Annahme richtig ist, wenn das Leuchten des Na eine blosse Function der Temperatur ist, so muss die durch Reduction der Salze im Ofen hervorgerufene Lichterscheinung zunächst unverändert fortbestehen, wenn man den Reductionsvorgang plötzlich unterbricht, ohne die Temperatur zu ändern. Denn das einmal reducirte Na wird dann infolge der hohen Temperatur so lange weiter leuchten, als es sich in dem heissen Raume des Ofens befindet, also so lange, bis es an die kalten Enden des Porzellanrohrs hinüberdestillirt ist. Dieses Herausdestilliren aus dem 22 cm langen glühenden Theile des Rohrs muss aber allmählich vor sich gehen; dagegen wird die Lichterscheinung ganz plötzlich aufhören müssen, wenn sie lediglich durch die chemische Reaction selbst bedingt ist und diese Reaction plötzlich unterbrochen wird.

Um diese plötzliche Unterbrechung des Reductionsvorganges zu bewerkstelligen, wurde folgende Einrichtung getroffen. Das bisher benutzte, 60 cm lange Porzellanrohr *P* wurde durch ein 70 cm langes Rohr ersetzt, welches so in den Ofen eingelegt wurde, dass es auf der einen Seite nur etwa 6 cm, auf der anderen 27 cm aus ihm hervorsah. Zur Aufnahme der Salze diente ein kleiner Nickellöffel *l* (Fig. 7), dessen Stiel *s* an einem eisernen Ringe *r* von 3 cm Breite befestigt war. Der Ring passte genau in das Porzellanrohr hinein, seine

Fig. 7.

Oberfläche wurde gut polirt, sodass er sich mit geringer Reibung im Rohr hin- und herschieben liess. Die Länge des Nickellöffels betrug 2 cm, seine Breite 1 cm und seine Tiefe 0,5 cm, die ganze Länge des kleinen Apparates 22 cm. Diese Vorrichtung wurde mit dem Löffel nach vorn in den 27 cm aus dem Ofen hervorragenden Theil des Porzellanrohrs eingeführt; ein hufeisenförmiger, von zwei Accumulatoren gespeister Electromagnet griff mit seinen Polen um das Porzellanrohr herum und war an einer Führung längs des aus dem Ofen herausragenden Rohrendes verschiebbar. Seine Pole standen dem Eisenringe im Ofen gegenüber, und dieser folgte daher den Bewegungen des Electromagneten. Stand der Magnet am Ende des Rohrs, so befand sich der Löffel mit dem Salze in dem Porzellanrohr ausserhalb der Gluth, wurde der Electromagnet bis an die äussere Wand des Ofens vorgeschoben, so bewegte sich der Löffel im Rohr gleichzeitig bis in die Mitte der Gluth hinein. Auf diese Weise konnte man den Nickellöffel mit dem zu untersuchenden Salze beliebig in die Gluth hinein- und aus ihr herausschieben. Damit das letztere möglichst schnell von Statten ging und das Verhalten der Spectralerscheinung gleichzeitig beobachtet werden konnte, war die Einrichtung so getroffen, dass man mit Hülfe einer über einige Rollen gehenden Schnur vom Beobachtungsplatze aus den Electromagneten zurückziehen und damit den Löffel aus der Gluth entfernen konnte.

§ 13. Die Erscheinungen beim Einschieben des Löffels sind folgende: Ist er bloss mit einem Natronsalze gefüllt (bei diesen Versuchen wurde stets Na_2CO_3 benutzt), so tritt die Spectralerscheinung, wie sich nach unseren vorhergegangenen Versuchen von selbst versteht, nur auf, wenn sich H oder Leuchtgas im Porzellanrohr befindet. Da jedoch stets, ausser bei einem ganz neuen Porzellanrohr, die Oberfläche des Rohrs mit Natriumsilicat bedeckt ist, so sind die *D*-Linien hier schon deutlich, wenn auch nicht sehr stark, zu sehen, wenn sich das Na_2CO_3 noch an dem kalten Ende des Rohrs befindet. Schiebt man jetzt den Löffel in die Gluth, so vergeht eine kurze Weile, bis das Salz eine genügend hohe Temperatur erlangt hat, dann beginnen die Linien im Emissionsspectrum heller und breiter, im Absorptionsspectrum dunkler und breiter zu werden, bis

nach kurzer Zeit ein stationärer Zustand erreicht ist. Da hier, wie in allen anderen Fällen, die Erscheinungen im Absorptions- und Emissionsspectrum vollständig parallel gehen, so wurde vorzugsweise das Absorptionsspectrum beobachtet, da in diesem die Phänomene besser und schärfer hervortreten. Auch in der Beschreibung wollen wir uns von jetzt ab nur auf das Absorptionsspectrum beziehen. Ist das Porzellanrohr mit CO_2 oder Luft gefüllt, so treten die *D*-Linien natürlich nicht auf, gleichgültig ob das $NaCO_3$ sich in der Gluth oder in der Kälte befindet.

Um die Spectralerscheinung auch in CO_2 und Luft hervorzubringen, muss man entweder in den mit Na_2CO_3 gefüllten Nickellöffel etwas Eisen bringen (einige Stückchen dünnes Eisenblech genügen vollkommen), oder man kann den Nickellöffel durch einen Eisenlöffel ersetzen. In diesem Falle treten die *D*-Linien in H und Leuchtgas noch stärker auf, als wenn das Eisen nicht vorhanden wäre, da die reducirenden Wirkungen des Wasserstoffs und des Eisens hier zusammenkommen. Fig. 8 gibt ein Bild des Absorptionsspectrums, wie es sich bei diesen Versuchen im grossen Apparate, z. B. am 6. November 1891 zeigte. Hierbei wurde ein mit Na_2CO_3 gefüllter, electromagnetisch verschiebbarer Eisenlöffel benutzt. Es zeigt die Fig. 8 a das Spectrum, wenn das Rohr mit H gefüllt ist und der Löffel sich am kalten Ende befindet; b das Spectrum, wenn das Rohr mit H gefüllt ist und der Löffel sich in der Gluth befindet; c das Spectrum, wenn das Rohr mit CO_2 gefüllt ist und der Löffel sich in der Gluth befindet; d das Spectrum, wenn das Rohr mit Luft gefüllt ist und der Löffel sich in der Gluth befindet.

a *b* *c* *d* *e*
Fig. 8.

In CO_2 und Luft sind die *D*-Linien nicht zu sehen, bevor der Löffel in die Gluth geschoben wird.

§ 14. Welche Erscheinungen sind nun zu erwarten, wenn der Eisenlöffel aus der Gluth herausgezogen wird?

Wenn das Leuchten eine blosse Function der Temperatur ist (Annahme I), so muss in H das in Fig. 8 b dargestellte Spectrum ganz allmählich in a übergehen, während das reducirte Natrium an die kalten Enden des Rohrs hinüberdestillirt;

in CO_2 und Luft muss die Erscheinung der Fig. 8c und d allmählich verschwinden.

Wenn dagegen das spectrale Leuchten nur im Moment des chemischen Umsatzes auftritt (Annahme II), so muss sich Fig. 8b ganz plötzlich in a verwandeln und die Fig. 8c und d müssen ganz plötzlich verschwinden.

In Wirklichkeit tritt nun folgendes ein. Fig. 8b geht beim Herausziehen des Löffels ganz plötzlich in a über, Fig. 8d verschwindet momentan, Fig. 8c geht ganz allmählich zurück bis auf einen in Fig. 8e dargestellten stationären Zustand, der dann fortdauernd erhalten bleibt, und über eine halbe Stunde lang unverändert beobachtet wurde. Pumpt man dann, wenn der in Fig. 8e wiedergegebene Zustand erreicht ist, die CO_2 aus dem Porzellanrohr aus, so verschwinden die *D*-Linien vollständig, und treten auch nicht wieder auf, wenn man das Rohr von neuem mit CO_2 füllt.

Also: bei H (und ebenso in Leuchtgas) und Luft gehen die Erscheinungen genau so vor sich, wie es der Annahme II entspricht, bei CO_2 ist die Erscheinung anders als es bei dieser Voraussetzung zu erwarten war. Aber auch hier entspricht der Vorgang nicht dem Bilde, das wir uns auf Grund der Annahme I gemacht hatten. Denn die Spectralerscheinung nimmt zwar bei Unterbrechung der chemischen Action, wie es diese Anschauung verlangt, langsam und allmählich ab, aber sie hört, nachdem sie einmal eingetreten ist, nicht mehr auf, so lange man das Porzellanrohr mit CO_2 gefüllt lässt. Würde die Abnahme des Natriumspectrums lediglich durch das Herausdestilliren des Natriumdampfes bedingt sein, so müsste sie continuirlich bis zum vollständigen Verschwinden der *D*-Linien weitergehen, während die Erscheinung in Wirklichkeit bei einem stationären Zustand (Fig. 8e) stehen bleibt.

7. Erklärung der Versuche mit Natronsalzen.

§ 15. Wenn die Beobachtung bei CO_2 also nicht die Erwartungen bestätigt, die wir auf Grund der Annahme II vorher gehegt hatten, so folgt daraus noch keineswegs, dass diese Annahme falsch ist. Vielmehr erklärt sich alles durch die Voraussetzung, dass in CO_2 der Reductionsvorgang, wenn auch in schwächerem Grade, bestehen bleibt, nachdem der

Eisenlöffel mit dem Na_2CO_3 aus der Gluth entfernt ist. Dann kann das leuchtende Na natürlich nicht mehr dem jetzt der Reaction entzogenen Na_2CO_3 entnommen werden, aber da die Oberfläche des Porzellanrohres mit Natriumsilicat bedeckt ist, welches, wie wir wissen, bei Reduction mit H die Spectralerscheinung deutlich hervorbringt, so ist auch nach Entfernung des Na_2CO_3 eine genügende Menge Natronsalz vorhanden, um bei fortdauernder Reduction das Spectrum der Fig. 8 *e* zu geben. Wodurch soll aber diese Reduction hervorgebracht werden? Man könnte annehmen, dass sich die CO_2 an der Reduction betheiligt, dass etwa C ausgeschieden wird, welcher nach Herausziehen des Löffels in dem Rohr zurückbleibt und die Reduction des Natriumsilicats bewirkt. Diese Anschauung ist jedoch nicht richtig, denn die Erscheinung ist nicht an das Vorhandensein von CO_2 gebunden, sondern sie geht im Vacuum in ganz gleicher Weise vor sich. Stellt man mit Hülfe der Luftpumpe im Porzellanrohr ein Vacuum her, sodass noch atmosphärische Luft von 1 cm Quecksilberdruck zurückbleibt, und hält dieses Vacuum durch fortgesetztes Pumpen längere Zeit aufrecht, so sind die Erscheinungen die gleichen wie bei CO_2. Beim Einschieben des Eisenlöffels mit dem Na_2CO_3 treten die D-Linien auf, beim Herausziehen gehen sie allmählich zurück und bleiben bei einem stationären Zustand stehen, der solange fortbesteht, als man das Vacuum aufrecht erhält. Tritt neue Luft ein, so verschwinden die D-Linien sofort. Daher ist diese Erscheinung nicht von der CO_2 abhängig, sondern die Reduction des Natriumsilicats nach Entfernung des Eisenlöffels muss eine andere Ursache haben. Diese Ursache kann nur in der Anwesenheit des metallischen Na bestehen, welches durch das Eisen aus dem Na_2CO_3 reducirt worden ist und nach der Entfernung des Löffels im glühenden Porzellanrohr zurückbleibt. In dem Momente also, in welchem der Löffel zurückgezogen wird, haben wir eine gewisse Menge Natriumdampf und eine gewisse Menge Natronsilicat im Ofen. Nun tritt eine reciproke Reaction ein, der Na-Dampf bildet neues Silicat und gleichzeitig wird aus dem Silicat metallischer Na-Dampf durch das Na selbst zurückgebildet. Da zu Beginn dieser Reaction mehr Na-Dampf vorhanden ist als dem Gleichgewichtszustand entspricht, so wird im Anfang

die Reduction stärker sein als nach Eintritt des chemischen Gleichgewichtszustandes. Dieser stellt sich daher aus dem Anfangszustand allmählich her und ebenso muss die Spectralerscheinung, welche unmittelbar als ein Maass der stattfindenden Reduction anzusehen ist, allmählich von dem Anfangszustand in den stationären Zustand übergehen, der dem chemischen Gleichgewicht der beiden Reactionen entspricht.

Dass das Aufhören der Spectralerscheinung in Luft plötzlich erfolgt, sobald der Eisenlöffel mit dem Na_2CO_3 aus der Gluth entfernt wird, hat darin seinen Grund, dass das metallische Na an der Luft sofort oxydirt wird und daher keine reducirende Wirkung auf das Natronsilicat ausüben kann.

Anders liegt die Sache bei den Versuchen in *H*. Hier ist bei Entfernung des Na_2CO_3 allerdings auch eine gewisse Menge metallischen Na-Dampfes vorhanden, aber seine reducirende Wirkung kommt nicht in Betracht, weil die Reduction des Natronsilicats unabhängig davon durch den in grosser Menge anwesenden *H* besorgt wird. Daher ist hier unmittelbar nach dem Herausziehen des Löffels eine im wesentlichen unveränderliche Quantität reducirender Substanz (*H*) und oxydirter Substanz (Natriumsilicat) gegeben, der chemische Gleichgewichtszustand, bei welchem in der gleichen Zeit ebenso viel Na durch *H* aus dem Silicat reducirt, als durch das Porzellan zur Bildung von Natronsilicat verwandt wird, tritt momentan ein und ebenso stellt sich die diesem Zustand entsprechende Lichterscheinung plötzlich her.

§ 16. Dass die Erscheinung bei der CO_2 lediglich von dem Natronsilicat herrührt, zeigt sich deutlich, wenn man den Versuch in einem ganz neuen Porzellanrohr vornimmt, in welchem noch kein Ueberzug von Natronsilicat vorhanden ist. Am 30. November 1891 wurde ein solcher Versuch ausgeführt. Das ganz neue Porzellanrohr wurde mit einem electromagnetisch beweglichen Nickellöffel beschickt, welcher mit Na_2CO_3 und einigen Stücken Eisenblech gefüllt war. Das Rohr wurde auf helle Gelbgluth gebracht, während der Löffel sich am kalten Ende befand. In *H* zeigte sich keine Spur der *D*-Linien. Jetzt wurde der *H* ausgepumpt, das Rohr mit CO_2 gefüllt und der Nickellöffel in die Gluth geschoben. Nach kurzer Zeit erschienen die *D*-Linien. Nun wurde der Löffel herausgezogen,

die *D*-Linien verschwanden allmählich innerhalb 5 Secunden. Die bei diesem Versuche gebildete Menge des Natriumsilicats war also so klein, dass im chemischen Gleichgewichtszustande keine durch Spectralbeobachtung bemerkbare Reaction stattfand. Sodann wurde der Versuch wiederholt, der Löffel wieder vorgeschoben und, sobald die *D*-Linien ihre maximale Stärke erreicht hatten, zurückgezogen. Die D-Linien wurden allmählich schwächer und verschwanden nach einer Minute vollständig. Also war auch jetzt noch die Menge des Natriumsilicats so gering, dass keine dauernd sichtbare Reduction durch das zurückgebliebene Na verursacht wurde, jedoch war die Menge des Silicats erheblich grösser als nach dem ersten Versuche, wie durch die bedeutend langsamere Abnahme der Erscheinung bewiesen wurde. Dass nach dem zweiten Versuche schon bemerkbare Mengen des Silicats gebildet waren, zeigte sich, als die CO_2 ausgepumpt und *H* in das Rohr gelassen wurde. Jetzt waren die D-Linien zwar sehr schwach, aber deutlich sichtbar infolge der fortdauernden Reduction des Natriumsilicats durch den *H*.

§ 17. Bei der Betrachtung der chemischen Reactionen, um die es sich hier handelt, haben wir bis jetzt den Umstand vernachlässigt, dass im Momente der Entfernung des Na_2CO_3 stets eine Quantität dieses Salzes im dampfförmigen Zustande in dem glühenden Rohr zurückbleibt. Diese Quantität ist aber, ausser bei sehr hohen Temperaturen, ausserordentlich gering und daher ohne merklichen Einfluss auf die Reaction, da der Siedepunkt dieses Salzes ausserordentlich hoch liegt. Bei sehr hohen Temperaturen jedoch, welche wesentlich oberhalb der Goldschmelze liegen, scheint sich der Einfluss des dampfförmigen Na_2CO_3 geltend zu machen. Wenigstens glaube ich auf diesen Einfluss die Beobachtung zurückführen zu sollen, dass bei den Versuchen mit *H* bei diesen höchsten erreichbaren Temperaturen die Spectralerscheinung im Momente der Entfernung des Löffels aus der Gluth nicht momentan bis auf den Endzustand zurückgeht, sondern dass nur im ersten Augenblick ein sehr starker, plötzlicher Abfall bis nahe an den Endzustand heran eintritt, dann aber eine allmähliche, wenn auch nur höchstens 10 Secunden dauernde Abnahme bis zu dem Endzustande folgt. Diese allmähliche Abnahme ist, wie ich

glaube, dem Uebergange des bei diesen höchsten Temperaturen in grösserer Menge vorhandenen dampfförmigen Na_2CO_3 in das auch bei diesen Temperaturen noch flüssige oder gar feste Natriumsilicat zuzuschreiben; denn die dampfförmige Substanz ist naturgemäss der Reduction durch den H in viel höherem Maasse ausgesetzt als die feste oder flüssige.

8. Erklärung der Versuche mit metallischem Natrium.

§ 18. Die hier gegebene Erklärung der Erscheinungen, die wir bei Unterbrechung der chemischen Reaction beobachtet haben, liefert zugleich das Verständniss der oben (p. 434 f.) mitgetheilten Versuche mit metallischem Na. Zuerst entwickelt sich, wie schon erwähnt, bei der Erhitzung des Na schon unterhalb der Rothgluth ein farbiger Dampf, welcher je nach seiner Dichtigkeit in der Durchsicht ganz schwarz, dnnkelviolett, hellviolett, blau oder grün erscheint. Dabei zeigt das Absorptionsspectrum zuerst die D-Linien schwach, dann nehmen sie an Breite und Intensität sehr stark zu, sodass sie sich über das ganze Gelb ausdehnen, gleichzeitig tritt eine starke Absorption im Blau, eine etwas schwächere in Violett und Roth, eine noch schwächere in Grün und Orange auf, so dass bei grosser Dichtigkeit des Dampfes das ganze Spectrum ausgelöscht wird, bei etwas geringerer nur im Grün und Orange helle Stellen übrig bleiben. Diese Erscheinungen sind in hohem Grade von der Dichtigkeit des Dampfes und auch von der Temperatur abhängig; häufig konnte ich cannellirte Banden in Blau, Roth und Orange beobachten, wie sie von Roscoe und Schuster[1]) beschrieben worden sind. Bei steigender Temperatur nimmt die gesammte Absorption sehr schnell ab, der Dampf erscheint vollständig durchsichtig und zeigt nur bei den D-Linien eine starke Absorption. Steigt die Temperatur noch weiter an, so werden die D-Linien zunächst schnell schmäler bis zu einem Minimum, von dem aus sie dann bei immer mehr zunehmender Temperatur wieder breiter werden. Der farbige Dampf verschwindet, wenn alles ursprünglich eingeführte metallische Na vollständig verdampft ist und tritt, sobald er einmal verschwunden ist, nicht wieder auf, auch wenn man die

---

1) Rosoe und Schuster, Proc. Roy. Soc. **22.** p. 362. 1874.

Flammen des Ofens auslöscht und die Temperatur sinken lässt. Die Erscheinung nach Verschwinden des farbigen Dampfes dagegen ist vollständig stationär, sie dauert stundenlang ohne merkliche Veränderung fort. Wenn man die Temperatur sinken lässt, so werden die D-Linien allmählich schmäler und verschwinden schliesslich, lässt man die Temperatur wieder steigen, so erscheinen sie von neuem, zuerst schwach, dann wachsen sie bis zu der früheren Breite und Intensität an. Dieser Vorgang geht bei häufiger Wiederholung immer wieder in der gleichen Weise vor sich. Stets erscheinen und verschwinden die D-Linien bei annähernd der gleichen Temperatur (vgl. p. 442) und ebenso ändert sich ihre Breite mit der Temperatur immer in der gleichen Weise. Dies erkennt man am deutlichsten aus Messungen der Temperaturen, bei denen sich die beiden D-Linien im grossen Spectral-Apparat bei steigender Temperatur berühren, resp. bei abnehmender zu trennen beginnen, ein Moment der mit ziemlich grosser Genauigkeit zu bestimmen ist. So gab die Temperaturmessung mit der Thermonadel am 3.12.89, als metallisches Na im geschlossenen Porzellanrohr in Luft erhitzt worden war, folgendes Resultat:

	Zeit	Galvanometerablenkung	Zeit	Galvanometerablenkung	Zeit	Galvanometerablenkung	Zeit	Galvanometerablenkung
Sinkende Temperatur, *D*-Linien trennen sich	$11^h 43'$	410	$12^h 12'$	410	$12^h 32'$	420	$12^h 45'$	43[illegible]
Steigende Temperatur *D*-Linien berühren sich	$12^h 1'$	430	$12^h 25'$	430	—	—	—	—

Diese Erscheinungen sind nur so zu erklären, dass der zuerst auftretende farbige Dampf der Dampf des metallischen Na ist (ob dabei zuerst mehratomige Dampfmolecüle gebildet werden, möge dahingestellt bleiben), dass dagegen die spätere, dauernde Lichterscheinung durch die chemische Reaction des Na-Dampfes auf das die Wände des Porzellanrohrs bedeckende Natriumsilicat hervorgebracht wird. Bei Anwendung von Eisen- oder Nickelröhren sind die gleichen Erscheinungen zu beob-

achten, da auch diese Metalle mit Na in der Glühhitze Verbindungen bilden, welche sich unter den gleichen Leuchterscheinungen reduciren lassen. Dasselbe ist beim Platin der Fall und überhaupt ist es mir nicht möglich gewesen, eine als Ofenrohr brauchbare Substanz zu finden, welche nicht in dieser Weise von Na angegriffen wird.

Die Abhängigkeit der Breite der Spectrallinien von der Temperatur, welche oben erwähnt wurde, ist hier offenbar nur eine mittelbare, indem die Stärke der chemischen Reaction von der Temperatur beeinflusst wird. Bei allen unseren Beobachtungen ist eine directe Abhängigkeit der Breite der Linien nur von der Dichte des leuchtenden Gases, d. h. von der Intensität der chemischen Reaction zu bemerken. Auch der Druck der neutralen Gase ist vollständig gleichgültig, wie man daraus erkennt, dass bei Reduction mit Eisen die Breite der Linien in CO_2 im Atmosphärendruck merklich die gleiche ist, wie im Vacuum. Man kann daher die Verbreiterung der Linien nicht etwa aus einer Störung der Schwingungen durch die Zusammenstösse der Molecüle ableiten, sondern die Linienbreite scheint lediglich von der Anzahl der leuchtenden Theilchen pro Einheit der strahlenden Oberfläche abzuhängen. Daher wächst die Breite der Linien ceteris paribus mit der Tiefe der strahlenden Schicht.[1])

9. Schluss.

§ 19. Somit stehen alle Beobachtungen im Einklang mit der Annahme, dass das Leuchten des gasförmigen Natriums (und ebenso der anderen Gase) nicht eine Folge der hohen Temperatur ist, sondern bei unseren Versuchen lediglich durch chemische Vorgänge hervorgerufen wird. Dennoch folgt daraus noch nicht mit voller Sicherheit die Richtigkeit dieser Annahme. Denn es ist noch ein Einwurf möglich. Wir haben das plötzliche Zurückgehen der Spectralerscheinung, wenn die Reduction des Na_2CO_3 durch H plötzlich unterbrochen wird, als Beweis dafür angesehen, dass das reducirte Na, trotzdem es auf der gleichen hohen Temperatur bleibt, nicht weiter fortleuchtet. Dagegen könnte man einwenden, dass das Na des-

1) Vgl. R. v. Helmholtz, l. c. p. 32.

halb aufhört zu leuchten, weil es aufhört als metallisches Na zu bestehen. Da nämlich das Na die Porzellanwand angreift, so kann man glauben, dass momentan das ganze Na an das Porzellan geht und in Natriumsilicat verwandelt wird. Diese Annahme scheint wegen der Plötzlichkeit des Vorgangs wenig Wahrscheinlichkeit zu haben. Ich glaube, dass sie eine exacte Widerlegung finden wird durch Versuche mit anderen Elementen, mit denen ich noch beschäftigt bin.

§ 20. Eines kann man frei von jeder Hypothese als experimentell sichere Thatsache aussprechen: Wir kennen keinen einzigen Vorgang, bei dem gasförmige Elemente durch blosse Temperaturerhöhung ohne electrische oder chemische Energie zum Leuchten gebracht werden. Andererseits ist man durch die Betrachtung der Leuchtprocesse genöthigt anzunehmen, dass Electricität und chemische Umsetzung für sich allein im Stande sind, ohne Rücksicht auf die Temperatur Leuchten von Gasen hervorzubringen. Daher liegt gar kein experimenteller Grund vor noch die neue, durch keine bekannte Erscheinung geforderte, Hypothese hinzuzunehmen, dass Gase durch blosse Temperaturerhöhung leuchtend werden. Ein theoretischer Grund hierfür könnte vielleicht im Kirchhoff'schen Gesetz gefunden werden, da dieses nur für „Temperaturstrahlung" bewiesen ist. Bei unseren Versuchen jedoch hat sich ein vollständiger Parallelismus von Emission und Absorption auch bei Strahlungen ergeben, welche nach meiner Ansicht lediglich von chemischen Vorgängen herrühren, und welche, wenn man die Hypothese von der Temperaturstrahlung macht, doch nur zum kleinen Theil als solche, zum grössten Theil als „chemische" Strahlung angesehen werden müssen. Hier zeigt sich also genau die gleiche Beziehung, welche man als experimentellen Beweis des Kirchhoff'schen Gesetzes anzusehen pflegt, bei einem Vorgange erfüllt, bei welchem die Voraussetzungen dieses Gesetzes ganz bestimmt nicht zutreffen. Dieser Umstand erklärt sich sehr einfach daraus, dass diese Beziehung nur eine qualitative Bestätigung des Kirchhoff'schen Gesetzes ist, und dass diese qualitative Uebereinstimmung von Absorption und Emission für jede Art von Strahlung unmittelbar aus dem Princip der Resonanz folgt.

Mithin besteht weder eine theoretische noch experimen-

telle Nothwendigkeit für die Hypothese, dass gasförmige Elemente durch blosse Temperaturerhöhung zum Leuchten gebracht werden können, und es erscheint mir daher richtiger, wenn man versucht ohne diese Annahme auszukommen, auch wenn es sich, wie in der Astrophysik, um Temperaturen handelt, bei denen eine directe experimentelle Widerlegung jener Hypothese nicht möglich ist.

Zusammenfassung.

1. Es gibt keine gasförmige Lichtquelle, welche den Bedingungen des Kirchhoff'schen Gesetzes genügt.
2. Man kann glühende Gase herstellen, deren Temperatur unter 150° C. liegt. (Kalte Flammen).
3. Natronsalze in Flammen leuchten nur infolge von chemischen Processen. (Reduction).
4. Metallisches Natrium in neutralen Gasen erhitzt, leuchtet nur infolge von chemischen Processen.
5. Die Annahme, dass Gase durch blosse Temperaturerhöhung leuchten können, ist eine weder aus experimentellen noch aus theoretischen Gründen nothwendige Hypothese.

Berlin, Phys. Inst. d. Univ., 15. Januar 1892.

IV. *Ueber die Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen; von P. Drude und W. Nernst.*

(Aus den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom 23. Dec. 1891.)

Es bietet ein erhebliches Interesse, die bekannten Untersuchungen Hrn. Wiener's [1]) über die photographische Wirksamkeit stehender Lichtwellen auch auf andere Erscheinungen, durch welche Lichtbewegung objectiv zur Darstellung gebracht werden kann, auszudehnen, und für möglichst verschiedene Arten derselben folgende beiden Fragen zu beantworten:

1. Giebt es bei stehenden Lichtwellen Maxima und Minima der Wirkungsweise?

2. Fallen bei ein und derselben stehenden Lichtwelle die Maxima der Wirkung für die verschiedenen, zur Untersuchung gelangten Erscheinungsklassen zusammen?

Wirkungen des Lichtes sind auf vielen, recht verschiedenartigen Gebieten beobachtet; ausser der durch Belichtung hervorgebrachten Erwärmung, der Fluorescenz, und der Erscheinung der Hauchbilder, wie von Wiener erwähnt ist, möchten wir hier noch die durch Belichtung hervorgerufene Entladung negativ electrisch geladener Körper, die Widerstandsänderungen des Selens oder Chlorsilbers [2]), den Einfluss des Lichtes auf electrische Funkenentladung [3]) und die photoelectrischen (Becquerel'schen) [4]) Ströme nennen.

Die Schwierigkeit der Untersuchung stehender Lichtwellen beruht hauptsächlich in zwei Punkten: einmal muss der Körper, durch dessen Verhalten die Wirkung der Bäuche und Knoten der stehenden Lichtwelle untersucht werden soll, dünn sein im Vergleich zur Wellenlänge des angewandten Lichtes, damit bei dem benutzten lichtempfindlichen Körper nicht die

---

1) O. Wiener, Wied. Ann. **40.** p. 203. 1890.
2) Sv. Arrhenius, Wiener Ber. **96.** p. 831. 1887.
3) H. Hertz, Wied. Ann. **31.** p. 983. 1887.
4) Ed. Becquerel, La lumière **2.** p. 121. Paris 1868.

Wirkung von Schwingungsbauch und Schwingungsknoten gleichzeitig vorhanden ist; eine andere Schwierigkeit wird durch die Herstellungsart stehender Lichtwellen hervorgebracht. Eine stehende Lichtwelle wird erzeugt durch die Differenz zweier in entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzenden Wellenzüge von gleicher Amplitude. Dies wird mit grosser Annäherung durch Reflexion des Lichtes an einem Silberspiegel erreicht, da über 90 Proc. des einfallenden Lichtes am Silber reflectirt werden. Das lichtempfindliche Häutchen, wie kurz der Körper genannt werden möge, an welchen irgend eine Art der Wirkung stehender Lichtwellen untersucht werden soll, muss nun nahezu dem Siberspiegel parallel liegen, damit sich genügend weit räumlich auf dem Häutchen der Wellenbauch von dem Wellenthal trennt, und zwar in einem Abstand von dem Spiegel, welcher um so kleiner sein muss, je weniger homogen die zur Wirkung gelangende Lichtsorte ist, damit nicht der Schwingungsbauch und Schwingungsknoten für zwei Lichtstrahlen verschiedener Wellenlänge auf dem lichtempfindlichen Häutchen zusammenfallen und dadurch die Wirkung von Bauch und Knoten gar nicht getrennt werden kann. Man wird daher das einfallende Licht spectral zerlegen müssen, falls man den Abstand des Häutchens vom Spiegel nicht beliebig klein machen kann. Enthält jede Stelle im erzeugten Spectrum Licht von streng einerlei Wellenlänge und Richtung, so würde man den Abstand des Häutchens vom Spiegel beliebig gross wählen können. Indess kann man ein derartiges Spectrum nicht mit genügender Lichtintensität herstellen, vor allem bei Erscheinungen, welche nicht, wie die photographische Wirkung, durch längere Exposition verstärkt werden können. Denn bei der gewöhnlichen Herstellungsart des Spectrums durch Spalt, Collimatorlinse, Prisma und Sammellinse ist das Spectrum nur für einen sehr schmalen Spalt hinreichend rein. Man wird dem Spalt meist eine gewisse Breite geben, um überhaupt deutliche Lichtwirkung zu bekommen und daher das lichtempfindliche Häutchen in sehr kurzen Abstand vom Silberspiegel bringen müssen. Die grosse Nähe desselben verursacht experimentelle Schwierigkeiten hauptsächlich für die Beobachtung der electrischen Lichtwirkungen, während die Herstellung eines genügend dünnen lichtempfindlichen Körpers

auch für diese Classe von Erscheinungen wohl möglich zu sein scheint. — Man könnte ferner stehende Lichtwellen erzeugen durch Reflexion an zwei Spiegeln (am besten totalreflectirenden Prismen), welche unter 45° gegen einen einfallenden Wellenzug geneigt sind und sich einander zuwenden. In dem Zwischenraum zwischen beiden Spiegeln würden sich stehende Lichtwellen bilden. Bringt man das lichtempfindliche Häutchen nahezu in die Ebene, zu welcher beide Spiegel symmetrisch liegen, so würden auf ihm Schwingungsbauch und Schwingungsknoten genügend weit räumlich getrennt werden können, und zwar wäre ihre Lage unabhängig von der Wellenlänge des angewandten Lichtes. Letzteres brauchte daher nicht homogen zu sein, wohl aber sehr streng von einerlei Richtung, und daher wird auch diese Methode zunächst auf Schwierigkeiten stossen. — Eine dritte Untersuchungsmethode der Wirkung stehender Wellen bietet sich in der Totalreflexion, bei der man die Nähe eines Metallspiegels vermeidet, es wird davon weiter unten näher die Rede sein.

Von den erwähnten Lichtwirkungen haben wir zunächst nur bei der Fluorescenz Resultate erhalten, welche für die Beobachtung die bequemste ist, und wobei wir uns in allen wesentlichen Punkten an die Wiener'sche Versuchsanordnung anschlossen. Als Lichtquelle diente das electrische Bogenlicht, welches, namentlich wenn man die Kohlenspitzen in eine grössere Distanz (etwa $^1/_2$ cm) voneinander bringt, sodass ein grosser Lichtbogen entsteht, die kräftigsten Fluorescenzwirkungen der zu Gebote stehenden Lichtquellen besitzt. Das Bogenlicht wurde durch eine Dynamomaschine geliefert, die Stromstärke auf 15 bis 20 Amp. regulirt, für grossen Abstand der Kohlenspitzen war durch Veränderung der Regulirgewichte der Lampe Sorge getragen. Letztere befand sich in einem anderen Zimmer als der Beobachtungsraum, welcher völlig verdunkelt werden konnte. Das Spaltrohr eines Spectrometers war lichtdicht durch ein Loch in der Thüre des Beobachtungraumes geschoben, der Spalt empfing die Strahlen der Kohlenspitzen meist direct, ohne dazwischen geschaltete Linse. Es zeigte sich, dass man so durch Annäherung der Kohlenspitzen an den Spalt eine grössere Intensität des Fluorescenzlichtes im Beobachtungsraum erhielt, als wenn das

Bogenlicht durch ein Glaslinsensystem auf den Spalt concentrirt wurde.

In dem Spaltrohr befand sich als Collimatorlinse eine Quarzlinse, das durch diese parallel austretende Licht wurde durch ein auf dem Spectrometertischchen im Minimum der Ablenkung aufgestelltes Flintglasprisma von 45° brechenden Winkel spectral zerlegt, und fiel dann auf die ebenfalls aus Quarz bestehende Objectivlinse des Spectrometerfernrohrs, dessen Ocular herausgenommen war. In der Brennebene der Objectivlinse entsteht dann ein Spectrum des Bogenlichtes, und durch einen in der Ebene liegenden Spalt (Ocularspalt) konnte ein beliebiger Theil des Spectrums ausgeblendet werden. Das zerlegende Flintglasprisma fluorescirte unter der Wirkung des Bogenlichtes und musste daher die wirksamen Strahlen etwas absorbiren. Indess erwies sich durch directe Versuche, indem das Glasprisma durch ein Quarzprisma ersetzt wurde, die Absorption als so gering, dass ersterem wegen des Fehlens der Doppelbrechung der Vorzug vor letzterem gegeben wurde. — Sehr verschiedenartige Substanzen (auch Papier, Holz, Gelatine) fluoresciren mehr oder weniger stark, wenn auf sie das Spectrum des Bogenlichtes geworfen wurde. Für alle lag das Maximum des Fluorescenzlichtes in zwei breiteren violetten Banden, welche ziemlich nahe an der Stelle, wo die H-Linien des Sonnenspectrums auftreten, sich befinden und zwar von diesen aus nach dem brechbareren Ende des Spectrums hin. Besonders die den H-Linien zunächst benachbarte Bande zeichnet sich durch sehr starke Fluorescenzwirkung aus und wurde daher allein bei den schliesslichen Versuchen benutzt. Beide Banden liegen noch im sichtbaren Theil des Spectrums, wenn auch das Licht der brechbareren Bande nur noch wenig intensiv ist. Die mittlere Wellenlänge der benutzten Bande ergab sich mit Hülfe eines Glasgitters von 0,0045 mm Strich-Abstand zu 0,000386 mm. Die Messung wurde in der Weise vorgenommen, dass eine Glasplatte, auf welcher eine gelatinöse wässrige Lösung von Fluorescein zu einer etwa 1/100 mm dicken Haut eingetrocknet war, in der Brennebene des Objectivs befestigt wurde. Die beiden wirksamen Banden kennzeichnen sich durch zwei hellglänzende grüne Linien, welche man bei schiefer Durchsicht auf der Glasplatte wahr nimmt. Indem man das Fern-

rohr des Spectrometers so dreht, dass die der zu untersuchenden ersten Bande angehörige Linie auf eine bestimmte Marke der Glasplatte fällt, erhält man den durch das Gitter erzeugten Ablenkungswinkel der Bande und daher auch ihre Wellenlänge.

Eine nach der beschriebenen Art hergestellte fluorescirende Platte ist für alle Versuche über Fluorescenz sehr bequem, einerseits der Handlichkeit wegen, andrerseits weil wegen der geringen Dicke der fluorescirenden Schicht die wirksamen Banden des Spectrums sich scharf auf der Platte abzeichnen.

Es handelte sich nun um Herstellung einer Haut von der Dicke eines Bruchtheils der Wellenlänge, welche noch deutliche Fluorescenz aufwies. Dazu muss eine Substanz gewählt werden, welche in wässriger Lösung ein starkes Fluorescenzvermögen aufweist und welche eine hinreichend grosse Löslichkeit in Wasser besitzt, weil die in wässriger Lösung wirksamen Stoffe im krystallisirten Zustande nicht fluoresciren. — Den genannten Anforderungen genügte in ausreichendem Maasse das Natronsalz des Fluoresceins.

Es wurde eine Reihe von verschieden concentrirten wässrigen Lösungen dieser Substanz hergestellt, diesen Lösungen Gelatine im Verhältniss 1 : 600 zugesetzt und Glasplatten mit ihnen benetzt. Nach dem Eintrocknen der Lösung blieb auf ihnen eine Haut zurück, welche ungefähr den 600sten Theil der Dicke der ursprünglichen Wasserhaut besitzt. Man erhält so leicht Häute, welche im reflectirten weissen Lichte die eisengraue Farbe der Newton'schen Scala zeigen und welche eine Dicke von $^1/_{20}$ bis $^1/_{30}$ der mittleren Wellenlänge des weissen Lichtes besitzen. Diese Dicke wurde auch direkt gemessen, indem auf der Glasplatte mit der Spitze eines Messers eine schmale Partie der Haut weggeschabt, und dann eine andere Glasplatte fest gegen die erste angedrückt wurde. Die Dicke der Gelatine-Haut bestimmt sich dann leicht durch die Gestalt der Interferenzstreifen, welche bei homogener Beleuchtung an der zwischen beiden Platten befindlichen Luftschicht erzeugt werden und an der geschabten Stelle eine Discontinuität zeigen.

Gleichdicke Stellen der verschiedenen Häute, welche aus den einzelnen Lösungen hergestellt waren, wurden dann auf ihr Fluorescenzvermögen hin geprüft, indem man sie in die wirksame Bande des Bogenlicht-Spectrums brachte. Es erwies

sich eine Lösung, welche das Fluorescein in der Concentration 1 : 500 ursprünglich (vor dem Eintrocknen) enthalten hatte, am günstigsten; mit dieser sind die weiteren Versuche angestellt.

Zum Zweck grösserer Lichtintensität wurde der Spalt des Collimatorrohrs etwa 2 mm breit gemacht. Das Fluorescenzlicht erwies sich dann auf einigen Platten so stark, dass es auch im nicht verdunkelten Beobachtungszimmer deutlich wahrzunehmen war. Die erste wirksame Bande im Spectrum des Bogenlichtes zeichnete sich als fast 3 mm breites grünes Lichtband auf den fluorescirenden Substanzen ab. Es konnte ein Ocularspalt von dieser Breite eingesetzt werden, welcher also das unwirksame Licht abblendete.

Auf einer ungefähr 3 mm dicken planparallel geschliffenen Glasplatte, welche im Bogenlicht nicht merklich fluorescirte, wurde eine fluorescirende Haut auf die beschriebene Weise hergestellt, und diese dann auf eine andere ebengeschliffene chemisch versilberte Glasplatte gelegt, deren Silberbelegung durch einen weichen Lederlappen, auf welchem sich ein wenig Pariser Roth befand, gut polirt war. Die fluorescirende Haut war dem Silberspiegel zugewandt. Zunächst rief die wirksame Bande des Bogenlichtes nur eine gleichmässige Fluorescenz in der Haut hervor. Dies war eine Folge der mangelnden Homogenität des Spectrums, welche durch die beträchtliche Breite des Collimatorspaltes verursacht war. Denn als durch Hin- und Herschieben der Glasplatte der Abstand der Haut vom Silberspiegel so verringert wurde, dass im reflectirten weissen Lichte die Newton'schen Farben der höheren Ordnungen sichtbar wurden, erschien das grüne Lichtband des Fluorescenzlichtes deutlich von schwarzen Minimis durchzogen. Die Lage derselben entsprach der Lage der im weissen reflectirten Lichte auftretenden Newton'schen Farben, nur war der Abstand ersterer (entsprechend der kleineren Wellenlänge der wirksamen Bande des Bogenlichtes) kleiner, als der der letzteren. Die Fluorescenz-Minima wanderten auf der Platte, falls man durch Drücken mit dem Finger ihren Abstand vom Silberspiegel änderte, ein Beweis dafür, dass die Streifung nicht durch ungleichmässige Dicke der fluorescirenden Haut hervorgebracht sein konnte. Die Erscheinung zeigte sich um so mehr in grüner Farbe, unter je schieferem Winkel man die Platte betrachtete. Falls

sich die Lage des Auges dem Reflexionswinkel näherte, schlug die Erscheinung mehr in die der wirksamen Bande angehörige violette Farbe um, offenbar, weil das vom Silberspiegel diffus reflectirte violette Licht mit ins Auge gelangte. Dass dieses nicht etwa allein eine Interferenzfigur aufwies, welche scheinbar auch die Interferenzfigur der Fluorescenz hervorgebracht hätte, konnte deutlich durch folgenden Versuch nachgewiesen werden. Die fluorescirende Haut war in einer Breite von 2 mm auf der Glasplatte entfernt. Dieser Streifen war dem Ocularspalt parallel, während die Platte auf den Silberspiegel so angedrückt und festgebunden wurde, dass die Interferenzstreifen senkrecht zu dem Ocularspalt und dem geschabten Streifen verliefen. Sowie nun bei unveränderter Stellung des Auges des Beobachters die Plattencombination so bewegt wurde, dass der Streifen, auf welchem die fluorescirende Haut weggeschabt war, in den belichteten Theil trat, erschien derselbe in gleichmässigem violettem Lichte ohne durchziehende schwarze Streifen, während die unmittelbar angrenzenden Stellen, auf welchem sich Fluorescein befand, dieselben deutlich aufwiesen.

Dass schliesslich die Erscheinung wirklich lediglich durch die Einwirkung der stehenden Lichtwellen auf die Fluorescenz hervorgebracht wurde, ergab sich auch daraus, dass, wenn man den Ocularspalt entfernte, sodass ein breiteres Spectrum des Bogenlichtes auf die Plattencombination fiel, das grüne von schwarzen Streifen durchzogene Lichtband nur an der Stelle der wirksamen Bande des Spectrums auftrat, während an den unmittelbar anliegenden Theilen desselben, welche fluorescirend nicht wirken, Dunkelheit oder gleichmässig diffuses blaues Licht herrschte. — Zur weiteren Controlle wurde auch eine Plattencombination hergestellt, bei der die hintere Glasplatte nicht mit Silber belegt war. Es traten im reflectirten Lichte sehr scharf Newton'sche Ringe auf, weit deutlicher, als bei der vorigen Plattencombination mit Silberspiegel. Die Lichterscheinung der fluorescirenden dünnen Haut der vorderen Glasplatte war aber kaum merklich von dunkleren Partien durchzogen, welche fast ganz verschwanden, als die Plattencombination umgekehrt wurde, sodass die fluorescirende Haut sich auf der hinteren Glasplatte befand. Alles dies erklärt sich vollständig aus der geringen Reflexion des Lichtes am

Glase, welche nur in sehr unvollkommener Weise stehende Lichtwellen zu Stande kommen lässt.

Es ist also durch diese Versuche als erwiesen anzusehen, dass stehende Lichtwellen Maxima und Minima der Fluorescenzwirkung haben.

Es handelt sich nun darum, die zweite der oben genannten Fragen zu entscheiden, ob nämlich die Maxima der Fluorescenz mit den Maximis der photographischen Wirkung zusammenfielen. Schon durch Betrachtung der Plattencombination unter verschiedenen Einfallswinkeln liess sich diese Frage entscheiden. Denn falls man die Platten so gegen die Fernrohraxe des Spectrometers neigte, dass directe Strahlen ins Auge des Beobachters gelangten, waren, wenn auch nur undeutlich, Newton'sche Interferenzfransen zu sehen. Die Maxima des direct reflectirten Lichtes fielen zusammen mit den Maximis des Fluorescenzlichtes, wie sie am besten bei recht schiefer Betrachtung der Platten gesehen wurden. Dasselbe Resultat ergibt sich aus den Wiener'sehen Untersuchungen, d. h. *die Maxima der Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen fallen mit den Maximis ihrer photographischen Wirkung zusammen.*

Um dieses Resultat völlig sicher zu erhalten, wurden Versuche mit rechtwinklig sich schneidenden Wellen gemacht, analog wie sie Wiener für die photographische Wirkung angestellt hat. Abweichend von der Wiener'schen Anordnung war nur, dass erst hinter dem (verticalen) Ocularspalt ein etwa 3 cm dickes, wasserhelles Kalkspath-Parallelepiped mit horizontal liegendem Hauptschnitt aufgestellt wurde. Durch eine dahinter befindliche Linse von kurzer Brennweite wurden in einer Distanz von ungefähr 20 cm vom Ocularspalt zwei nebeneinander liegende reelle Bilder desselben erzeugt, deren Polarisationsebene, bez. vertical und horizontal lagen. Es wurde dann auf die zu den bisherigen Versuchen benutzte Plattencombination ein rechtwinkliges Glasprisma mit seiner Hypotenusenfläche aufgesetzt, dessen eine Kathetenfläche senkrecht gegen die einfallenden Lichtstrahlen gestellt wurde. Behufs Vermeidung von Totalreflexion liessen wir zwischen fluorescirender Haut und Silberspiegel einen Tropfen Benzol einsaugen (welches die Gelatine-Haut nicht auf-

löst[1])), und etwas Wasser zwischen Prisma und vorderer Glasplatte (Canadabalsam ist nicht anzuwenden wegen seiner starken Fluorescenz). Von den beiden auf der Gelatinehaut hervorgerufenen Streifen Fluorescenzlicht erschien nur der eine von schwarzen Minimis durchzogen, während der andere gleichförmig hell war. Dabei wechselten die beiden vom Ocularspalt entworfenen reellen Bilder ihre Rollen, wenn einmal die Einfallsebene der Gelatinehaut horizontal, und wenn sie ein zweites mal vertical lag, *und zwar rief immer dasjenige Bild Streifung im Fluorescenzlicht hervor, dessen Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammenfiel.* Diese Erscheinung ist am besten zu sehen bei Betrachtung der Plattencombination durch die dem einfallenden Lichte zugekehrte Kathetenfläche des rechtwinkligen Prismas, da dadurch alle Spuren diffus vom Silber reflectirten violetten Lichtes vermieden werden. Die Betrachtung der Platten in beiden Lagen (mit horizontaler und verticaler Einfallsebene) geschah deshalb, um dadurch den Einwand gegen die Beweiskraft der Versuche zu vermeiden, dass die beiden reellen Bilder des Ocularspaltes infolge der durch Brechung im zerlegenden Prisma hervorgerufenen Polarisation des Bogenlichtes nicht völlig gleiche Intensität besitzen.

Da die Fluorescenz im angewandten rechtwinkligen Glasprisma die Deutlichkeit der Erscheinung beeinflusste, haben wir auf einer Seite eines gleichzeitigen Quarzprismas, dessen brechende Kante der optischen Axe parallel lag, eine etwa $^1/_{15}$ Wellenlänge dicke fluorescirende Haut hergestellt, und diese dicht gegen einen Silberspiegel gedrückt, sodass im reflectirten weissen Lichte Newton'sche Farben der höheren Ordnungen auftraten. Die Fluorescenz dieser Haut ist so stark, dass sie schon im diffusen Tageslichte als grüner Schimmer wahrnehmbar ist. Lässt man zwischen Silberspiegel und Quarzprisma einen Tropfen Benzol einsaugen und bringt eine Fläche des Quarzprismas in eine solche Lage gegen das einfallende Licht, dass es ungefähr unter 45° gegen die Hinter-

1) Um sicher zu sein, dass das Vorhandensein des Benzols die Fluorescenz nicht modificirte, wurde auch die Plattencombination ohne rechtwinkliges Glasprisma mit eingesogenem Benzol bei senkrechter Incidenz des einfallenden Lichtes untersucht. Es traten ebenfalls deutliche schwarze Minima im Streifen des Fluorescenzlichtes auf.

fläche des Prismas gebrochen wird, so traten die beschriebenen Erscheinungen sehr deutlich auf und sind auch im nicht verdunkelten Zimmer gut zu beobachten.[1])

Diese Versuche beweisen vollständig, dass die Maxima der Fluorescenz mit den Maximis der photographischen Wirkung zusammenfallen, da für letztere Wiener ganz analoge Resultate erhalten hat.

Mit den gewonnenen Resultaten steht ein anderer, einfacher Versuch im Einklang: Eine Quarzplatte wurde zum Theil versilbert und dann mit einer fluorescirenden Haut überzogen, welche in Richtungen, die senkrecht zur Trennungslinie des versilberten vom unversilberten Theil lagen, nahezu gleiche Dicke besass. Es konnte dies erreicht werden, indem beim Eintrocknen der auf die Quarzplatte gebrachten fluorescirenden Lösung erstere schräg gestellt wurde, sodass obige Trennungslinie am stärksten gegen den Horizont geneigt war. Es wurde die so präparirte Quarzplatte in die wirksame Bande des Spectrums des Bogenlichtes senkrecht zu den Lichtstrahlen gebracht, und zwar derart, dass die Trennungslinie des versilberten Theiles der Quarzplatte von dem unversilberten Theil senkrecht zum Ocularspalt verlief, sodass gleich dicke Stellen der fluorescirenden Haut dem Lichte ausgesetzt wurden, welche theils auf Silber, theils auf Quarz lagen; unter diesen Bedingungen fluorescirten letztere Stellen deutlicher als erstere, solange die Haut dünn (kleiner als die halbe Wellenlänge) war. An Stellen der Haut, welche dicker als eine halbe Wellenlänge des einfallenden Lichtes waren, kehrte sich die Erscheinung um, indem die Stellen auf der Silberbelegung stärker fluorescirten, als die auf der Quarzfläche. Dies Phänomen erklärt sich vollständig dadurch, dass die Fluorescenz einer dünnen auf Silber liegenden Haut durch die Wirkung der in

1) Diese Fluorescenzerscheinung bietet so ein bequemeres Mittel zur Demonstration der Wirkung stehender Wellen, als die Photographie, da die Plattencombination für alle Zeit brauchbar bleibt. Vielleicht kann sie daher zum *Vorlesungsexperiment* verwandt werden. Bei geringer Dicke der zwischenlagernden Luftschicht sind die Erscheinungen auch bei Beleuchtung mit nicht spectral zerlegten Bogenlicht wahrnehmbar, besonders wenn man durch ein blaues Glas den grössten Theil der unwirksamen Strahlen ableitet. — *Auch im violetten Theil des Sonnenspectrums war eine allerdings undeutliche Streifung des Fluorescenzlichtes wahrzunehmen.*

ihr zu Stande kommenden stehenden Lichtwelle zerstört wird, da nach den Versuchen am Spiegel selbst ein Minimum der Wirkung liegt.

Belegt man die eine Fläche eines Prismas einer durchsichtigen Substanz (Glas oder Quarz) mit einer fluorescirenden Haut, welche dünn im Vergleich zur Wellenlänge ist, und dreht man das Prisma, während die mit der Haut überzogene Seite den einfallenden Lichtstrahlen abgewandt ist, sodass man allmählich von partieller Reflexion derselben an der Hinterfläche des Prismas zur Totalreflexion gelangt, so tritt bei letzteren eine bedeutende Verstärkung der Fluorescenz der Haut gegenüber der bei partieller Reflexion der einfallenden Lichtstrahlen hervorgerufenen ein. [1])

Lässt man auf die Vorderfläche des Prismas die beiden senkrecht zu einander polarisirten Bilder fallen, welche man nach der beschriebenen Anordnung mit Hülfe des Doppelspaths erhält, und wählt die Einfallsebene der Hinterfläche des Prismas mit der einen der Polarisationsebenen der beiden Bilder zusammenfallend, so lässt sich aus dem Verhältniss der Intensität, mit welcher in beiden Bildern bei der Totalreflexion Fluorescenz erregt wird, auf die Wirkungsweise der stehenden Wellen schliessen, und zwar nach folgender Ueberlegung:

Nehmen wir der Einfachheit halber an, das Licht fiele im Innern des Prismas unter 45° auf seine Hinterfläche, und es wäre der Brechungsexponent der dünnen Gelatinehaut dem des Prismas gleich, sodass auch in dieser durch Reflexion zwei senkrecht sich kreuzende Wellenzüge für jeden der beiden vom Ocularspalt gebildeten Lichtstreifen sich fortpflanzen. Setzt man voraus, dass ein Maximum von Fluorescenzwirkung eintritt im Schwingungsbauche einer gewissen Vectorgrösse, die infolge der Lichtbewegung periodische Aenderungen erleidet,

---

1) Diese Erscheinung, welche auch bei dickeren Häutchen vorhanden ist, kann daher zur Construction eines fluorescirenden Oculars benutzt werden, wenn man man mit Hülfe desselben die Fluorescenzwirkungen verschiedener Spectralbereiche kei directer Durchsicht studiren will. Abgesehen von der Verstärkung der Fluorescenz durch Totalreflexion ist die letztere noch deshalb nützlich, weil sie alles Licht, welches nicht Fluorescenz hervorruft, völlig vom Auge des Beobachters abschneidet.

so wird die Intensität der Fluorescenz in demjenigen Lichtstreifen, in welchem jener Vector parallel zur Einfallsebene gerichtet ist, proportional der doppelten Summe des Quadrates der Amplitude des betreffenden Lichtvectors sein: in demjenigen Lichtstreifen indessen, in welchem der Vector senkrecht zur Einfallsebene schwingt, ist die Intensität der Fluorescenz proportional dem vierfachen Quadrat der Amplitude des Vectors oder gleich Null, je nachdem für denselben bei der Totalreflexion an der reflectirenden Fläche ein Schwingungsbauch oder Schwingungsknoten liegt. Dabei ist abgesehen von Phasenänderungen, welche durch Totalreflexion im allgemeinen herbeigeführt werden, welche aber beliebig klein gemacht werden können, wenn man den Einfallswinkel des Lichtes im Prisma genügend nahe am Grenzwinkel der Totalreflexion wählt.

Nun liegt aber für den zuletzt genannten Lichtvector an der totalreflectirenden Fläche selbst ein Schwingungsbauch, wie dies sowohl die Reflexionsformeln der Fresnel'schen als auch der Neumann'schen Theorie zeigen, und um einen der in jenen Formeln auftretenden Lichtvectoren muss es sich hier handeln. — Es folgt daher, dass, wenn der Einfallswinkel 45° genügend nahe am Grenzwinkel der Totalreflexion liegt, einer der beiden Fluorescenzstreifen auf der Hypotenusenfläche des Prismas die doppelte Helligkeit haben muss als der andere, und zwar derjenige, dessen Lichtvector (im obigen Sinne) senkrecht zur Einfallsebene schwingt.

Dies Resultat haben wir durch die Beobachtung bestätigen können. Wenn man ein Glasprisma, welches einen niederen Brechungsexponenten besass, sodass der Grenzwinkel der Totalreflexion nicht sehr von 45° verschieden war, gegen das einfallende Licht allmählich so drehte, dass an der Hypotenusenfläche des Prismas, welches mit einer dünnen fluorescirenden Haut überzogen war, zunächst keine Totalreflexion und dann solche eintrat, so war für letztere Stellungen des Prismas die Fluorescenz in demjenigen der beiden Lichtstreifen die hellere, für welchen die Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammenfiel. Dies Resultat wurde erhalten, sowohl wenn die Einfallsebene der Hypotenusenfläche horizontal, wie wenn sie vertical stand. — Von quantitativen Messungen der Helligkeit der Fluorescenz konnte bei der beschriebenen

Anordnung nicht die Rede sein. Denn das einfallende Licht war nicht genügend parallel, da es zuletzt durch eine Linse von kurzer Brennweite gegangen war, und die absoluten Phasenänderungen durch Totalreflexion variiren sehr schnell mit dem Einfallswinkel. Auch hätte, weil der Einfallswinkel nicht genau 45° war, eine kleine Correction an dem Helligkeitsverhältniss der beiden Fluorescenzbilder angebracht werden müssen.

Jedenfalls stand aber diese Beobachtung qualitativ im Einklang mit den bisherigen, *dass nämlich der Lichtvector, in dessem Schwingungsbauche das Maximum der Fluorescenz liegt, senkrecht zur Polarisationsebene schwingt.* Ausserdem bietet letztere Beobachtung einen Fingerzeig, wie man vielleicht die Wirkungsweise stehender Wellen bei anderen lichtempfindlichen Phänomenen, wie z. B. beim Electricitätsverlust durch Bestrahlung, oder bei den Becquerel'schen Strömen untersuchen kann.

Was übrigens die eingangs erwähnten anderen zur Untersuchung der Wirkung stehender Wellen geeigneten Phänomene anlangt, so haben wir bisher betreffs der Becquerel'schen Ströme nur vorläufige Messungen gemacht, welche uns bewiesen, dass diese Beobachtungen mit Schwierigkeiten verknüpft sein werden, wenn man zu zuverlässigen Resultaten gelangen will. Dieselben liegen einerseits daran, dass die kleinste Erschütterung schon merklich die electromotorische Kraft einer lichtempfindlichen Zelle verändert, und andererseits daran, dass das Licht in gewissen Bereichen des Spectrums, welche je nach der Beschaffenheit der angewandten lichtempfindlichen Electroden (Silber, Jodsilber, Chlorsilber, Bromsilber, auch je nachdem sie einmal auf hohe Temperatur gebracht sind, oder nicht) verschieden sind, sensibilatorisch wirkt für ein gewisses anderes Spectralbereich, dass aber nach einmaligen Belichten der Electrode mit letzterem seine Lichtempfindlichkeit wieder verloren geht, sie aber durch Bestrahlung mit dem sensibilatorischem Theile des Spectrums wieder gewonnen werden kann.

Bei Vorversuchen, welche wir behufs bolometrischer Prüfung der Wärmewirkungen stehenden Lichtwellen anstellten, stiessen wir insofern auf Schwierigkeiten, als dünnes auf Glas niedergeschlagenes Silber oder auf Glas aufgeklebtes Blattgold ein mit der Temperatur sehr wenig und dabei unregelmässig

variirendes Leitungsvermögen aufwiesen; Gelatinhäute von der erforderlichen Dünne leiteten auch bei reichlichem Zusatz guter Electrolyte überhaupt nicht nachweisbar, sobald sie eingetrocknet waren, während sie nach schwachem Anhauchen infolge rascher Verdunstung eine sehr inconstante Leitfähigkeit besassen. Wegen des unvergleichlich viel grösseren Temperaturkoefficienten würden sich natürlich Leiter zweiter Klasse besonders empfehlen. — Es ist in gewisser Weise plausibel, dass die Wärmewirkung stehender Wellen an denselben Stellen liegt, wie ihre Fluorescenzwirkung. Denn man kann die Erwärmung eines Körpers durch Lichtstrahlen als eine Art Fluorescenz auffassen, indem die Lichtstrahlen absorbirt werden und der Körper Strahlen grösserer Wellenlänge wieder aussendet. Bei der wirklichen Fluorescenz fallen diese in den sichtbaren Theil des Spectrums, bei der Erwärmung in den unsichtbaren, ultrarothen. *Aus dem angeführten Grunde halten wir es für wahrscheinlich, dass die Wärmewirkungen stehender Lichtwellen mit den Fluorescenzwirkungen (und den photographischen) zusammenfallen.*

Wir versuchten auch, die Erscheinung der Diffusion des Lichtes an unregelmässigen Partikelchen zum Studium stehender Wellen zu verwerthen. Es scheinen aber bei diesem Phänomen nicht gegeneinander gerichtete Wellenzüge in gegenseitigen Einfluss gesetzt zu werden, sondern sie scheinen durch das alleinige Verhalten eines in einer Richtung (und zwar ins Auge des Beobachters) sich fortpflanzenden Wellenzuges bestimmt zu sein, gerade wie z. B. die Newton'schen Ringe im reflectirten Licht. — Man kann eine Fläche, welche das Licht diffundirt, durch Behauchen einer kalten Glasplatte herstellen. Legt man eine solche, sehr dünn behauchte, auf eine warme, so setzen sich die im direkten Licht gebildeten Newton'schen Interferenzstreifen (bei homogener Beleuchtung) weit fort in den Theil, von welchem direktes Licht nicht mehr ins Auge reflectirt wird. Dreht man die Plattencombination um, sodass nur die Hinterfläche behaucht ist, so sind Interferenzstreifen im diffusen Licht nicht wahrnehmbar, sondern nur eine gleichmässige Helligkeit [1]. — Ersetzt man die hintere (unbehauchte)

---

1) Diese Erscheinungen zeigen sich nur bald nach dem Aufeinanderlegen der Platten, da nach längerer Zeit sich ihre Temperaturen ausgleichen und Wassertröpfchen auf beiden Flächen haften.

Glasplatte durch einen angewärmten Silberspiegel, so werden die Interferenzstreifen im diffusen Licht nicht deutlicher, sondern undeutlicher als vordem; dies zeigt zur Genüge, dass nicht das Verhalten stehender Wellen bei dieser Erscheinung massgebend ist, und dass die Lage der Interferenzstreifen denselben Gesetzen unterworfen ist, wie die Lage der im direct reflectirten Lichte sichtbaren Newton'schen Streifen. Aus letzterem kann man ja aber bekanntlich nicht eine Entscheidung dafür treffen, welcher Lichtvector für sie massgebend ist, wenn man unter dem Worte „massgebend" versteht, dass bei stehender Wellenbewegung der betreffende Lichtvector im Schwingungsbauche ein Maximum der Wirkung besitzen soll.

Göttingen, December 1891.

V. *Ueber die galvanische Polarisation an kleinen Electroden; von K. R. Koch und A. Wüllner.*

(Hierzu Tafel VI, Fig. 12—21.)

1. Schon vor längerer Zeit sind von Buff[1]) an Platindraht-Electroden in verdünnter Schwefelsäure bei grossser Stromdichtigkeit Polarisationen beobachtet worden, welche erheblich grösser waren als die, welche an Platten von grösserer Oberfläche also bei kleiner Stromdichtigkeit bekannt waren. Diese Resultate erhielt bekanntlich Buff nach der Methode, dass er in dem Stromkreise, in welchem sich seine Zersetzungszelle befand, die verschiedenen Stromstärken mass, die bei Anwendung von verschieden grossen electromotorischen Kräften erzeugt wurden. Vor Kurzem sind in unmittelbarer Folge zwei Untersuchungen über denselben Gegenstand veröffentlicht — von den Hrn. Fromme[2]) und Richarz[3]) — die zu entgegengesetzten Resultaten führen. Hr. Fromme sieht in seinen neueren Versuchen eine Bestätigung der Schlüsse, zu denen vor ihm Buff und — in einer früheren Untersuchung[4]) — auch er selbst gelangt war, dass nämlich an kleinen Electroden, aber bei grosser Stromdichte, starke Polarisationen auftreten. Die von Hrn. Fromme angewandte Methode war die Buff'sche der Strommessungen. Hr. Richarz dagegen kommt zu dem Schlusse, dass sich die Polarisation mit der Dichte des Stromes nicht ändere, dass dagegen der Widerstand der Electrolyten ein veränderlicher sei.

Die Einwürfe, die Hr. Richarz gegen die Buff'sche Methode erhebt, sind ohne Zweifel berechtigt, sobald man annimmt, dass der Widerstand des Electrolyten veränderlich ist. In dem Falle können Strommessungen nicht zum Ziele führen, da wenn die Polarisation und der Widerstand mit der Strom-

1) Buff, Pogg. Ann. **130.** p. 341. 1867.
2) Fromme, Wied. Ann. **39.** p. 187. 1890.
3) Richarz, Wied. Ann. **39.** p. 67 u. 201, 1890.
4) Fromme, Wied. Ann. **33.** p. 80. 1888.

stärke variabel sind, die Ohm'sche Gleichung zwei Unbekannte enthält, und jede Beobachtung, wenn durch die Zersetzungszelle ein Strom von anderer Intensität fliesst, zwei neue Unbekannte liefert. Hr. Richarz wendet desshalb bei seinen Untersuchungen eine andere Methode an; er misst die E. M. K. der Polarisation nach der Fechner'schen Methode, nachdem er in den Stromkreis einen sehr grossen Widerstand eingeschaltet hat, und berechnet dann den Widerstand der Zersetzungszelle aus der Stromstärke in dem primären Stromkreise, indem er die gemessene Polarisation in die Ohm'sche Gleichung einsetzt. Wegen der Einzelheiten verweisen wir auf die Abhandlung des Hrn. Richarz. Gegen seine Methode möchten wir einwenden, dass er die Polarisation misst, nachdem der polarisirende Strom ganz erheblich geschwächt ist. Die nothwendige Voraussetzung für die Zulässigkeit dieser Methode ist die, dass die Polarisation auch nach der Unterbrechung bez. nach der Schwächung des polarisirenden Stromes eine messbare Zeit constant ist, eine Voraussetzung, die nicht ohne weiteres für sehr kleine Electroden zuzugeben ist. Einige Beobachtungen, die wir gemacht haben, lassen das zum mindesten zweifelhaft erscheinen. Unsere Beobachtungsmethode bestand darin, dass wir die Potentialdifferenz zwischen den Electroden und den Flüssigkeiten, in denen sie standen in später genauer zu besprechender Weise direct electrometrisch bestimmten. Jede Aenderung der Stromstärke gibt sich, besonders bei kleinen Electroden, sofort auch an der Nadel des Electrometers zu erkennen. Selbst wenn ein Commutator, welcher in den Stromkreis eingeschaltet war, um am Galvanometer den Strom zu commutiren, schnell umgelegt wurde, zeigte sich bei kurzen Drahtelectroden sofort eine Zuckung an der Electrometernadel. Es ist demnach wenigstens möglich, dass Hr. Richarz nur die seinen starkgeschwächten Strömen entsprechende Polarisation gemessen hat.

Hr. Richarz gibt indessen den beobachteten Erscheinungen nicht nur eine andere Deutung wie die früheren Beobachter, sondern seine Resultate stehen auch mit den früheren Beobachtungen in einem thatsächlichen Widerspruch. Hr. Fromme findet unter Annahme eines constanten Widerstandes ein Wachsen der Polarisation mit zunehmender Stromstärke

d. h. bei zunehmender electromotorischer Kraft wächst die Stromstärke langsamer als es einem constanten Werthe der Polarisation entspricht; Hr. Richarz dagegen findet unter der Annahme einer constanten Polarisation mit wachsender electromotorischer Kraft einen abnehmenden Widerstand in der Zersetzungszelle d. h. also der Strom wächst mit zunehmender E. M. K. so, wie wenn bei constantem Widerstande die Polarisation abnähme.

2. Wir haben deshalb, um eine Aufklärung über diese Frage zu erhalten, auf anderem Wege die Polarisation während des Durchganges des Stromes gemessen, indem wir unter gleichzeitiger Bestimmung der Stromstärke (J) sowie der Potentialdifferenz (D) der Electroden, die Polarisation (p) an den beiden Electroden electrometrisch maassen; hieraus konnte dann noch der Widerstand (W) in der Zersetzungszelle durch die bekannte Beziehung

$$\frac{D-p}{J} = W$$

bestimmt werden. Zur electrometrischen Messung der Polarisation an den einzelnen Electroden wandten wir mit nur geringen Abänderungen die Methode von Beetz an.

Nach dieser Methode bringt man die Electroden in getrennte Gefässe a und k. (Fig. 12, Taf. VI), welche durch einen Heber mit einander verbunden sind, der die gleiche Flüssigkeit enthält wie die Gefässe; die beiden Gefässe mit dem Heber bilden somit die Zersetzungszelle. In der Nähe der Gefässe a und k befinden sich zwei die gleiche Flüssigkeit enthaltende Bechergläser, (c) und (d) von denen (c) mit (a), (d) mit (k) durch Heber verbunden sind, welche ebenfalls die gleiche Flüssigkeit enthalten. Neben (c) und (d) ist das ebenfalls mit der gleichen Flüssigkeit gefüllte Becherglas (e) aufgestellt. Dieses kann durch einen umlegbaren, auch mit der Flüssigkeit der Zersetzungszelle gefüllten Heber entweder mit (c) oder mit (d) in leitende Verbindung gebracht werden. In (e) befindet sich ein Streifen desselben Metalls wie das der Electroden; derselbe ist durch einen Draht mit dem Elektrometer verbunden.

Bringt man eine der Electroden etwa (a) mit der Erde in leitende Verbindung, während der in (e) mündende Heber

in das betreffende Glas, in diesem Falle in (*c*) eingesetzt ist, so zeigt das Electrometer die Potentialdifferenz an, welche zwischen den Metallen in (*a*) und in (*e*) vorhanden ist. Sind aber die Metalle dieselben und die Flüssigkeiten in allen Gefässen gleich, so zeigt das Electrometer keine Ablenkung. Dieser Zustand liess sich bei einiger Sorgfalt stets herstellen, bevor der Strom durch die Zersetzungszelle geschlossen wurde. Geht ein Strom durch die Zelle, so bedeckt sich jede der Electroden mit irgend einer Schicht, die eine electrische Differenz, eine der electromotorischen Kraft des Stromes entgegengesetzt gerichtete E. M. K. hervorruft und die vielleicht auch, als eine schlecht leitende Schicht, einen gewissen Uebergangs-Widerstand bewirkt, sodass zwischen der zur Erde abgeleiteten Electrode und der Flüssigkeit ein Potentialsprung stattfindet, den wir als Polarisation an der betreffenden Electrode bezeichnen. Die Summe der electromotorischen Gegenkräfte und der etwa vorhandenen Uebergangswiderstände an den beiden Electroden nennen wir die Polarisation. Vielleicht tritt hinzu noch eine durch den Strom bewirkte electrische Differenz der Flüssigkeiten im Anoden- und Kathoden-Gefäss, die zu der angegebenen Summe hinzugefügt werden muss, um die Gesammtpolarisation zu erhalten.

Diese Grössen messen wir, wenn wir während des Stromdurchganges die Potentialdifferenzen zwischen den zur Erde abgeleiteten Electroden (je einzeln gemessen) und dem mit dem Electrometer verbundenen Metall im Glase (*e*) bestimmen, wie man unmittelbar sieht, wenn man die einzelnen Glieder dieser Differenzen zusammenstellt. Wir setzen voraus, das Metall (*M*) des Gefässes (*e*) sei mit einem Quadrantenpaar des Electrometers verbunden, während das andere Quadrantenpaar ebenso wie die betreffende Electrode zur Erde abgeleitet ist. Bezeichnen wir die Anode mit A, die Flüssigkeit im Anodengefäss mit F_a, die in den Gläsern (*c*) und (*e*) mit F_1, F_2, so ist in der gewöhnlichen Bezeichnungsweise electrischer Differenzen das Potential des mit M verbundenen Quadrantenpaares, wenn A zur Erde abgeleitet ist und kein Strom die Flüssigkeit durchsetzt.

$$A|T + F_a|A + F_1|F_a + F_2|F_1 + M|F_2 + El|M$$

wenn A | T die Differenz zwischen Anode und Erde, El | M die zwischen den Quadranten des Electrometers und M bedeutet. Ist A = M, so ist El | M + A | T = El | T, d. h. gleich der Potentialdifferenz des zweiten Quadrantenpaares gegen die Erde, wir messen demnach am Electrometer die Potentialdifferenz

$$F_a | A + F_1 | F_a + F_2 | F_1 + M | F_2,$$

dieselbe ist, wenn $A = M$, $F_a = F_1 = F_2$ ist, gleich Null.

Geht der Strom durch die Flüssigkeit, so bedeckt sich A mit irgend einer Schicht S_a. Nehmen wir an, in dem Gefässe *a* und ebenso in *k* entstände durch den Strom kein Potentialgefälle — wir werden nachweisen, dass bei unserer Anordnung kein merkliches entsteht — es werde aber infolge der electrischen Processe die Flüssigkeit F_a in electrischer Beziehung in F_a^1 verwandelt, so wird jetzt das durch electrische Erregungen im Electrometer erzeugte Potential:

$$S_a | A + F_a^1 | S_a + F_1 | F_a^1 + F_2 | F_1 + M | F_2.$$

Setzen wir

$$S_a | A + F_a^1 | S_a + F_1 | F_a^1 = \pi_a + F_a | A + F_1 | F_a$$

so wird das Potential infolge der electrischen Differenzen gleich

$$\pi_a + F_a | A + F_1 | F_a + F_2 | F_1 + M | F_2 = \pi_a$$

da nach den vorherigen Bestimmungen die Summe der neben π_a auf der linken Seite stehenden Glieder gleich null ist. Ist neben diesen electrischen Differenzen noch ein Uebergangswiderstand an der Anode vorhanden, dessen Grösse gleich u_a ist, so entspricht demselben bei der Stromstärke i ein Potentialsprung $- i\,u_a$, da die Flüssigkeit ein um diese Grösse kleineres Potential haben muss, wenn der Strom den Uebergangswiderstand überwinden soll.

Der im Electrometer gemessene Werth des Potentials ist demnach in dem Falle $\pi_a - i\,u_a$.

Wird statt der Anode die Kathode abgeleitet, so ist das im Electrometer beobachtete Potential, wenn wir alles, was sich auf die Kathode bezieht mit dem Index *k* versehen und die Kathode mit *K* bezeichnen.

$$S_k | K + F_k^1 | S_k + F_1 | F_k^1 + F_2 | F_1 + M | F_2.$$

oder, wenn wir setzen:

$$S_k | K + F_k^1 | S_k + F_1 | F_k^1 = \pi_k + F_k | K + F_1 | F_k.$$

so ist das durch die electromotorischen Kräfte bewirkte Potential gleich π_k; tritt ein Uebergangswiderstand u_k hinzu, so wird das Potential $\pi_k + i u_k$ da in der Flüssigkeit das um den Werth $i u_k$ höhere Potential sein muss, als auf der Kathode, wenn der Strom i diesen Uebergangswiderstand überwinden soll.

Wird die Kathode abgeleitet und die Anode mit dem Electrometer verbunden, so ist unter der wohl nicht anzuzweifelnden Voraussetzung, dass die Flüssigkeit in dem Heber, welcher das Kathoden- und Anodengefäss verbindet, ungeändert also gleich F_1 sei, und wenn wir den Widerstand des Electrolyten mit W bezeichnen, das gemessene Potential der Anode

$$S_k | K + i u_k + F_k^1 | S_k + F_1 | F_k^1 + F_a^1 | F_1 + S_a | F_a^1 + A | S_a + i u_a + i W = D$$

oder

$$\pi_k + i u_k - \pi_a + i u_a + i W = D$$

oder setzen wir

$$\pi_k + i u_k = p_k, \ \pi_a - i u_a = p_a$$

$$p_k - p_a + i W = D$$

und man erkennt, dass

$$p_k - p_a = p = \pi_k - \pi_a + i(u_k + u_a)$$

die gesammte Polarisation der Electroden ist. Wir erhalten also die Gesammtpolarisation aus den beiden ersten Messungen des im Electrometer vorhandenen Potentials, wenn das Metall im Gefäss e mit dem Electrometer verbunden und das einemal die Anode, das anderemal die Kathode zur Erde abgeleitet ist. Die Messung von D und der Stromstärke i gibt uns den Widerstand des Electrolyten

$$W = \frac{D - p}{i}.$$

Wir bemerken, dass der so gemessene Widerstand des Electrolyten nicht der von Hrn. Richarz gemessene ist, indem letzterer etwaige Uebergangswiderstände mit einschliesst.

3. Wir untersuchten zunächst die Polarisation an Platinoberflächen verschiedener Grösse in Schwefelsäure verschiedener Concentration. Die Anordnung unserer Versuche im einzelnen war folgende. Als Gefässe zur Aufnahme der Electroden dienten zwei abgesprengte obere Hälften von Glasflaschen von 16 cm Durchmesser, mit geschliffenem Hals, A und B, Fig. 13.

In die Hälse waren die Enden eines U-Rohres von 2,5 cm Durchmesser und 50 cm ganzer Länge eingeschliffen. Es entstand so ein U, dessen Schenkel oben die Gefässe trugen, in welche die Electroden, die Anode *a* in *A*, die Kathode *k* in *B* eingesetzt wurden. Der ganze Apparat stand in einem grösserem Gefässe von Blech, das mit Eis gefüllt wurde, um die Temperatur der Flüssigkeit constant zu halten. An der Mitte des horizontalen Theiles des U war ein Rohr angeschmolzen, Ia, Fig. 13, in welches ein Thermometer eingesenkt war, um die Temperatur der Flüssigkeit zu controliren. Es gelang, solange nicht zu starke Ströme angewandt wurden, die Temperatur der Flüssigkeit nahezu constant auf 0^0 zu erhalten, nur bei Strömen über 0,5 Amp. stieg die Temperatur um einige Grade. Neben dem Blechgefässe in gleicher Höhe mit den Gefässen *A* und *B* standen auf einer Paraffinplatte zwei Bechergläser *C* und *D*, Fig. 14, welche wie alle Gefässe und Heber mit derselben Flüssigkeit gefüllt waren, die sich in den Electrodengefässen *A* und *B* befand. Die leitende Verbindung von *A* und *C* einerseits, *B* und *D* andererseits, wurde durch die Heber II, Fig. 14, vermittelt, welche von einem oberhalb des Apparates befestigten Holzstabe getragen wurden. Die Heber waren, wie auch der Heber I, an ihren Enden mit Pergamentpapier verschlossen. Hinter den beiden Bechergläsern *C* und *D* befand sich ein drittes Becherglas, welches durch den umlegbaren Heber III entweder mit dem Gefässe *C* oder mit *D* leitend verbunden werden konnte. In dem Gefässe *E* war ein Metallblech *m*, von gleichem Metall wie Anode und Kathode in die Flüssigkeit eingetaucht, welches durch einen isolirten Draht mit dem Electrometer verbunden war.

Der Strom wurde von einer Batterie Grove'scher Elemente bis zu 50 geliefert. In den Stromkreis war ein Rheochord, bis zu 1000 Siem.-Einh., *W* eingeschaltet und ausserdem ein Siemens'scher Widerstandskasten n_1. Zu letzterem befand sich im Nebenschluss ein Telephon, um etwaige Discontinuitäten des Stromes zu erkennen; ausserdem war in den Stromkreis ein auf absolutes Maass geaichtes Galvanometer eingeschaltet, dessen Empfindlichkeit durch einen Nebenschluss in weiten Grenzen geändert werden konnte.

Die Aichung wurde für jede Empfindlichkeit gesondert vorgenommen. Ein vor dem Galvanometer passend eingeschalteter Commutator gestattete, im Galvanometer den Strom umzukehren, ohne dass die Richtung des Stromes in dem übrigen Stromkreise geändert wurde.

Zu den Versuchen über die Polarisation des Platins in verdünnter Schwefelsäure wurden Platinplatten oder Drähte benutzt. Letztere hatten einen Durchmesser von 0,01 cm. Um Drähte von ganz bestimmter Länge als Electroden benutzen zu können, werden die Drähte in Uförmige Glasröhren eingeschmolzen, welche mit Quecksilber gefüllt waren, sodass sie durch Eintauchen der Zuleitungsdrähte in das Quecksilber den Strom zugeleitet erhielten. Die Drähte ragten, wie Fig. 13 und noch deutlicher Fig. 13a zeigt, aus dem kürzeren Schenkel des U nach oben hervor. Da die Drähte ganz in die Flüssigkeit eintauchten, war die Länge der Electroden genau bestimmt[1]), was wegen des capillaren Ansteigens der Flüssigkeit nicht der Fall gewesen wäre, wenn wir einfach die Drähte von oben in die Flüssigkeit getaucht hätten. Ausserdem bot diese Anordnung den Vortheil, dass die an den Electroden entwickelten Gase leichter entweichen konnten. Das zu den Messungen der Potentialdifferenzen zwischen der Anode, bez. der Kathode und den Flüssigkeiten, sowie der Potentialdifferenz D zwischen den Electroden benutzte Quadrant-Electrometer war ein solches Mascart'scher Form. Es wurde entweder die Nadel desselben durch eine Zn-Cu-Mg SO_4-Batterie geladen, während das zu messende Potential dem einen Quadrantenpaar zugeführt wurde, oder es wurden die beiden Quadrantenpaare durch 20 oder 10 solcher Elemente auf entgegengesetzt gleiches Potential geladen und das zu messende Potential der Nadel mitgetheilt. Ein passend angebrachtes, aus einer Paraffinplatte hergestelltes Schaltbret liess diese verschiedenen Schaltungsweisen in bequemer Weise vornehmen; ebenso gestattete dasselbe bei der ersteren Schaltungsweise die Nadel nach Belieben positiv oder negativ zu laden und bei der zweiten Schaltungsweise die Ladung der Quadranten

1) Auf einen Umstand, der auch bei dieser Anordnung die Genauigkeit der Längenbestimmungen etwas beeinträchtigt hat, wird in § 8 hingewiesen.

zu vertauschen. Ein zweites in der Nähe des Beobachters befindliches Schaltbret gestattete bei der ersten Schaltung, das zu messende Potential beliebig dem einen oder anderen Quadrantenpaare zuzuführen.

Diese verschiedenen Ladungsweisen wurden bei allen Messungen vorgenommen, um in allen Fällen die Ablenkungen der Electrometernadel nach beiden Seiten zu beobachten.

Es konnten auf diese Weise, je nach der Ladungsweise, mit demselben Electrometer kleine und grosse Potentiale bis zu 90 und mehr Volts gemessen werden.

Die Scalen und Fernrohre waren etwa 4 m sowohl vom Galvanometer als Electrometer entfernt.

Durch eine Normalbatterie von sechs hohen Daniells, in der Form, in welcher dieselben von Hrn. Nahrwoldt[1]) beschrieben worden sind, deren electromotorische Kraft in absolutem Maasse von uns bestimmt war, wurde täglich das Electrometer vor jeder Messungsreihe geaicht.

4. Wir hoben vorhin schon hervor, dass die wesentliche Voraussetzung für die Anwendbarkeit unserer Methode die sei, dass in den Electrodengefässen kein erhebliches Potentialgefälle vorhanden sei, da sonst in den gemessenen Werthen p_a und p_k auch dieses enthalten wäre, wir also nicht die Polarisationen allein erhalten hätten. In mehrfachen Versuchsreihen überzeugten wir uns, dass diese Voraussetzung zutrifft. Wäre ein erhebliches Potentialgefälle vorhanden, so müssten sich die Werthe p_a und p_k durch eine Ortsänderung des Hebers II in den Electrodengefässen A und B ändern, so zwar, dass mit grösserem Abstande der Mündung des Abnehmehebers von den Electroden die Werthe von p_a und p_k grösser werden müssten. Folgende Tabelle zeigt, dass ein solcher Zusammenhang zwischen den Werthen und dem Abstande der Electroden vom Heber nicht vorhanden ist. Die Versuche wurden angestellt mit sehr kurzen Drahtelectroden in 1 procent. Schwefelsäure. In der Tabelle sind unter A_1 die Abstände des Hebers von der Anode, unter A_2 jene von der Kathode unter p_a die Polarisation an der Anode, in der angegebenen Weise gemessen in Volts unter p_k die Polarisation der Ka-

1) Nahrwoldt, Wied. Ann. 5. p. 467. 1878.

thode, unter i die Stromstärken in Amp., unter D die Potentialdifferenz in Volt zwischen Anode und Kathode angegeben.

Tabelle 1.

A_1	p_a	A_2	p_k	i	D
6 cm [1])	16,8	6 cm [1])	9,95	0,0387	36,3
6 „ [2])	15,6	0,5 „	10,2	0,0396	35,8
0,5 „	15,6	0,5 „	10,2	0,0396	35,8
0,5 „	15,6	6 „ [2])	10,2	0,0396	35,8
0,5 „	14,9	15 „ [2])	10,1	0,0396	35,8

In etwas anderer Anordnung erhält man das gleiche Resultat. Während ein Strom von 0,2 Amp. durch eine andere Schwefelsäurelösung ging, wurde die zur Erde abgeleitete Anode mit dem Verschlusspapier des Hebers II zur Berührung gebracht und für p_a der Werth 3,09 gefunden. Es wurde dann die Anode in dem Gefässe A umhergeführt, gehoben, gesenkt, auf die grösstmögliche Entfernung gebracht, während einer von uns die Nadel des Electrometers beobachtete. Es zeigte sich, dass die Nadel nur ganz geringe unregelmässige Schwankungen vollführte; im Beobachtungstagebuch steht vermerkt, die Nadel verlegte sich bei einer Ablenkung von 250 Scalentheilen nicht um drei Theilstriche.

Einen weiteren Beweis gab folgende Versuchsreihe. An eine Platinplatte war ein Platindraht angeschweisst von 0,1 mm Durchmesser und etwa 6 mm Länge. Das Blech war an einem mit einer Mikrometerschraube in verticaler Richtung verschiebbaren Schlitten befestigt, sodass man kürzere oder längere Stücke des Drahtes oder auch des Blechs in die Flüssigkeit eintauchen konnte. Man konnte das so vorgerichtete Blech als Anode oder Kathode gebrauchen, während in dem anderen Electrodengefäss als Electrode eine Platinplatte benutzt wurde. Wurde der Draht nur eben eingetaucht, so war der Strom schwach, mit tieferem Einsenken nahm derselbe an Stärke zu. Da Heber und Draht stets in demselben Abstande sich befanden, hätte, im Falle im Electrodengefäss ein

1) Abstand seitlich 6 cm rechtwinklig zur Verbindungslinie a I k.

2) Abstand 6 cm hinter den Electroden, also in der verlängerten Verbindungslinie a I k.

erhebliches Potentialgefälle vorhanden gewesen wäre, mit wachsender Stromstärke ein Wachsen der gemessenen Werthe p_a bez. p_k eintreten müssen; es zeigte sich das Gegentheil, wie nachfolgende Tabelle zeigt. In derselben ist unter T die Tiefe, bis zu welcher der Draht, in der ersten Hälfte als Anode, in der zweiten als Kathode, eingesenkt war, angegeben. Das Zeichen × neben diesen Angaben bedeutet, dass die betreffende Polarisation schwankte und dass die betreffenden Werthe von p Mittelwerthe sind, die mit einiger Unsicherheit behaftet sind. Unter p_a und p_k sind die Polarisationen der Anode und Kathode, unter D die Potentialdifferenz der Electroden, unter i die Stromstärke, unter $D - p$ die Differenz zwischen D und $p_a + p_k$ und unter W der sich aus den beiden letzten Spalten ergebende Widerstand des Electrolyten aufgeführt. Die Zersetzungszelle stand nicht in Eis, bei den letzten beiden Versuchen war die Temperatur im Heber I erheblich (auf 25°) gestiegen.

Tabelle 2.

	T	p_a (Volt)	p_k (Volt)	D (Volt)	i Amp.	$D-p$ (Volt)	W (Ohm)
Anode	1 mm ×	4,71	1,29	8,18	0,119	2,18	18,2
	2 "	4,01	1,45	8,08	0,148	2,61	17,6
	3 "	3,63	1,48	8,02	0,167	2,90	17,4
	5 "	3,21	1,49	7,95	0,186	3,24	17,5
	Kante	2,19	1,52	7,76	0,234	4,04	17,3
Kathode	Berührg. ×	1,30	6,23	8,72	0,071	1,19	16,6
	1 mm ×	1,37	4,88	8,35	0,121	2,10	17,3
	2 "	1,39	3,87	8,14	0,168	2,88	17,1
	3 "	1,41	3,52	8,13	0,183	3,21	17,4
	5 "	1,42	3,02	8,01	0,204	3,58	17,5
	Kante	1,46	2,02	7,82	0.258	4,35	16,9
	Platte	1,49	1,43	7,72	0,289	4,88	16,6

Aus allen diesen Beobachtungen glauben wir den Schluss ziehen zu dürfen, dass die gemessenen Werthe von p_a und p_k in der That den Potentialsprung zwischen den Electroden und den angrenzenden Flüssigkeiten geben, also das, was man stets als die Polarisation der Electroden bezeichnet hat.

5. Die Messungen erstreckten sich über drei Spitzenpaare, Drähte von etwa 0,5 mm, 3 mm und 5 mm Länge und 0,1 mm Durchmesser, deren Oberflächen also etwa 0,16, 0,95, 1,58 qmm betrugen und Platten von ungefähr 500 qmm Oberfläche. Je

eine Spitze jedes Paares wurde an einer Siegellackstange befestigt, sodass die drei Spitzen sich unmittelbar nebeneinander befanden. Die eine der Siegellackstangen wurde mit *A*, die andere mit *B* bezeichnet, und so auch die je drei Spitzen an *A* mit Spitzen *A*, diejenigen an *B* als Spitzen *B* bezeichnet. Da die Spitzen eines Paares nicht genau von gleicher Länge waren, was sich schon deshalb nicht erreichen liess, da die Einschmelzung der Spitzen in die Glasröhren nicht ganz gleichmässig war, wurden sowohl die Spitzen *A* als auch *B* einmal als Anoden und dann als Kathoden benutzt. Als Electrolyten wurden verwandt 1 procent., 10 procent., 20 procent., 30 procent., 42 procent. Schwefelsäurelösungen. Die Spitzen mussten für jede Lösung erneuert werden, da, wie wir sehen werden, dieselben bei den letzten Versuchen jeder Reihe bei ihrer Benutzung als Anoden zerstört wurden; aus dem Grunde sind die Längen der bei den verschiedenen Reihen gleichnamigen Spitzen nicht absolut gleich.

In nachfolgenden Tabellen sind unsere Beobachtungen zusammengestellt. Unter p befindet sich die Gesammtpolarisation $p = p_k - p_a$, bez., da in den Spalten p_a die Werthe der Sauerstoffpolarisation mit positivem Vorzeichen angegeben sind, ist p die Summe der unter p_a und p_k angegebenen Werthe, die Spalte p_a/p enthält den Antheil der Sauerstoffpolarisation an der Gesammtpolarisation, unter D ist die Potentialdifferenz zwischen Anode und Kathode angeführt, die Werthe von D und p in Volts, unter i befinden sich die Stromstärken in Ampère, unter $W = (D - p)/i$ der Widerstand in der Zersetzungszelle in Ohm. Schliesslich ist unter p ber. der nach den später anzugebenden Formeln berechnete Werth der Gesammtpolarisation angegeben.

I.

Schwefelsäurelösung 1 Proc. H_2SO_4 in 100 Lösung.

Es sind vier verschiedene Lösungen mit der Waage hergestellt, indem man zu der abgewogenen Wassermenge aus einer Bürette die Schwefelsäure zufliessen liess. Die Lösungen sind, wie die Werthe von W zeigen, nicht ganz gleichartig geworden, die eine zeigt im Mittel $W = 265$, die anderen 275, die vierte etwa 288. Bei dem Werthe $W = 248$, der einigemale

in den Tabellen vorkommt, war die erste der vier Flüssigkeiten durch vorher benutzte stärkere Ströme, trotzdem alles in Eis stand, im Heber auf etwas über 3° C. erwärmt worden. Die in den einzelnen der nächsten vier Tabellen mitgetheilten Werthe sind mit diesen vier Flüssigkeiten erhalten, sodass in jeder Tabelle, wie die Werthe W zeigen, dieselben vorkommen.

Tabelle 3.

Spitzen 0,5 mm lang. Strom $A \longrightarrow B$.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber. 1	p ber. 2
18,72	8,96	9,62	0,48	25,41	0,0251	273,1	18,80	18,83
19,47	9,14	10,32	0,47	26,40	0,0250	277,8	19,51	19,54
19,96	9,48	10,48	0,47	26,81	0,0250	273,9	19,80	19,82
25,69	11,50	14,19	0,45	35,40	0,0339	290,0	25,94	25,89
33,83	15,66	18,17	0,46	47,24	0,0500	268,1	34,41	34,25
36,62	16,83	19,79	0,46	50,62	0,0500	277,9	36,83	36,64
37,84	17,07	20,77	0,45	52,03	0,0500	283,8	37,84	37,63
46,31	21,33	24,98	0,46	63,94	0,0710	248,3	46,35	46,04
51,06	22,71	28,34	0,44	69,87	0,0661	284,5	—	—
53,83	24,01	29,81	0,45	73,70	0,0689	288,0	—	—
55,01	24,61	30,40	0,45	75,43	0,0707	288,0	—	—
56,29	24,71	31,58	0,44	78,02	0,0730	299,0	—	—
61,24	26,69	34,53	0,44	82,57	0,0755	283,0	—	—

Bei den letzten fünf Beobachtungen dieser Reihe tritt öfter schon das später zu besprechende „Umschlagen" des Stromes ein, sodass die Beobachtungen unsicher sind.

Die Bezeichnung $A \rightarrow B$ bedeutet, dass der positive Strom durch die Flüssigkeit von der Spitze A zur Spitze B floss dass also die Spitze A Anode, die Spitze B Kathode war.

Alle Werthe in dieser und den folgenden Tabellen sind ursprünglich auf eine weitere Stelle berechnet gewesen, dann aber in den Tabellen auf die gegebenen Werthe abgerundet.

Die beiden Spalten p ber. werden später besprochen.

Tabelle 4.

Spitzen 0,5 mm lang. Strom $B \longrightarrow A$.

p	p_a	p_k	$\frac{p_a}{p}$	D	i	W	p ber. 1	p ber. 2
18,75	8,90	9,86	0,47	25,40	0,0251	265,0	18,79	18 97
32,88	15,56	17,37	0,47	—	0,0500	—	—	—
49,17	22,46	26,70	0,46	67,24	0,0713	252,2	48,65	48,72
51,24	22,77	28,46	0,44	71,19	0,0650	306,0	51,48	51,43
53,77	24,91	28,83	0,46	—	—	—	—	—
54,30	25,62	28,69	0,47	75,39	0,0808	260,9	54,49	54,51
56,43	26,62	29,81	0,47	77,44	0,0720	291,0	55,96	55,97
60,89	29,34	31,35	0.48	83,00	0,0761	293,0	59,94	59,93

In der Schaltung $A \rightarrow B$ scheint der Antheil der Sauerstoffpolarisation an der Gesammtpolarisation mit dem Wachsen der letzteren etwas abzunehmen, in der zweiten Stellung $B \rightarrow A$ scheint der Antheil ziemlich constant, nicht ganz die Hälfte der Gesammtpolarisation zu sein. Indess fand sich bei der ersten und zweiten Schwefelsäure in der Stellung $B \rightarrow A$ bei grossen Werthen von p auch ein ganz anderes Verhältniss. So ergab sich in der ersten Lösung anschliessend an die in Tabelle 4 gegebenen Messungen $p = 54{,}3$ Volt bei weiterer Verstärkung von D auf 81,92 Volt und i auf 0,090 Amp.

$$p = 58{,}26 \text{ Volt}, \; p_a = 30{,}45 \text{ Volt}, \; p_k = 27{,}81 \text{ Volt},$$

$$\text{also } \frac{p_a}{p} = 0{,}52.$$

Es wurde deshalb mit der zweiten Lösung eine Beobachtungsreihe durchgeführt, bei welcher nur p_a und p_k bei steigender Zahl von Elementen gemessen wurden. Die erste dieser Beobachtungen ist in Tabelle 4 mit $p = 53{,}77$ angegeben, die Zahl der benutzten Elemente war 43. Als bei dieser Beobachtungsreihe der Strom längere Zeit geschlossen blieb, nahm die Sauerstoffpolarisation auf 28,61 zu, dagegen die Wasserstoffpolarisation auf 27,22 ab. Während bei der ersten Messung der Strom die Stärke 0,08 hatte, war er am Schlusse 0,086. Es ergab sich dann weiter

	p	p_a	p_k	$\frac{p_a}{p}$	i
bei 44 Elementen	$p = 57{,}63$,	$p_a = 30{,}44$,	$p_k = 27{,}81$,	$= 0{,}523$,	$i = 0{,}088$,
„ 45 „	58,76,	30,99,	27,75,	0,527,	0,090,
„ 46 „	61,63,	33,59,	28,15,	0,545,	0,091.

Eine Vergrösserung der Elementenzahl liess keinen constanten Polarisationszustand mehr bestehen, schon bei 46 Elementen schwankte die Electrometernadel erheblich hin und her, es konnte aber noch eine Mittellage beobachtet werden, bei 47 Elementen war eine solche nicht mehr anzugeben. Es trat eben zeitweise das vorhin schon erwähnte, später näher zu besprechende Umschlagen des Stromes ein. Bei der dritten Lösung und der Schaltung $B \rightarrow A$ trat dieses Ueberwiegen der Sauerstoffpolarisation und das Umschlagen des Stromes nicht ein, es scheint demnach, dass das starke Wachsen der Sauerstoffpolarisation hier eine Vorbereitung des Umschlagens bedeutet.

Die nachstehende Tabelle 5 enthält die Beobachtungen für die 3 mm langen Spitzen, und zwar, da sich die Werthe p_a und p_k sowohl bei der Schaltung $A \rightarrow B$ als auch $B \rightarrow A$ bei gleichen Stromstärken stets nahezu gleich fanden, die Werthe der p, p_a, p_k u. s. w. für beide Schaltungsweisen.

Tabelle 5.

3 mm Spitzen.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
6,63	3,05	3.57	0,46	13,48	0,0250	273,5	6,84
6,85	3,09	3,76	0,45	13,42	0,0250	261,9	6,82
6,94	3,06	3,88	0,44	13,69	0,0250	269,9	6,91
10,30	4,60	5,69	0,45	23,24	0.0501	263,1	10,31
10,57	4,71	5,85	0,45	23,94	0,0500	267,4	10,56
10,95	5,05	5,90	0,46	24,70	0,0500	275,0	10,83
11,13	5,17	5,96	0,46	25,61	0,0510	284,8	11,15
14,28	6,61	7,66	0,46	34,11	0.0695	285,4	14,18
16,99	7,99	8,99	0,47	42,29	0,1000	253,0	17,08
17,05	7,80	9,26	0,46	42,43	0,1003	253,6	17,13
18,32	8,68	9,64	0,47	45,36	0,1000	270,5	18,18
28,34	12,87	15,48	0,45	75,07	0,1885	248,0	28,74
28,85	13,35	15,50	0,46	74,13	0,1890	245,0	28,40
31,30	13,93	17,37	0,44	82,49	0,1970	260,0	31,38

Tabelle 6.

Spitzen 5 mm lang. Stromrichtung $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
5,26	2,55	2,71	0,48	12,25	0,025	279,6	5,58
5,59	2,44	3,15	0,44	12,23	0,025	265,7	5,57
5,60	2.51	3,59	0,45	12,29	0,025	267,4	5,59
7,75	3,43	4,32	0,44	20,91	0,050	263,2	7,81
8,03	3,66	4,37	0,46	21,41	0,050	267,6	7,94
8,25	3,87	4,38	0,47	21,95	0,050	273,9	8,07
8,82	4,10	4,72	0,46	25,46	0,058	284,0	8,98
11,03	5,11	5,92	0,46	33,73	0,079	286,0	11,10
11,97	5,45	6,51	0,46	37,76	0,101	255,6	12.14
12,05	5,43	6,62	0,45	37,68	0,100	256,3	12,12
12,31	5,76	6,55	0,47	37,35	0,100	250,2	12,04
12,71	6,10	6,61	0,49	38,96	0,100	262,5	12,45
12,87	6,02	6,85	0,47	40,11	0,100	272,4	12,75
20,32	9,31	11,01	0,46	69,94	0,200	248,1	20,42
20,96	10,18	10,77	0,47	70,76	0,203	245,3	20,63
22,28	10,24	12,03	0,46	77,26	0,197	280,0	22,30
23,26	10,63	12,65	0,46	82,17	0,222	265,3	23,57
24,40	11,13	13,27	0,46	85,39	0,249	245,0	24,40

II.

Schwefelsäurelösung 10 Proc. H_2SO_4 in 100 Lösung.

Tabelle 7.

Spitzen 0,5 mm lang, Stromrichtung $A \to B$.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
5,94	3,20	2,75	0,54	6,77	0,0250	31,65	5,93
7,96	3,95	4,01	0,49	9,72	0,500	35,10	8,02
12,01	5,65	6,38	0,47	15,23	0,1006	32,00	11,99
			$B \to A$.				
5,94	3,48	2,46	0,59	6,82	0,025	35,1	5,86
7,72	4,40	3,32	0,57	9,47	0,501	35,0	7,80
11,90	6,50	5,40	0,55	15,17	0,1002	32,6	11,96
16,97	9,45	7,52	0,56	21,97	0,1500	33,4	16,93

Die Verschiedenheiten in dem Antheil der Sauerstoffpolarisation an der Gesammtpolarisation lässt auf eine Verschiedenheit der Spitzenlänge schliessen, so zwar, dass die Spitze B kleiner ist als die Spitze A. Nehmen wir aus der Tabelle die denselben Spitzen angehörigen Werthe von p_a und p_k, welche denselben Stromstärken, bez. mit grosser Annäherung denselben Werthen von D entsprechen, und setzen die Summe dieser Werthe gleich p, so wird

für Spitze A:			für Spitze B:	
$D =$ 6,8	$p =$ 5,66,	$\frac{p_a}{p} =$ 0,56,	$p =$ 6,23,	$\frac{p_a}{p} =$ 0,56,
9,6,	7,27,	0,53,	8,41,	0,52,
15,2,	11,05,	0,51,	12,89,	0,50.

An einer und derselben Spitze hat somit der Antheil der Sauerstoffpolarisation an der Gesammtpolarisation bei gleicher Stromstärke denselben Werth und dieser Antheil nimmt an beiden Spitzen gleichmässig mit wachsender Stromstärke ab.

Tabelle 8.

Spitzen 3 mm lang, Stromrichtung $A \longrightarrow B$.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
4,26	2,49	1,78	0,58	5,12	0,025	34,3	4,22
4,77	2,75	2,02	0,58	6,45	0,050	33,6	4,72
5,84	3,30	2,54	0,56	9,28	0,100	34,4	5,76
7,51	4,05	3,46	0,54	14,46	0,202	34,5	7,66
9,28	4,91	4,37	0,53	19,15	0,300	32,4	9,39
11,84	5,93	5,91	0,50	25,91	0,450	31,2	11,88
14,75	7,26	7,49	0,49	33,37	0,605	30,8	14,63
17,78	8,36	9,40	0,41	—	0,741	—	—
			$B \longrightarrow A$.				
4,25	2,46	1,79	0,58	5,06	0,025	32,5	4,11
4,77	2,78	1,98	0,58	6,62	0,050	36,7	4,71
5,77	3,23	2,54	0,56	9,16	0,100	33,9	5,69
7,70	4,15	3,54	0,54	14,68	0,201	34,8	7,82
9,53	4,88	4,65	0,51	19,29	0,300	32,5	9,59
12,12	6,11	6,01	0,50	26,61	0,451	32,1	12,41
14,95	7,28	7,67	0,49	33,47	0,602	30,7	15,05
18,18	8,62	9,56	0,47	40,86	0,755	30,0	17,89

Tabelle 9.

Spitzen 5 mm lang, Stromrichtung $A \longrightarrow B$.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
3,97	2,35	1,62	0,59	4,93	0,025	34,8	3,85
4,38	2,51	1,87	0,57	6,09	0,050	34,1	4,21
5,27	3,00	2,27	0,57	8,61	0,100	33,3	4,99
6,41	3,54	2,88	0,55	13,27	0,200	34,2	6,44
7,49	4,11	3,38	0,55	17,31	0,300	32,8	7,70
9,50	4,78	4,71	0,50	23,53	0,451	31,1	9,64
10,88	5,66	5,22	0,52	29,24	0,600	30,6	11,42
13,03	6,49	6,53	0,50	34,60	0,750	28,8	13,09
13,24	6,24	7,00	0,47	36,19	0,814	28,2	13,58
15,33	7,09	8,25	0,46	41,96	0,962	27,6	15,38
15,68	7,24	8,43	0,46	41,82	0,993	26,3	15,34
15.78	7,35	8,43	0,46	42,61	1,020	26,3	15,58
16,15	7,62	8,53	0.47	45,21	1,035	28,1	16,39
16,55	7,80	8,75	0,47	46,81	1,069	28,3	16,89
16,80	7,88	8,92	0,47	45,72	1,098	26,3	16,55
17,06	7,96	9,10	0,47	46,62	1,129	26,2	16,83
17,19	8,02	9,16	0,47	46,43	1,242	25,6	16,77

Stromrichtung $B \longrightarrow A$.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
4,03	2,36	1,67	0,59	4,93	0,025	35,8	4,01
4,43	2,58	1,85	0,58	6,11	0,050	33,8	4,36
5,22	2,99	2,24	0,57	8,58	0,101	33,4	5,09
6,46	3,63	2,83	0,56	13,42	0,200	34,7	6,52
7,59	4,10	3,49	0,54	17,57	0,301	33,2	7,75
9,38	5,00	4,38	0,53	23,80	0,451	32,0	9,60
11,39	5,81	5,58	0,51	29,45	0,601	30,1	11,27
13,27	6,66	6,60	0,50	35,82	0,751	30,0	13,17

Wir finden hiernach, dass bei dieser Schwefelsäurelösung der Antheil der Sauerstoffpolarisation mit wachsender Stromstärke stetig abnimmt und bei den grössten Werthen der Polarisation unter die Hälfte der Gesammtpolarisation herabsinkt, während er bei den schwächsten Strömen nahezu 0,6 der Gesammtpolarisation beträgt.

III.

Schwefelsäurelösung 20 Proc. H_2SO_4 in 100 Lösung.

Tabelle 10.

Spitzen 0,45 mm lang, Stromrichtung $A \longrightarrow B$.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
5,09	3,02	2,07	0,59	5,61	0,025	20,9	5,07
6,38	3,57	2,80	0,56	7,38	0,050	21,0	6,37
8,89	4,54	4,35	0,51	10,87	0,100	19,7	8,93
13,38	5,97	7,41	0,45	16,92	0,180	19,7	13,37
			$B \longrightarrow A$.				
5,07	3,12	1,95	0,61	5,54	0,025	18,9	5,01
6,28	3,74	2,54	0,59	7,33	0.050	21,0	6,31
8.61	4,84	3,77	0,56	10,61	0,100	19,9	8,68
11,53	6.32	5,21	0,55	14,48	0,158	18,7	11,47

Die Spitze B war kleiner als A, berechnen wir wie schon vorhin $p_a + p_k$ für die einzelnen Spitzen, so wird der Gang des Antheils der Sauerstoffpolarisation für beide Spitzen der gleiche:

	Spitze A:		Spitze B:	
$D = 5,58$	$p_a + p_k = 4,97$	$\frac{p_a}{p} = 0,61$	$p_a + p_k = 5,19$	$\frac{p_a}{p} = 0,60$
7,35	6,11	0,58	6,55	0,57
10,74	8,32	0,55	9,20	0,59

Der Antheil der Sauerstoffpolarisation nimmt mit wachsender Stromstärke an beiden Spitzen in gleicher Weise ab.

Tabelle 11.

Spitzen 3 mm lang, Stromrichtung $A \longrightarrow B$.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp)	W (Ohm)	p ber.
4,18	2,57	1,61	0,61	4,70	0,0250	20,5	4,20
4,56	2,80	1,77	0,61	5,57	0,0499	20,2	4,55
5,24	3,13	2,11	0,60	7,21	0,1003	19,6	5,21
6,50	3,62	2,88	0,56	10,49	0,1995	20,0	6,53
7,65	4,17	3,48	0,54	13,32	0,2985	19,0	7,67
9,65	5,06	4,59	0,52	18,19	0,4494	19,0	9,63
11,35	5,65	5,70	0,50	22,46	0,5988	18,6	11,35
12,84	6,29	6,56	0,49	26,20	0,7026	19,0	12,85
Stromrichtung $B \longrightarrow A$.							
4,12	2,52	1,60	0,61	4,62	0,0251	19,8	4,15
4,55	2,76	1,76	0,61	5,55	0,0499	20,2	4,52
5,16	3,13	2,03	0,61	7,11	0,1003	19,6	5,13
6,35	3,70	2,65	0,58	10,29	0,2009	19,6	6,38
7,58	4,18	3,41	0,55	13,38	0,3003	19,3	7,60
9,58	5,00	4,58	0,52	18,29	0,4533	19,2	9,53
11,45	5,81	5,64	0,51	23,21	0,6049	19,4	11,47

Tabelle 12.

Spitzen 5 mm lang. Stromrichtung $A \longrightarrow B$.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
3,96	2,42	1,54	0,61	4,49	0,0250	20,9	3,98
4,27	2,62	1,66	0,61	5,24	0,0500	19,2	4,21
4,67	2,82	1,85	0,60	6,65	0,1003	19,7	4,63
5,51	3,18	2,33	0,58	9,46	0,2003	19,7	5,47
6,22	3,51	2,72	0,56	12,09	0,3000	19,5	6,25
7,37	4,11	3,26	0,56	15,90	0,4548	18,8	7,39
8,26	4,45	3,81	0,54	19,26	0,5985	18,4	8,39
9,63	5,16	4,48	0,53	23,53	0,7577	18,3	9,67
11,36	5,81	5,55	0.51	28,84	0,9993	17,5	11,25
Stromrichtung $B \longrightarrow A$.							
3,86	2,34	1,52	0,61	4,38	0,0250	20,8	3,92
4,21	2,57	1,64	0,61	5,21	0,0501	20,0	4,16
4,63	2,82	1,81	0,61	6,59	0,1000	19,6	4,56
5,31	3,17	2,14	0,60	9,20	0,2016	19,3	5,32
6,01	3,42	2,58	0,57	11,74	0,2981	19,2	6,05
7,25	3,95	3,30	0,54	15,81	0,4541	18,8	7,23
8,39	4,50	3,89	0,53	19,81	0,5997	19,0	8,39

IV.

Schwefelsäurelösung 30,4 Proc. in Lösung.

Tabelle 13.

Spitzen *A* 0,586 mm; Spitze *B* 0,690 mm lang, Stromrichtung *A* ⟶ *B*.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
4,78	2,81	1,97	0,59	5,22	0,0250	17,9	4,73
5,66	3,40	2,26	0,60	6,59	0,0499	18,7	5,64
7,51	4,02	3,49	0,53	9,63	0,1000	21,2	7,66
9,15	4,54	4,61	0,50	11,72	0,1390	18,5	9,04
			Stromrichtung *B* ⟶ *A*.				
4,91	2,87	2,04	0,58	5,39	0,0250	19,0	4,88
5,73	3,29	2,43	0,57	6,66	0,0501	18,6	5,70
6,97	3,80	3,17	0,54	8,78	0,1000	18,1	7,07
10,37	5,12	5,26	0,49	13,86	0,2010	17,4	10,34

Tabelle 14.

Spitzen 3 mm lang. Stromrichtung *A* ⟶ *B*.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
4,15	2,41	1,73	0,58	4,59	0,0251	17,6	4,22
4,56	2,72	1,83	0,60	5,43	0,0501	17,5	4,54
5,21	3,03	2,17	0,58	7,05	0,1009	18,2	5,16
6,35	3,59	2,76	0,56	9,90	0,1994	17,8	6,25
7,27	4,07	3,20	0,56	12,77	0,3014	18,2	7,36
8,87	4,74	4,13	0,53	16,76	0,4522	17,4	8,89
10,44	5,39	5,05	0,52	20,90	0,6011	17,4	10,48
12,01	5,99	6,02	0,50	24,80	0,7496	17,1	11,97
			Stromrichtung *B* ⟶ *A*.				
4,19	2,48	1,71	0,59	4,68	0,0250	19,6	4,21
4,57	2,71	1,87	0,59	5,48	0,0500	18,1	4,52
5,09	2,98	2,11	0,58	6,87	0,1002	17,8	5,07
6,29	3,52	2,77	0,56	9,88	0,1998	18,0	6,25
7,26	3,95	3,31	0,54	12,58	0,3009	17,7	7,31
8,87	4,62	4,25	0,52	16,73	0,4492	17,5	8,94
10,58	5,29	5,28	0,50	21,04	0,6005	17,4	10,64
12,53	6,10	6,43	0,49	25,63	0,7466	17,5	12,44

Tabelle 15.

Spitzen 5 mm lang, Stromrichtung *A* ⟶ *B*.

p (Volt)	p_a(Volt)	p_k(Volt)	$\frac{p_a}{p}$	*D*(Volt)	*i* (Amp.)	*W* (Ohm)	*p* ber.
4,08	2,35	1,73	0,58	4,51	0,0251	17,2	4,12
4,28	2,58	1,71	0,60	5,18	0,0500	18,3	4,32
4,74	2,77	1,97	0,58	6,57	0,1006	18,1	4,72
5,50	3,19	2,31	0,58	9,09	0,2003	17,9	5,47
6,16	3,46	2,67	0,56	11,43	0,3009	17,5	6,15
7,35	3,97	3,38	0,54	15,32	0,4508	17,7	7,29
8.22	4,35	3,86	0,53	18,50	0,5958	17,2	8,22
9,17	4,76	4,41	0,52	21,88	0,7513	16,9	9,22
Stromrichtung *B* ⟶ *A*.							
4,06	2,40	1,66	0,59	4,52	0.0250	18,2	4,09
4,32	2,56	1,76	0,59	5,25	0,0501	18,5	4,30
4,63	2,75	1,88	0,59	6,45	0,1001	18,2	4,65
5,52	3,18	2,31	0,57	9,10	0,2004	17,9	5,42
6,16	3,48	2,68	0,56	11,50	0,3007	17,8	6,11
6,93	3,94	2,99	0,57	14,98	0.4522	17,8	7,12
8,19	4,40	3,79	0,54	18,68	0,6056	17,3	8,19
9,32	4,89	4,43	0,52	22,35	0,7447	17,5	9,25

V.

Schwefelsäure 42 Proz. in 100 Lösung.

Tabelle 16.

Spitzen 0,5 mm lang, Stromrichtung *A* ⟶ *B*.

p (Volt)	p_a(Volt)	p_k(Volt)	$\frac{p_a}{p}$	*D*(Volt)	*i* (Amp.)	*W* (Ohm)	*p* ber.
4,97	2,93	2,04	0,59	5,44	0,0251	19,0	5,07
7,21	4,67	2,54	0,65	8,25	0,0511	20,4	7,01
8,46	4,81	3,47	0,57	10,45	0,1006	19,7	8,52
9,02	5,05	3,97	0,55	11,24	0,1110	20,0	9,07
Stromrichtung *B* ⟶ *A*.							
5,10	3,17	1,96	0,62	5,61	0,0251	19,2	5,17
6,95	4,60	2,36	0,66	7,95	0,0501	19,8	6,81
8,60	5,14	3,46	0,60	10,60	0,1003	19,9	8,66
9,88	5,71	4,17	0,58	12,35	0,1294	19,1	9,89

Tabelle 17.

Spitzen 3 mm lang, Stromrichtung *A* ⟶ *B*.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
4,04	2,51	1,58	0,62	4,57	0,0252	19,1	4,03
4,45	2,84	1,61	0,64	5,44	0,0499	19,9	4,37
4,99	3,07	1,93	0,61	6,96	0,1004	19,6	4,97
6,21	3,65	2,55	0,59	10,20	0,2003	19,9	6,24
7,48	4,32	3,17	0,58	13,38	0,3017	19,6	7,49
9,12	5,07	4,05	0,55	17,80	0,4525	19,2	9,23
11,00	5,92	5,08	0,54	22,45	0,5960	19,2	11,05
12,75	6,73	6,02	0,53	26,98	0,7480	19,0	12,83
14,15	7,23	6,72	0,51	29,87	0,8430	18,6	13,97
			Stromrichtung *B* ⟶ *A*.				
4,11	2,58	1,53	0,63	4,60	0,0251	19,5	4,15
4,35	2,74	1,61	0,63	5,32	0,0500	19,6	4,42
4,90	3,03	1,87	0,62	6,87	0,0999	19,7	4,99
6,13	3,54	2,59	0,58	10,06	0,2013	19,5	6,17
7,69	4,33	3,36	0,56	13,60	0,3017	19,6	7,48
9,40	5,13	4,28	0.54	18,10	0,4532	19,2	9,15
10,89	5,69	5,20	0,52	22,72	0,6033	19,6	10,85
12,14	6,32	5,82	0,52	26,79	0,7492	19,9	12,36
13,08	6,47	6,61	0,49	28,82	0,8000	19,7	13,11

Tabelle 18.

Spitzen 5 mm lang, Stromrichtung *A* ⟶ *B*.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
3,95	2.42	1,53	0,61	4,44	0,0249	20.4	4,00
4,16	2,68	1,47	0,65	5,15	0,0501	19,9	4,21
4,63	2,85	1,77	0,62	6,61	0,1010	19,8	4,64
5.44	3,25	2,19	0,60	9.42	0.2010	19.8	5,46
6,24	3,63	2,61	0,58	12,09	0,3012	19,4	6.25
7.43	4,20	3,23	0,56	16,05	0.4514	19,1	7,42
8,73	4,79	3,94	0,55	20,31	0,6037	19,2	8,67
9,80	5,28	4,52	0,54	23.92	0,7441	19,0	9.74
11,76	6.10	5,66	0,52	30,10	1,0037	18,3	11,56
13,12	6,70	6,42	0,51	35,08	1.2460	17,2	13,03
14,49	7,29	7,20	0,50	40,95	1,4340	18,5	14.76
			Stromrichtung *B* ⟶ *A*.				
3,94	2,48	1,46	0,63	4,45	0,0251	20,4	3.94
4,09	2.63	1,46	0,64	5,08	0,0500	19,9	4.12
4,49	2,85	1,64	0,63	6,46	0,1003	19,7	4,52
5,27	3,22	2,06	0,61	9,19	0,2005	19,5	5,32
6,22	3,66	2,56	0,59	12,09	0.3010	19,5	6,16
7,32	4,21	3,11	0,57	15.97	0,4514	19,2	7.29
8,25	4,60	3,65	0,56	20,03	0,6020	19,6	8,47
9,23	5,05	4.17	0,55	23.51	0,7470	19,1	8.90
14,51	7,37	7,14	0,51	41,00	1,4590	18,2	14,58

Tabelle 19.

Platten. 1 proc. Lösung.

p (Volt)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	$\frac{p_a}{p}$	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	p ber.
2,16	1,10	1,06	0,51	8,70	0,0247	265	2,34
2,37	1,34	1,03	0,55	9,36	0,0255	274	2,37
2,57	1,48	1,09	0,55	15,41	0,0500	257	2,62
3,04	1,69	1,35	0,56	28,39	0,1002	253	3,13
4,02	1,96	2,06	0,47	50,61	0,2002	253	4,02
			10 proc. Lösung.				
2,14	1,25	0,89	0,59	3,09	0,0249	38,0	2,34
2,42	1,37	1,05	0,57	4,11	0,0500	33,7	2,42
2,55	1,45	1,10	0,57	5,94	0,1003	33,9	2,50
2,74	1,55	1,19	0,56	9,39	0,2000	33,3	2,76
2,92	1,63	1,29	0,56	14,49	0,2991	32,0	2,91
3,03	1,72	1,30	0,57	17,14	0,4500	31,1	3,10
3.22	1,89	1,33	0,59	21,62	0,6019	30,6	3,24
3,46	1,99	1,47	0,57	25,23	0,7497	29,0	3,32
			20 proc. Lösung.				
2,26	1,36	0,90	0,60	2,80	0,0250	21,5	2,43
2,49	1,47	1,03	0,59	3,52	0.0499	20,4	2,49
2,65	1,57	1,08	0,59	4,63	0,1006	19,7	2.58
2.77	1,59	1,18	0,57	6,64	0,2002	19,4	2,73
2,90	1,62	1,28	0,56	8,70	0,2996	19,4	2,86
2,99	1,67	1,32	0,56	11,62	0,4501	19,2	3,01
3,19	1,73	1,46	0,54	14,52	0,5973	19,0	3,14
3,17	1,72	1,45	0,54	16,84	0,7497	18,2	3,22
			30,4 proc. Lösung.				
2,14	1,19	0,95	0,56	2,60	0,0250	18,6	2,33
2,41	1,33	1,08	0,55	3,32	0,0500	18,2	2,41
2,54	1,38	1,16	0,54	4,32	0,0997	17,8	2,51
2,69	1,44	1,24	0,54	6,27	0,2007	17,9	2,66
2,79	1.49	1,30	0,53	8,07	0,3007	17.5	2,79
3,11	1,61	1,49	0,52	10,97	0,4501	17,5	2,97
2,99	1,60	1,39	0,53	13,35	0,6005	17,2	3,09
3,27	1,71	1,56	0,52	16,38	0,7473	17,5	3,21
			42 proc. Lösung.				
2,48	1,40	1,08	0,57	3,00	0.0249	20,5	2,49
2,53	1,43	1,10	0,57	3,53	0,0500	20,0	2.53
2,60	1,47	1,13	0,56	4,58	0,1006	19,6	2,61
2,77	1,58	1,19	0,57	6,66	0,2005	19,4	2,74
2,87	1,66	1,20	0,58	8,73	0,3012	19,4	2,87
3,02	1,76	1,26	0.58	11,66	0,4503	19,2	3,02
3,09	1,86	1,24	0,60	14,75	0.6010	19.4	3,16
3,36	2,07	1,29	0.61	17.54	0,7473	19,0	3,27
3,52	2,21	1,31	0,62	21,95	1,0007	18,4	3,44

§ 6. Die in den Tabellen mitgetheilten Zahlen zeigen, dass bei Anwendung von drahtförmigen kurzen Electroden, deren Verhalten zunächst betrachtet werden soll, der Potentialsprung zwischen den Electroden und den Flüssigkeiten, in welche die Electroden tauchen, sowohl für die Anode als für die Kathode von folgenden Umständen abhängig ist.

1. Für jede drahtförmige Electrode nimmt der Potentialsprung mit steigender Stromstärke, bez. steigender Potentialdifferenz D an den Electroden erheblich zu. Die Zunahme ist in der Regel nicht für beide Electroden die gleiche, sondern in den meisten Fällen wächst der Potentialsprung an der Kathode etwas rascher als an der Anode.

2. Die Summe der an beiden Electroden beobachteten Potentialsprünge, also die in dem Werthe von p gegebene Polarisation ist für ein und dieselbe Stromstärke und ein und dieselbe Lösung wesentlich abhängig von der Länge der Drahtelectroden, so zwar, dass sie mit wachsender Drahtlänge rasch abnimmt.

3. Für Electroden gleicher Länge und bei gleicher Stromstärke hängt die Polarisation wesentlich von der Concentration, also von der specifischen Leitungsfähigkeit der Lösungen ab. Für die Spitzen von etwa 5 mm Länge beträgt die Polarisation bei der einprocentigen Lösung und einer Stromstärke von 0,25 Amp. über 24 Volt, für die gleichen Spitzen und die Stromstärke von 0,3 Amp. ist sie in der 10procent. Lösung etwa 7,5 Volt, in der 20procent. Lösung etwa 6,22, in der 30,4procent. Lösung ist sie 6,16 und in der 42procent. Lösung 6,23. Es ist hiernach die Polarisation ohne Zweifel eine Function der Stromdichte und der specifischen Leitungsfähigkeit der Schwefelsäurelösung.

Gerade der letztere Umstand führt sofort auf die Vermuthung, dass die Polarisation nicht nur in der wohlbekannten electromotorischen Gegenkraft besteht, welche durch den Contact der Gase mit dem Metall der Electroden hervorgerufen wird, sondern sich zusammensetzt aus dieser und aus einem Uebergangswiderstande, welcher von dem specifischen Leitungswiderstande der Flüssigkeit abhängig ist, d. h. die Polarisation wäre gleich der Summe aus der electromotorischen Gegenkraft π und dem Producte aus dem Uebergangswiderstand u und der Strom-

stärke i; sie muss demnach, wenn der Uebergangswiderstand nicht der Stromstärke umgekehrt proportional ist, mit wachsender Stromstärke wachsen, wie es unsere Beobachtungen zeigen.

Wenn die electromotorische Gegenkraft π constant und der Uebergangswiderstand für ein gegebenes Spitzenpaar und eine gegebene Lösung ebenfalls constant ist, so würde die Polarisation sich durch die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad p = \pi + u \,.\, i$$

darstellen lassen, in welcher der Uebergangswiderstand u eine Function der Spitzenlänge und des specifischen Leitungswiderstandes der Lösung wäre.

Wenn u für ein gegebenes Spitzenpaar dem specifischen Leitungswiderstande der Lösungen proportional, also gleich $\varphi \lambda$ zu setzen wäre, wo λ den specifischen Leitungswiderstand der Lösung und φ eine Constante bedeutet, so müsste bei unserer Anordnung, bei welcher stets dieselben Gefässe benutzt wurden, bei welcher wir somit den Widerstand der Flüssigkeit $W = K\lambda$ setzen können, sich p darstellen lassen durch die Gleichung

$$\text{(b)} \qquad p = \pi + \varphi \,.\, \lambda \frac{D-p}{K \,.\, \lambda} = \pi + \frac{\varphi}{K}(D-p),$$

indem wir für i seinen Werth $(D-p)/W$ eingesetzt haben.

Es müsste demnach p aus einem für alle Spitzen und alle Lösungen constanten Theile und aus einem $D-p$ proportionalen Theile bestehen; der Coëfficient dieses letzteren Gliedes dürfte nicht mehr von der Concentration der Lösung, sondern nur von der Länge der Spitzen abhängig sein.

Wäre die electromotorische Gegenkraft von der Concentration der Lösung abhängig, so würde π für die verschiedenen Lösungen verschieden, dürfte aber in einer und derselben Lösung nicht von der Länge der Spitzen abhängig sein.

In der That zeigen unsere Beobachtungen, dass sich die Polarisationen durch obige Gleichung darstellen lassen mit einem für die meisten Lösungen gleichen Werthe von π; nur für die 1 procent. Lösung wird π kleiner; die Werthe φ/K sind für die Spitzen gleicher Länge so nahe gleich, dass wir die Verschiedenheiten auf die nicht genaue Gleichheit der als gleichlang bezeichneten Spitzen schieben dürfen. Die in den Tabellen als p ber. angegebenen Werthe sind mit der etwas

umgeformten Gleichung (b) berechnet. Die Umformung wurde vorgenommen, weil in der Gleichung (b) auf der rechten Seite die Differenz zweier beobachteten Werthe steht, die zuweilen recht klein ist, somit durch selbst kleine Beobachtungsfehler sehr erheblich beeinflusst werden kann. Setzen wir $\varphi / K = a$, so können wir obige Gleichung auch schreiben

$$p(1 + a) = \pi + a D,$$

$$p = \frac{\pi}{1 + a} + \frac{a}{1 + a} D = R + S D$$

und es ist dann

$$\pi = \frac{R}{1 - S} \qquad a = \frac{S}{1 - S} = \frac{\varphi}{K}.$$

Vor Zusammenstellung der einzelnen Werthe der Constanten der Gleichung bemerken wir, dass für die 0,5 mm Spitzen in der 1 procent. Lösung diese Beziehung sich nicht zu bestätigen scheint, es scheint vielmehr, dass dort die Polarisation bei den stärksten erreichbaren Strömen rascher wächst. Man kann zwar auch für die hier gefundenen Werthe unter Benutzung aller Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate eine Formel berechnen, welche die Beobachtungen hinreichend darstellt, der Werth von π wird aber so klein, dass er auch nicht annähernd den übrigen entspricht.

Die Gleichung wird

$$p = 0{,}0233 + 0{,}729\, D \text{ oder } p = 0{,}0862 + 2{,}696\,(D - p).$$

Lässt man in der Tabelle 3 die letzten vier schon als unsicher bezeichneten Werthe ausser Acht, so wird

$$p = 0{,}3820 + 0{,}7215\, D \text{ oder } p = 1{,}3720 + 2{,}592\,(D - p).$$

Beschränkt man sich auf die Werthe p unter 50 Volt, so wird

$$p = 0{,}635 + 0{,}715\, D \text{ oder } p = 2{,}228 + 2{,}290\,(D - p).$$

Die hiernach berechneten Werthe sind unter p ber. 1 in Tabelle 3 mitgetheilt. Unter p ber. 2 sind die Werthe berechnet nach der Gleichung

$$p = 0{,}910 + 0{,}706\, D \text{ oder } p = 3{,}095 + 2{,}40\,(D - p).$$

Der Verlauf der Zahlen, je nachdem man die grössten Werthe von p mit in Betracht zieht oder nicht, spricht dafür, dass bei den grössten Stromstärken die Werthe von p rascher zunehmen.

Dem widerspricht auch unseres Erachtens nicht, dass sich die Zahlen der Tabelle 4, wenn man die unter denselben angegebenen $p = 58{,}26$ für $D = 81{,}92$ hinzunimmt, noch hinreichend darstellen lassen durch

$$p = 0{,}509 + 0{,}716\,D \text{ oder } p = 1{,}792 + 2{,}528\,(D - p)$$

wie die Zahlen p ber. 1 zeigen, oder auch durch

$$p = 0{,}91 + 0{,}711\,D \text{ oder } p = 3{,}150 + 2{,}460\,(D - p),$$

wie die Zahlen p ber. 2 zeigen. Da mit Ausnahme der ersten alle übrigen Zahlen für p zwischen 50 und 60 liegen, kann der eine kleinere Werth von p schliesslich nur einen geringen Einfluss haben.

Für die übrigen Beobachtungen hat die Berechnung der Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate folgende Werthe ergeben:

0,5 mm Spitzen	3 mm Spitzen	5 mm Spitzen
	1 proc. Lösung	
	$A \longrightarrow B$ u. $B \longrightarrow A$	$A \longrightarrow B$ u. $B \longrightarrow A$
	$R = 2{,}045$ $S = 0{,}3556$	$R = 2{,}428$ $S = 0{,}2573$
	$\pi = 3{,}173$ $a = 0{,}5518$	$\pi = 3{,}269$ $a = 0{,}3464$
	10 proc. Lösung	
$A \longrightarrow B$	$A \longrightarrow B$	$A \longrightarrow B$
$R = 1{,}036$ $S = 0{,}719$	$R = 2{,}339$ $S = 0{,}3682$	$R = 2{,}311$ $S = 0{,}3115$
$\pi = 3{,}687$ $a = 2{,}559$	$\pi = 3{,}702$ $a = 0{,}5828$	$\pi = 3{,}357$ $a = 0{,}4525$
$B \longrightarrow A$	$B \longrightarrow A$	$B \longrightarrow A$
$R = 0{,}8731$ $S = 0{,}7309$	$R = 2{,}164$ $S = 0{,}3850$	$R = 2{,}550$ $S = 0{,}2962$
$\pi = 3{,}241$ $a = 2{,}716$	$\pi = 3{,}518$ $a = 0{,}6260$	$\pi = 3{,}623$ $a = 0{,}4209$
	20 proc. Lösung	
$A \longrightarrow B$	$A \longrightarrow B$	$A \longrightarrow B$
$R = 0{,}9557$ $S = 0{,}7337$	$R = 2{,}309$ $S = 0{,}4025$	$R = 2{,}646$ $S = 0{,}2985$
$\pi = 3{,}589$ $a = 2{,}755$	$\pi = 3{,}864$ $a = 0{,}6737$	$\pi = 3{,}771$ $a = 0{,}4255$
$B \longrightarrow A$	$B \longrightarrow A$	$B \longrightarrow A$
$R = 1{,}012$ $S = 0{,}7227$	$R = 2{,}335$ $S = 0{,}3935$	$R = 2{,}650$ $S = 0{,}2899$
$\pi = 3{,}651$ $a = 2{,}606$	$\pi = 3{,}850$ $a = 0{,}6487$	$\pi = 3{,}732$ $a = 0{,}4082$
	30,4 proc. Lösung.	
$A \longrightarrow B$	$A \longrightarrow B$	$A \longrightarrow B$
$R = 1{,}272$ $S = 0{,}6629$	$R = 2{,}454$ $S = 0{,}3838$	$R = 2{,}798$ $S = 0{,}2933$
$\pi = 3{,}773$ $a = 1{,}966$	$\pi = 3{,}982$ $a = 0{,}6229$	$\pi = 3{,}959$ $a = 0{,}4151$
$B \longrightarrow A$	$B \longrightarrow A$	$B \longrightarrow A$
$R = 1{,}405$ $S = 0{,}6449$	$R = 2{,}370$ $S = 0{,}3929$	$R = 2{,}784$ $S = 0{,}2892$
$\pi = 3{,}958$ $a = 1{,}816$	$\pi = 3{,}903$ $a = 0{,}6471$	$\pi = 3{,}917$ $a = 0{,}4069$

0,5 mm Spitzen		3 mm Spitzen		5 mm Spitzen	
		42 proc. Lösung			
$A \longrightarrow B$		$A \longrightarrow B$		$A \longrightarrow B$	
$R = 1{,}311$	$S = 0{,}6906$	$R = 2{,}232$	$S = 0{,}3930$	$R = 2{,}689$	$S = 0{,}2947$
$\pi = 4{,}236$	$a = 2{,}232$	$\pi = 3{,}678$	$a = 0{,}6474$	$\pi = 3{,}813$	$a = 0{,}4179$
$B \longrightarrow A$		$B \longrightarrow A$		$B \longrightarrow A$	
$R = 1{,}244$	$S = 0{,}6999$	$R = 2{,}450$	$S = 0{,}3699$	$R = 2{,}644$	$S = 0{,}2911$
$\pi = 4{,}145$	$a = 2{,}332$	$\pi = 3{,}889$	$a = 0{,}5872$	$\pi = 3{,}730$	$a = 0{,}4106$

Nehmen wir für die 0,5 mm Spitzen der 1 procent. Lösung die nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Vernachlässigung der grössten Werthe von p berechneten Constanten, so wird für die 1 procent. Lösung der Mittelwerth von $\pi = 2{,}940$. Mit den Constanten 3,095 und 3,150 gleich 3,187. Für die übrigen Lösungen erhalten wir als Mittelwerthe von π, für die

0,5 mm Spitze	3 mm Spitze	5 mm Spitze
3,785	3,798	3,738

oder Mittelwerth aller π ist 3,774. Die Abweichungen vom Mittel zeigen weder eine Beziehung zur Spitzenlänge, noch zur Concentration der Lösung, sie sind durchaus unregelmässig und dabei so klein, dass, wie eine Betrachtung der beobachteten Zahlen zeigt, sich innerhalb der Grenzen der Unsicherheit für alle Spitzen eine Gleichung mit dieser Constanten aufstellen liesse, wobei allerdings die beobachteten Werthe nicht mit der gleichen Annäherung wiedergegeben würden.

Bei unserer Deutung würde demnach in kurzen dünnen Drähten diese Grösse π die electromotorische Gegenkraft der Polarisation darstellen, dieselbe wäre innerhalb weiter Grenzen von der Concentration der Lösung unabhängig, nur bei der 1 procent., also schon sehr verdünnten Lösung, wäre dieselbe nicht unerheblich kleiner.

§ 7. Dass diese Deutung von π wahrscheinlich ist, beweisen auch die Beobachtungen an den Platten. Durch sämmtliche frühere Beobachtungen ist bewiesen, dass mit wachsender Stromstärke an Platten die Polarisation etwas zunimmt, und man hat schon mehrfach ausgesprochen, dass die Polarisation mit wachsender Dichte des Stromes sich einem Maximum nähere. Da nun an diesen kurzen dünnen Drähten selbst bei dem schwächsten von uns benutzten Strome eine grosse Strom-

dichte vorhanden ist, so liegt die Vermuthung nahe, dass die Constante π eben jenes Maximum der electromotorischen Gegenkraft bedeute, welchem sich bei Platten die Polarisation annähert. Unsere Versuche an Platten ergeben das mit grosser Deutlichkeit für die vier concentrirteren Lösungen.

Auch die Platten zeigen eine deutliche Zunahme der Polarisation; diese Zunahme steht mit dem specifischen Leitungswiderstande der Lösungen in keiner erkennbaren Beziehung; die Zunahme ist vielmehr für die vier concentrirteren Lösungen nahe dieselbe. Man darf daraus schliessen, dass bei den Platten ein merklicher Uebergangswiderstand nicht vorhanden ist, dass dort die Polarisation nur aus der electromotorischen Gegenkraft besteht.

Die geringe Zunahme der Polarisation und die bei den grösseren Stromstärken langsamere Zunahme deutet schon auf die Annäherung an ein Maximum hin. In der That lassen sich die beobachteten Werthe auch durch eine Gleichung darstellen, welche zu einem solchen Maximum hinführt. Wir benutzten zur Darstellung der Werthe eine der schon von Crova angewandten ähnliche Gleichung, nämlich die Gleichung

$$p = P - B\,\alpha^{(D_0 - D)},$$

worin D die Potentialdifferenz an den Electroden bedeutet und D_0 jene Potentialdifferenz sein soll, bei welcher der Strom gerade durch die Lösung hindurch zu gehen beginnt, bis zu welcher also die Polarisation stets gleich der electromotorischen Kraft ist, vorausgesetzt, dass keine Convectionsströme vorhanden sind. Den Werth von D_0 geben unsere Beobachtungen nicht, deshalb henutzten wir die Gleichung in der Form

$$p = P - B\alpha^{D_0}.\alpha^{-D} = P - C\alpha^{-D}.$$

Die Werthe von P, C, und α, mit denen die in der Tabelle angegebenen Werthe p ber. erhalten sind, folgen hier:

10 Proc.-Lös.	$P = 3{,}700$.	$C = 1{,}632$.	$\log C = 0{,}21268$.	$\alpha = 1.060$	$\log \alpha = 0.02534$.
20 „ „	$P = 3.700$.	$C = 1{,}539$.	$\log C = 0{,}18724$.	$\alpha = 1{,}072$	$\log \alpha = 0{,}03019$.
30,4 „ „	$P = 3{,}700$.	$C = 1{,}653$.	$\log C = 0{,}21817$.	$\alpha = 1.077$	$\log \alpha = 0{,}03239$.
42 „ „	$P = 3{,}975$.	$C = 1{,}734$.	$\log C = 0{,}23108$.	$\alpha = 1{,}053$	$\log \alpha = 0{,}02243$.

Die Tabellen 19. zeigen, dass die an den Platten beobachteten Werthe der Polarisation für die concentrirteren Lösungen sich sehr wohl durch diese Gleichungen darstellen lassen;

nur der für die schwächsten Ströme beobachtete Werth ist in drei Fällen erheblich kleiner als die Rechnung ergibt, allerdings immer noch in den Grenzen der Unsicherheit. Wir möchten das daraus erklären, dass der schwächste Strom stets der erste war, mit welchem beobachtet wurde, und dass die Beobachtungen vielleicht zu rasch nach Stromschluss gemacht worden sind.

Das Mittel der hier gefundenen P ist in der That fast genau gleich dem Mittel der früher gefundenen π, es ist 3,769. Die Thatsache, dass die an den Platten beobachteten Werthe als Maximum nahe den früher gefundenen Werth π geben, spricht für die Richtigkeit unserer Auffassung, dass an den kurzen dünnen Drähten sofort das Maximum der electromotorischen Gegenkraft auftritt.

Die an der Platte in der 1 Proc.-Lösung beobachteten Werthe, lassen sich nicht durch eine solche Gleichung darstellen, die Werthe p berechnet sind durch eine lineare Interpolationsformel erhalten; die Zunahme von p ist allerdings eine erheblich langsamere als für die anderen Lösungen, indess zeigt der stärkste Strom einen Werth der Polarisation, der sogar grösser ist, als das anderweitig gefundene Maximum. Man wird auf die Vermuthuug kommen, dass bei dem grossen specifischen Leitungswiderstande der Lösung hier schon eine Andeutung eines Uebergangswiderstandes vorhanden ist, wodurch der Gang der beobachteten Werthe den andern nicht entsprechen kann. Die berechneten Werthe sind nach der Gleichung

$$p = 2{,}000 + 0{,}04\,D$$

oder

$$p = 2{,}083 + 0{,}0416\,(D - p.)$$

erhalten; es würde hier 2,083 das Minimum der Polarisation sein, wenn der Strom anfängt die Flüssigkeit zu durchsetzen.

§ 8. Wir haben das zweite Glied unseres für p gefundenen Interpolationsausdruckes als herrührend von einem Uebergangswiderstande u gedeutet, der dem specifischen Leitungswiderstande der Electrolyten proportional ist und ausserdem mit abnehmender Spitzenlänge zunimmt. Man könnte die vorliegenden Beobachtungen als noch nicht hinreichend beweisend anerkennen, da durch die Anordnung des Versuches aus dem zweiten Gliede der specifische Leitungswiderstand herausfällt.

Es wäre desshalb wenigstens möglich, dass wie bei Platten so auch bei Spitzen die electromotorische Gegenkraft noch weiter zunähme, und dass sich, soweit unsere Beobachtungen gehen, die Zunahme als lineare Function der electromotorischen Kraft darstellen lasse. Indess lässt sich die Frage leicht entscheiden.

Unsere Gleichung:

$$p = \pi + u \,.\, i$$

lässt erkennen, dass wir in derselben Flüssigkeit an derselben Spitze für eine bestimmte Stromstärke immer denselben Werth von p finden müssen. In der Form

$$p = \pi + \varphi \lambda \frac{D - p}{K \lambda}$$

erkennen wir dagegen, dass der Werth von p für ein gegebenes $D - p$ oder D wesentlich von dem Werthe von K abhängt. Mit anderen Worten, es muss bei Anwendung derselben Spitzen und derselben Flüssigkeit in den Zersetzungszellen die Polarisation bei derselben Stromstärke immer dieselbe sein, einerlei welche Verbindung zwischen den Zersetzungszellen ist, wie gross oder wie klein die electromotorische Kraft ist, welche zur Herstellung des Stromes erforderlich ist. Wir haben zur Prüfung dieser Folgerung unsere Zersetzungszellen durch zwei Heber mit einander verbunden, von denen der eine durch einen Hahn verschliessbar war. War der Hahn geschlossen, so war der Widerstand zwischen den Zersetzungszellen, somit K sehr gross, es bedurfte deshalb einer erheblich grösseren electromotorischen Kraft D, um denselben Strom i zu erhalten, als wenn der zweite Heber geöffnet war. Da man indess so sicher an denselben Spitzen und in derselben Flüssigkeit beobachtete, musste für p sich derselbe Werth ergeben, wenn der Strom dieselbe Stärke i besass. Die zu diesen Versuchen benützte Lösung war 20 Proc. $H_2\,SO_4$; die Heber befanden sich in Luft, während die Zersetzungszellen in Eis standen. Der Widerstand der Heber war deshalb bei den stärkeren Strömen infolge der Erwärmung ein kleinerer. Folgende Tabelle gibt eine Anzahl der Beobachtungen.

Tabelle 20.

Spitzen 0,3 mm lang.

i (Amp.)	p_a (Volt)	p_k (Volt)	p (Volt)	D (Volt)	$D-p$ (Volt)	
0,05	3,97	2,94	6,90	16,69	9,79	
0,05	3,97	2,94	6,91	8,79	1,88	
0,01	5,06	4,51	9,57	26,88	17,31	
0,01	5,06	4,57	9,63	13,05	3,42	
			Spitzen 3 mm lang.			
0,05	2,75	1,86	4,61	14,42	9,81	
0,05	2,79	1,86	4,64	6.49	1,85	
0,05	2,80	1,77	4,56	5,58	1,01	aus Tabelle 11.
0,1	3,17	2,13	5,30	22,84	17,54	
0,1	3,18	2,09	5,27	8,69	3,42	
0,1	3,13	2,11	5,24	7,21	1,99	aus Tabelle 11.
0,2	3,75	2,77	6,52	37,26	30,74	
0,2	3,76	2,75	6,51	12,98	6,48	
0,2	3,62	2,88	6,50	10,49	3,91	aus Tabelle 11.
			Spitzen 5 mm lang.			
0,05	2,67	1,75	4,42	14,14	9,72	
0,05	2.67	1,75	4,42	6,26	1,84	
0,05	2,62	1,66	4,27	5,24	0,96	aus Tabelle 12.
0,1	2,95	1,95	4,89	22,51	17,63	
0,1	2.95	1,94	4,88	8,31	3,42	
0,1	2,82	1,85	4,67	6,65	1,98	aus Tabelle 12.
0,2	3,38	2,36	5,74	36,48	30,74	
0,2	3,39	2,37	5,77	12,44	6,67	
0,2	3,18	2,33	5,51	9,46	3,95	aus Tabelle 12.

Die bei diesen Versuchen an denselben Spitzen und bei denselben Stromstärken gemessenen Werthe von p_a, p_k und p sind einander gleich, trotz der grossen Verschiedenheit von D, sie sind ebenfalls den früher gemessenen so nahe gleich, dass die geringen Unterschiede durch eine kleine Verschiedenheit der Spitzenlänge vollständig erklärt werden. Damit scheint es uns bewiesen zu sein, dass das zweite Glied unserer Gleichung für p richtig gedeutet ist, dass dasselbe von einem, dem specifischen Leitungswiderstande der Lösung proportionalen, mit der Länge der Drahtelectroden abnehmenden Uebergangswiderstande herrührt.

Als Mittel der Quotienten φ/K ergibt sich für die Spitzen von 0,5 mm Länge, wenn wir die Beobachtungen in der 30procent. Lösung fortlassen, bei denen die Spitzen 0,6 und 0,7 mm lang waren, der Werth 2,56, für die 3 mm langen Spitzen 0,621, für die 5 mm langen Spitzen 0,412. Indem

wir diese Coëfficienten mit den gefundenen Widerständen W multipliciren, erhalten wir folgende Uebergangswiderstände: Für die 1procent. nehmen wir das Mittel der für die vier Lösungen gefundenen mittleren Werthe, nämlich 280 Ohm.

Werthe des Uebergangswiderstandes u.

Lösung	0,5 mm Spitzen	3 mm Spitzen	5 mm Spitzen
1 Proc.	716 Ohm	174 Ohm	115 Ohm
10 „	84,2 „	20,3 „	13,4 „
20 „	49,9 „	12,1 „	8,0 „
30,4 „	46,0 „	11,2 „	7,4 „
42 „	49,6 „	12,0 „	8,0 „

Nach welchem Gesetze die Uebergangswiderstände mit der Länge der Electroden abnehmen, lässt sich hiernach noch nicht sagen, die Abnahme ist eine etwas langsamere als die Zunahme der Oberfläche. Während nämlich hier die Oberflächen annähernd sich verhalten wie 1 : 6 : 10, stehen die Uebergangswiderstände im Verhältnisse von 1 : 0,25 : 0,16. Jedenfalls erkennt man aus der raschen Abnahme, dass es, wie wir vorhin annahmen, auch hiernach von vornherein wahrscheinlich ist, dass man bei Platten einen Uebergangswiderstand nicht mehr annehmen kann.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass der Erkenntniss des Gesetzes der Abnahme des Uebergangswiderstandes mit der Grösse der Oberfläche sich eine Schwierigkeit entgegenstellt, auf welche wir erst nachträglich aufmerksam geworden sind. Es hat sich nämlich gezeigt, dass zuweilen bei dem Ausglühen der Spitzen, das wie früher erwähnt geschah, um die verschiedenen Electroden in denselben electrischen Zustand zu versetzen, der Schmelzfluss, mit welchem die Spitzen in die Glasröhren eingeschmolzen waren, sich etwas zurückgezogen hatte, und dass somit eine, wenn auch nur geringe, Verlängerung der Electroden eingetreten war. Deshalb haben wir, mit Ausnahme des einen Falles, bei 30procent. Lösung und kleinsten Spitzen, welche erheblich länger ausgefallen waren als die anderen Spitzen, keine genaueren Angaben über die Länge der einzelnen Spitzen gemacht. Dass im übrigen die als gleich bezeichneten Spitzen sehr nahe gleich waren, zeigt die nahe Uebereinstimmung der für die gleich bezeichneten Spitzen gefundenen Coëfficienten $q/K = a$ in § 6.

(Fortsetzung folgt.)

VI. *Zur Theorie des Capillarelectrometers;* *von G. Meyer.*

(Hierzu Tafel VII Fig. 1—4.)

Die capillar-electrischen Phänomene haben von Hrn. v. Helmholtz eine Erklärung gefunden, welche davon ausgeht, dass zwischen Quecksilber und Flüssigkeit eine Contactpotentialdifferenz besteht, welche zur Entstehung einer electrischen Doppelschicht Anlass giebt. Die Oberflächenspannung des Hg in dem Electrolyte setzt sich nun aus zwei Theilen zusammen, deren erster, die natürliche Oberflächenspannung, der Potentialdifferenz Null zwischen Quecksilber und dem Electrolyten entspricht, deren zweiter von der electrostatischen Wirkung der in der Doppelschicht aufgehäuften Electricitätstheilchen aufeinander herrührt. Macht man in einem Capillarelectrometer den Meniscus zur Anode oder Kathode, so wird die Ladung des Meniscus, welcher als eine Belegung eines Condensators aufgefasst wird, und zugleich der zweite Theil der Oberflächenspannung geändert, sodass eine Bewegung des Meniscus in der Capillaren geschieht. Dass diese Phänomene nicht allein durch einen Ladungsstrom erklärt werden können, sondern dass man durch die Annahme eines Leitungsstromes, d. h. eines Stromes, welcher auf electrolytischem Wege eine Veränderung des Electrolyten am Meniscus hervorruft, ebenfalls die Erscheinungen darzustellen vermag, ist durch Hrn. E. Warburg[1]) gezeigt. Die Bewegungen des Meniscus werden in diesem Falle dadurch hervorgebracht, dass in dem am Meniscus abgeschiedenen Product der Electrolyse die Oberflächenspannung des Quecksilbers eine andere ist als in dem unveränderten Electrolyten. Für den Fall des gewöhnlichen Capillarelectrometers, Hg in H_2SO_4, sind die Producte der Electrolyse anzugeben. Nach den Beobachtungen des Hrn. Warburg[2]) an Luftelementen wird unter dem Einfluss des

1) E. Warburg, Wied. Ann. **41.** p. 1. 1890.
2) E. Warburg, Wied. Ann. **38.** p. 321. 1889.

atmosphärischen Sauerstoffs Quecksilber von H_2SO_4 gelöst, sodass die Oberfläche des Hg von einer Schicht Hg-Salzlösung bedeckt ist. Macht man den Meniscus zur Kathode, so wird dort das Hg-Salz durch Abscheidung von Hg verdünnt. Ein Zusatz von Hg-Salz bewirkt nun in H_2SO_4 eine Verminderung der Oberflächenspannung, und zwar unter günstigen Umständen so stark, dass ein in sich geschlossenes Capillarelectrometer austropft, wenn man der H_2SO_4 einige Tropfen einer $HgSO_4$-Lösung[1]) zusetzt. Man erkennt, dass eine Vermehrung der Oberflächenspannung eintreten muss, wenn die am Meniscus befindliche Hg-Salzlösung durch Electrolyse verdünnt, eine Verminderung, wenn neue Salzlösung gebildet wird, dadurch, dass der Meniscus Anode ist. Der Einfluss, welchen der Zusatz von $HgSO_4$ ausübt auf die Oberflächenspannung des Hg in Wasser und in einer Lösung von Magnesiumsulfat, welche 0,05 Grammäquivalent $MgSO_4$ im Liter enthält, ist im hiesigen Institut von Hrn. Griffith auf Veranlassung des Hrn. Prof. Warburg untersucht. Die Versuche wurden angestellt vermittelst eines mit einem Quecksilbermanometer verbundenen Capillarelectrometers, dessen Meniscus und untere Quecksilbermasse metallisch miteinander verbunden waren. Die Oberflächenspannung war stets proportional dem Gesammtdruck, welcher erforderlich war, um den Meniscus an eine bestimmte Stelle der Capillaren zu bringen. Die Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle enthalten; in der ersten Spalte stehen die Anzahl Gramme $HgSO_4$, welche in 10,000 ccm $MgSO_4$-Lösung bez. Wasser enthalten sind, in der zweiten die Oberflächenspannungen, die zwischen Hg und H_2O gleich 100 gesetzt.

$MgSO_4$		H_2O	
0,000	94,3	0,000	100
0,900	93,4	0,883	97,38
1,201	90,8	1,767	90,35
1,601	87,1	3,534	86,90
6,406	82,5	14,1375	82,77
25,625	80,2	28,275	81,47
102,5	76,65	56,55	81,21
		113,1	80,79

1) $HgSO_4$ wird in Wasser gelöst und das gebildete Turpethum minerale abfiltrirt.

Eine graphische Darstellung ist in den Curven der Fig. 1 Taf. VII gegeben. Die Ordinaten bedeuten die Oberflächenspannungen, die Abscissen die Anzahl Gramme $HgSO_4$ in 10 000 ccm. Man ersieht aus diesen, dass ein Zusatz von Quecksilbersalz eine grosse Wirkung ausübt, wenn noch kein Quecksilbersalz zugesetzt ist, dass hingegen diese Wirkung immer geringer wird, je mehr Salz bereits vorhanden ist. Die Anwesenheit von Hg-Salz vermag zu erklären die Vergrösserung der Oberflächenspannung, wenn der Meniscus Kathode ist, die Verringerung, wenn er als Anode dient. Wir wollen überhaupt des Folgenden wegen eine durch Polarisation hervorgebrachte Bewegung des Meniscus als eine normale bezeichnen, wenn er als Kathode sich von dem Ende der Capillaren entfernt, als Anode sich demselben nähert; wird dagegen die Oberflächenspannung verringert, wenn der Meniscus als Kathode dient, so sollen die Bewegungen anomale heissen. Normale Bewegungen des Meniscus beobachtet man in Lösungen von H_2SO_4, $MgSO_4$, K_2SO_4 und kann die Zulässigkeit der oben gegebenen Erklärung durch Zusatz von Quecksilbersalz prüfen. Das mit dem Capillarelectrometer verbundene Element liefert nach keiner der beiden Theorien einen dauernden Strom, denn nach der ersten wird dem Element nur diejenige Electricitätsmenge entnommen, welche erforderlich ist, um die Ladung des Meniscus, welcher als eine Belegung eines Condensators aufgefasst wird, zu ändern, nach der zweiten wird die electromotorische Kraft des Elementes im Gleichgewicht gehalten durch die Spannung des in dem Capillarelectrometer entstehenden Elementes

Hg | verdünntes Hg-Salz | concentrirtes Hg-Salz | Hg.

Alle Beobachter stimmen darin überein, dass die Oberflächenspannung als Function der polarisirenden Kraft dargestellt wird durch eine Curve, welche aus einem aufsteigenden und einem absteigenden Ast besteht. Durch die Wirkung des polarisirenden Stromes auf das Hg-Salz vermag man den aufsteigenden Ast dieser Curve zu erklären, nicht aber von dem absteigenden Aste Rechenschaft zu geben. Aufgabe der folgenden Untersuchung, welche auf Veranlassung des Hrn. Prof. Warburg unternommen wurde, ist es, zu erforschen, ob auch der absteigende

Ast durch einen Leitungsstrom oder den Einfluss der Producte der Electrolyse auf die Oberflächenspannung erklärt werden kann. Am besten lassen sich diese Verhältnisse studiren an Capillarelectrometern, welche mit einer Flüssigkeit gefüllt sind, in der die Bildung von Hg-Salz auf ein Minimum beschränkt ist. Solche Flüssigkeiten sind Lösungen von KOH, NaOH, Na_2CO_3, K_2CO_3, KCl. Die zu untersuchenden Capillarelectrometer wurden so hergestellt, dass die Capillare in einen Glastrog mit parallelen Wänden tauchte, welcher zu unterst Quecksilber und darüber die betreffende Lösung enthielt. Das untere Quecksilber war durch einen in ein Glasrohr eingeschmolzenen Platindraht mit den übrigen Theilen des Apparates in metallische Verbindung gebracht, und die Stellung des Meniscus in der Capillare wurde mit einem horizontal montirten Mikroskop von 100maliger Vergrösserung unter Benutzung eines Ocularmikrometers abgelesen. Die erste Aufgabe bestand darin, festzustellen, in welcher Beziehung bei den eben erwähnten Lösungen die Oberflächenspannung zur polarisirenden Kraft steht. Zu dem Zwecke wurde das Capillarelectrometer mit einem Quecksilbermanometer verbunden, an welchem man den Druck ablas, welcher die durch die Polarisation hervorgebrachte Aenderung der Oberflächenspannung compensirte. Es wurde nur kathodisch polarisirt mit electromotorischen Kräften, welche in verschiedener Grösse dadurch hergestellt wurden, dass man einen Accumulator, dessen electromotorische Kraft durch Vergleich mit einem Clark-Element gemessen war, durch $1000 + x$ S. E. schloss, wo x einen variablen Widerstand bedeutet und von den Endpunkten der x S. E. zum Capillarelectrometer abzweigte. Die Resultate sind in den Tabellen auf p. 522 enthalten in den Curven der Fig. 3 Taf. VII graphisch dargestellt. Als Abscissen sind die electromotorischen Kräfte, als Ordinaten die durch die Polarisation bewirkten zugehörigen Aenderungen der Oberflächenspannung aufgetragen. Wenn man den Nullpunkt des Coordinatensystems in denjenigen Punkt der Curve legt, welcher der Polarisation Null entspricht, so haben diese Curven anfänglich positive Ordinaten, bekommen aber, nachdem sie die Abscissenaxe zum zweiten male geschnitten haben, negative Ordinaten, um schliesslich der Abscissenaxe parallel zu laufen. Dieselbe Eigenschaft tritt an den Curven hervor,

welche Hr. F. Paschen[1]) gegeben hat, und zwischen seinen Beobachtungen und den hier mitgetheilten herrscht Uebereinstimmung, da nach beiden Beobachtungsreihen die Curven die Abscissenaxe bei nahe denselben electromotorischen Kräften schneiden. Man kann aus dem Verlaufe der Curven ohne weiteres schliessen, dass, wenn man mit electromotorischen Kräften kathodisch polarisirt, welche geringer sind als die dem Schnittpunkte von Curve und Abscissenaxe zukommende, eine Vermehrung der Oberflächenspannung und demgemäss eine normale Bewegung des Meniscus eintritt. Ueberschreitet dagegen die polarisirende Kraft diesen Werth, so erhalten wir eine Verminderung der Oberflächenspannung und infolgedessen eine anomale Bewegung des Meniscus. Dieses Verhalten der untersuchten Lösungen lässt sich am einfachsten demonstriren, wenn man zur Polarisation Elemente von verschiedener electromotorischer Kraft verwendet. Es wurden zu diesen Versuchen benutzt ein Zn-ZnSO_4-PbHg-Element von 0,797 Volt Spannung und ein nicht ganz vorschriftsmässig hergestelltes Clark-Element, dessen electromotorische Kraft 1,380 Volt betrug. Geht man so zu Werke, dass man zuerst ein Capillarelectrometer mit reinem Wasser beschickt, welches normale Ausschläge für beide Elemente giebt, und dann allmählich immer mehr und mehr der zu untersuchenden Lösung zufügt, so hat man in den verdünnten Lösungen für beide Elemente normale Ausschläge, erreicht aber bald einen Zustand, in dem bei kathodischer Polarisation das ZnPb-Element noch normale, das Clark-Element anomale Bewegungen des Meniscus hervorruft. Anodische Polarisation erzeugt in jedem Falle Verminderung der Oberflächenspannung.

Für die bei kathodischer Polarisation auftretenden normalen Ausschläge lassen sich zwei Erklärungen angeben. Man kann annehmen, dass in den Lösungen, so lange sie sehr verdünnt sind, eine sehr geringe Menge Hg-Salz enthalten ist. Da nun in sämmtlichen Lösungen das Kation K oder Na ist, so muss, wenn man den Meniscus zur Kathode macht, das dort auftretende K oder Na, Hg aus dem Hg-Salz ausfällen und so eine Vermehrung der Oberflächenspannung hervorrufen.

1) F. Paschen, Wied. Ann. 39. p. 43. 1890.

Will man nicht annehmen, dass Hg in Lösung ist, so würden sich die Bewegungen des Meniscus folgendermassen erklären: Durch den electrolytischen Process wird an der Kathode die Concentration der KOH- und NaOH-Lösungen erhöht und aus den Lösungen von K_2CO_3, KCl, Na_2CO_3, KOH, bez. NaOH abgeschieden; an der Anode findet unter allen Umständen eine Verringerung des Gehaltes der Lösung an Kalisalz statt. Nun ist aber in sämmtlichen genannten Lösungen die Oberflächenspannung in concentrirtem Zustande grösser als in verdünntem, wie man an der Stellung des Meniscus in der Capillare eines mit reinem Wasser gefüllten Capillarelectrometers beobachten kann, wenn man dem Wasser immer mehr und mehr von diesen Lösungen zusetzt; ferner ist in KOH- und NaOH-Lösungen die Oberflächenspannung grösser als in Lösungen von K_2CO_3, KCl, Na_2CO_3. Um diese letztere Thatsache zu erweisen, wurde mit Hülfe des Ocularmikrometers der Abstand des Meniscus vom Ende der Capillaren in jeder der Lösungen gemessen. Dieser Abstand war in

K_2CO_3—20^p; Na_3CO_3—18^p; KCl—35^p;
KOH—26^p; NaOH—26^p; KOH—mehr als 50^p.

Die Lösungen enthielten 1 g Salz in 30 ccm H_2O mit Ausnahme der KCl-Lösung, welche im halben Liter 100 g Salz enthielt.

Die Wirkung der durch den electrolytischen Process hervorgebrachten Neubildungen ist also im Stande, die Bewegungen des Meniscus bei kathodischer Polarisation zu erklären. Die bei anodischer Polarisation beobachtete Verminderung der Oberflächenspannung lässt sich entweder auf Neubildung von Hg-Salz oder Verringerung der Concentration der im Capillarelectrometer enthaltenen Lösungen an der Anode zurückführen. In den vorstehenden Erörterungen ist gezeigt, wie bei den betrachteten Lösungen der aufsteigende Ast der in Fig. 3 Taf. VII dargestellten Curven durch einen Leitungsstrom erklärt worden; in dem Folgenden soll erwiesen werden, dass auch der absteigende Ast ein gleiches Erklärungsprincip zulässt und in dem vorliegenden Falle auf die Bildung von HgK, bez. HgNa zurückzuführen ist. Dass überhaupt diese Erklärung in Betracht zu ziehen ist, kann man zeigen, wenn man dem unteren Hg eines in sich geschlossenen Capillarelectrometers

etwas HgK oder HgNa beimischt, je nachdem ein K- oder Na-Salz als Electrolyt verwendet wird, wobei das Quecksilber blank bleibt und Wasserstoffentwicklung beobachtet wird. Es findet durch die Beimischung eine so starke Verminderung der Oberflächenspannung statt, dass das Hg aus der Capillare austropft. Man hat sich die Amalgambildung bei der Polarisation so vorzustellen, dass die erste Wirkung des Stromes in der Hervorbringung von concentrirter Kali-, bez. Natronlauge am Meniscus besteht und erst aus dieser das Amalgam electrolytisch entwickelt wird. Für Lösungen, welche 1 g Salz in 30 ccm H_2O enthalten, hat sich der directe Nachweis erbringen lassen, dass die Erniedrigung der Oberflächenspannung durch kathodische Polarisation mit grossen Kräften durch Amalgambildung verursacht wird. Es diente dazu der folgende Apparat. Zwei unten zugeschmolzene Glasrohre 4 cm hoch und 1,5 cm weit waren durch ein dicht über dem Boden angeblasenes Zwischenrohr von 0,4 cm Durchmesser und 0,5 cm Länge verbunden; durch den Boden der weiten Glasröhre waren Platindrähte geschmolzen. Es wurde nun das Verbindungsrohr durch einen Korkstopfen verschlossen und in den einen Schenkel Hg und die zu untersuchende Lösung (KOH, NaOH, CO_3K_2, CO_3Na_2) eingebracht. Von oben tauchte die Capillare in die Flüssigkeit und aus dem Abstande des Meniscus vom Ende der Capillaren konnte man die Grösse der Oberflächenspannung schätzen. Nach Entfernung der Capillaren wurde ein Platinblech eingesenkt, welches als Anode diente für den von zwei Accumulatoren gelieferten Strom, während das untere Hg die Kathode bildete. Nachdem dieser Strom etwa 10 Minuten gewirkt hatte, wurde der Korkstopfen entfernt, wodurch ein Theil des Hg in den leeren Schenkel übertrat. Dieses war trocken, überzog sich an der Luft aber sehr bald mit einer Oxydhaut. Ueberschichtete man darauf das Hg in dem zweiten Schenkel mit einer der electrolysirten gleichen Lösung und brachte die Capillare ein, so war die Oberflächenspannung bei Kurzschluss des Electrometers so gering, das Hg austropfte. Es ist hieraus zu schliessen, dass das die Oberflächenspannung herabsetzende Agens durch Electrolyse in das Hg hineingebracht und mit diesem in den andern Schenkel übergegangen ist, sodass man nicht umhin kann, dieses Agens für das betreffende Alkali-

metall zu halten. Wenn man nach beendetem Versuch die Capillare in eine Lösung bringt, welche über frischem Hg sich befindet, so beobachtet man den ursprünglichen Werth der Oberflächenspannung. Wenn der absteigende Ast der Curven wirklich auf die Bildung von Amalgamen zurückzuführen ist, so muss man erwarten, dass bei immer stärkerer kathodischer Polarisation die Oberflächenspannung einen constanten Werth annimmt und zwar denjenigen, welcher dem gebildeten Amalgam in der benutzten Lösung zukommt. Dass der Verlauf der Curven der eben gegebenen Bedingung Genüge leistet, erhellt aus der Betrachtung, sowohl der in Fig. 3 (Taf. VII) dargestellten Zeichnung, als auch der von Hrn F. Paschen veröffentlichten Zeichnungen.

Die Unregelmässigkeiten, welche bei hohen polarisirenden Kräften auftreten, sind darauf zurückzuführen, dass unter diesen Umständen die Einstellung des Meniscus weniger sicher ist, da die Bewegungen ruckweise erfolgen. Der Endwerth der Oberflächenspannung ist nun derselbe, welchen man erhält, wenn man dem unteren Hg das Amalgam des in der betreffenden Salzlösung enthaltenen Alkalimetalles zusetzt. Die Werthe der auf diese Weise erhaltenen Compensationsdrucke sind am Ende der Tabellen gegeben und befinden sich mit den bei zunehmender kathodischer Polarisation gewonnenen Endwerthen in genügender Uebereinstimmung. Ihre etwas geringere Grösse kann man dem zuschreiben, dass nach dem Zusatz des Amalgams an der unteren Fläche Kali-, bez. Natronlauge gebildet wird, welche eine Vergrösserung der Oberflächenspannung hervorruft, also die entgegengesetzte Wirkung ausübt wie das Amalgam.

Aehnlich den bis jetzt beschriebenen Fällen liegen die Verhältnisse, wenn die im Capillarelectrometer benutzte Lösung Anlass zur Bildung von viel Hg-Salz gibt und zugleich Amalgam an der Kathode gebildet werden kann. Als Beispiele solcher Salzlösungen sind eine 0,5 normale Lösung von K_2SO_4 und eine Lösung von $ZnSO_4$ untersucht, welche ein Grammäquivalent im halben Liter enthielt. Die Curven für die Oberflächenspannung (Fig. 2 u. 3 Taf. VII) haben dieselben Eigenthümlichkeiten, wie die bis jetzt besprochenen mit dem Unterschiede, dass die Curve für die Zinksulfatlösung stets

positive Ordinaten behält. Ein mit K_2SO_4-Lösung gefülltes Capillarelectrometer gibt in Uebereinstimmung mit dem Verlauf der Curven normale Ausschläge für geringe, anormale Bewegungen für starke kathodische Polarisationen, während man bei Benutzung der $ZnSO_4$-Lösung stets normale Ausschläge erhält. In beiden Fällen ist der aufsteigende Ast der Verdünnung des am Meniscus befindlichen Hg-Salzes zuzuschreiben, während der absteigende Ast seine Entstehung der Bildung von HgK, bez. HgZn verdankt. Versetzt man nämlich das untere Hg mit HgK, bez. HgZn, so beobachtet man dieselbe Oberflächenspannung, wie sie demjenigen Theile des absteigenden Astes zukommt, welcher der Abscissenaxe parallel läuft. Auch der Versuch mit dem U-Rohr liess sich mit der K_2SO_4-Lösung erfolgreich anstellen. Allerdings trat in diesem Falle kein Austropfen des Hg ein, aber über dem Hg, welches als Kathode in dem ersten Schenkel gedient hatte, betrug, nach dem es durch Entfernung des Stopfens theilweise in den anderen Schenkel gebracht und mit frischer K_2SO_4-Lösung überschichtet war, der Abstand des Meniscus vom Ende der Capillaren 8^p, während er vor und nach dem Versuche über Hg, welches nicht als Kathode gedient hatte 37^p war. Die bei anodischer Polarisation auftretende Verminderung der Oberflächenspannung wird hervorgebracht durch die Vermehrung der Concentration des Quecksilbersalzes.

Ein Capillar-Electrometer, in dem anomale Bewegungen beobachtet werden, ist wohl zuerst von Gore[1]) hergestellt, welcher eine KCN-Lösung benutzte. Man bemerkt in diesem Falle eine Verminderung der Oberflächenspannung, wenn man den Meniskus zur Kathode und ebenfalls eine Verminderung, wenn man ihn zur Anode macht. Die Anwesenheit von Hg-Salz beeinflusst die Erscheinung nicht, denn ein Zusatz von $Hg(CN)_2$ zu der KCN-Lösung bewirkt keine Veränderung der Oberflächenspannung und zwar weder in einer concentrirten Lösung noch in einer solchen, welche 1 Tropfen KCN-Lösung von 0,2 g Salz in 20 ccm H_2O in 20 ccm Wasser enthält. Dieses Verhalten findet sofort seine Erklärung, wenn man Quecksilber mit KCN-Lösung in Gegenwart von Luft schüttelt. Bei einem

1) Gore, Proceedings of the Royal Society of London. **32.** p. 85. 1881.

derartigen Versuche, welcher 45 Stunden dauerte, fand sich in einer KCN-Lösung von 4,71 g in 200 ccm Wasser, welche mit 5 ccm Hg geschüttelt wurde, so viel Hg gelöst, dass mit $(NH_4)_2S$ eine dicke Fällung entstand. Bei der Leichtigkeit, mit der die Cyanmetalle in KCN-Lösung Doppelcyanide bilden, kann das entstandene Quecksilbersalz nur $Hg(CN)_2 + 2\,KCN$ sein. In lufthaltiger KCN-Lösung ist demnach die Grenze von Hg und KCN-Lösung eine so concentrirte Lösung von Hg-Salz, dass ein weiterer Zusatz eines solchen Körpers auf die Oberflächenspannung keinen Einfluss ausübt. (Vgl. die oben angeführten Versuche von Griffith.) Es lassen sich nun mit KCN-Lösung genau dieselben Versuche wiederholen, wie sie mit KOH- und K_2CO_3-Lösungen angestellt wurden. Die Curve für die Oberflächenspannung als Funktion der kathodischen polarisirenden Kraft ist in zwei KCN-Lösungen festgestellt, vgl. Fig. 4, Taf. VII, deren erste 5 Tropfen einer KCN-Lösung von 0,5 g Salz in 25 ccm H_2O enthielt in 20 ccm Wasser, deren zweite einen Gehalt von 0,57 g KCN in 25 ccm H_2O hatte. In der verdünnten Lösung konnte man einen aufsteigenden Ast beobachten, während in der concentrirteren Lösung sofort anomale Ausschläge auftraten. Genau wie bei den Kali- und Natronsalzlösungen kann man auch hier in der p. 6 angegebenen Weise vorgehend Lösungen herstellen, welche im Capillarelectrometer benutzt für das Zn — Pb-Element normale, für das Clark-Element anomale Ausschläge liefern. Zu höheren Concentrationen übergehend erhält man auch für das ZnPb-Element anomale Ausschläge. Bei anodischen Polarisationen wurde nur eine Verringerung der Oberflächenspannung beobachtet. Die Bewegungen des Meniscus erfolgten zögernd und traten bei geringen polarisirenden Kräften nicht ein. Den aufsteigenden Ast der Curve für die Oberflächenspannung kann man in der folgenden Weise erklären: Das Kation der die Grenze von Hg und KCN-Lösung bildenden Lösung von $Hg(CN)_2 + 2KCN$ ist, wie aus dem Verhalten des analog constituirten Silbersalzes[1]) geschlossen werden kann, K_2. Es wird nun, solange die Lösung noch sehr verdünnt ist, an der Kathode KOH gebildet. Eine Abscheidung von Hg kann nicht stattfinden, da durch

1) **Hittorf**, Pogg. Ann. **106.** p. 516. 1859.

Kalilauge dieses Metall aus einer Lösung des Cyanides nicht gefällt wird. Wie nun ein Versuch lehrte, wird durch einen Zusatz von KOH-Lösung zu einer sehr verdünnten KCN-Lösung eine Vermehrung der Oberflächenspannung hervorgebracht, sodass die normalen Ausschläge auf Neubildung von KOH zurückgeführt werden können. Die Verminderung der Oberflächenspannung, wenn man den Meniscus zur Anode macht, beruht darauf, dass das Anion $Hg(CN)_2 + 2CN$ an der Anode $2Hg(CN)_2$ bildet. In einer $Hg(CN)_2$-Lösnng ist nun die Oberflächenspannung geringer als in KCN-Lösung, denn man beobachtet in einem mit $Hg(CN)_2$-Lösung beschickten Capillar-Electrometer eine Vermehrung der Oberflächenspannung des Hg, wenn man etwas KCN-Lösung zusetzt. Der absteigende Ast der Oberflächenspannungscurve rührt bei den KCN-Lösungen von Amalgambildung her, was in genau derselben Weise wie auf p. 8 u. 9 nachgewiesen wurde. Zusatz von HgK zu dem unteren Hg des in sich geschlossenen Capillarelectrometers bringt das Hg zum Austropfen aus der Capillaren; der Versuch mit dem U-Rohr gelingt wie in allen andern angeführten Fällen und in der concentrirten KCN-Lösung wurde nach Zumischung von HgK zum unteren Hg des in sich geschlossenen Capillarelectrometers dieselbe Oberflächenspannung beobachtet, wie sie schliesslich bei starken kathodischen Polarisationen auftrat. In der sehr verdünnten Lösung wurde dieser Versuch nicht angestellt, da die über dem HgK sich bildende KOH-Lösung die Oberflächenspannung vergrössert, also den durch das Amalgam bewirkten Effect verringert haben würde. In sehr verdünnten Lösungen ist demnach der electrolytische Process ein solcher, dass bei geringen kathodischen Polarisationen zuerst Bildung von Kalilauge, bei Anwendung grösserer Kräfte Amalgambildung eintritt. In den concentrirteren Lösungen dagegen beginnt die Amalgambildung schon bei den geringsten Polarisationen und wird infolgedessen bei kathodischen Polarisationen nur eine Verringerung der Oberflächenspannung oder eine anomale Bewegung des Meniscus beobachtet. Mit den vorstehenden Erörterungen steht die Thatsache im guten Einklange, dass ein mit luftfreier KCN-Lösung gefülltes Capillarelectrometer sich ebenfalls wie ein mit lufthaltiger beschicktes bei kathodischer Polarisation anomal verhält. Wie ein 44 Stunden dauernder

Versuch lehrte, bei dem luftfreie KCN-Lösung im Vacuum mit Hg geschüttelt wurde, geht unter diesen Umständen kein Hg in Lösung, wenigstens konnte in der abfiltrirten Lösung mit $(NH)_2S$ solches nicht nachgewiesen werden. Kation und Anion dieser Lösung sind K und CN, welche an der Kathode HgK, aus der Anode $Hg(CN)_2$ bilden. Es muss also auch in diesem Falle bei kathodischer Polarisation anomale Bewegung des Meniscus erfolgen wie in lufthaltiger Lösung. Hr. F. Paschen[1]) hat das Verhalten von KCN-Lösungen in Luftelementen untersucht und gefunden, dass die Luftelectrode sich kathodisch verhält. Es ist dies ein Verhalten, welches mit den beschriebenen Schüttelversuchen von Hg mit luftfreier und lufthaltiger KCN-Lösung in voller Uebereinstimmung sich befindet. Der Strom des Luftelementes ist ein Concentrationsstrom und rührt daher, dass an der Luftelectrode sich grosse Mengen Hg-Salz befinden, an der Vacuumelectrode eine sehr kleine Menge Hg-Salz vorhanden ist; die Richtung des beobachteten Stromes sucht der Theorie entsprechend den Concentrationsunterschied der Hg-Salzlösung an beiden Electroden auszugleichen. Ein Widerspruch, wie Hr. Paschen meint, zwischen dem Verhalten der KCN-Lösung im Luftelement und im Capillarelectrometer würde erst dann constatirt sein, wenn gezeigt wäre, dass die Anwesenheit von Hg-Salz das Bedingende für das Verhalten der KCN-Lösung im Capillarelectrometer ist, und dass eine Vermehrung der Concentration der Hg-Salzlösung eine Verminderung der Oberflächenspannung des Hg im Gefolge hat. Die chemischen Processe, welche unter Annahme eines Leitungsstromes zur Erklärung der capillarelectrischen Phänomene, welche eine KCN-Lösung darbietet, heranzuziehen sind, haben in dem Vorhergehenden eine eingehende Erörterung gefunden und stehen mit den im Luftelement stattfindenden in keiner Beziehung.

Es möge hier noch eine Beobachtung Platz finden, welche mit der Annahme eines Leitungsstromes als Erklärung der capillarelectrischen Phänomene in gutem Einklange steht. Wenn man ein Capillarelectrometer mit KCN-, KOH,- NaOH-, K_2CO_3-, Na_2CO_3-Lösung füllt und so starke polarisirende Kräfte

1) F. Paschen, Wied. Ann. **43.** p. 593. 1891.

anwendet, dass bei kathodischer Polarisation anomale Ausschläge erfolgen, so bemerkt man bei anodischer Polarisation eine Verminderung der Oberflächenspannung. Bei Unterbrechung bleibt der Meniscus in seiner abgelenkten Stellung stehen; wird gleich darauf mit derselben Kraft kathodisch polarisirt, so eilt der Meniscus in seine Ruhelage zurück um sich dann wieder in dem gleichen Sinne aus derselben zu entfernen. Der Umstand, dass bei Umkehrung des Vorzeichens der Polarisation der Meniscus nicht direct sich in seine neue Ruhelage begibt, (die gleichsinnige Ablenkung des Meniscus ist für kathodische und anodische Polarisation verschieden gross) sondern zuerst in die Ruhelage zurückgeht, spricht dafür, dass zunächst eine bei der anodischen Polarisation gebildete chemische Verbindung zerstört wird und dann eine andere an deren Stelle tritt.

Wenn man ein Capillarelectrometer durch ein Element schliesst, so wird in dem Electrometer ein Element erzeugt, dessen Spannung die electromotorische Kraft des angelegten Elements im Gleichgewicht hält. Hat man z. B. ein mit K_2SO_4-Lösung beschicktes Capillarelectrometer, so wird durch kathodische Polarisation, nachdem alles Hg-Salz zersetzt ist, das Element Hg | K_2SO_4 | HgK gebildet. Die Spannung wächst mit dem Gehalt des Hg an K und erlangt schliesslich einen constanten Endwerth. Erreicht oder überschreitet die polarisirende Kraft diesen Endwerth, so erhalten wir denjenigen Theil des absteigenden Astes der Oberflächenspannungscurve, welcher der Abscissenaxe parallel läuft. Es sollte daher die electromotorische Kraft des Elementes Hg | K_2SO_4 | HgK gleich derjenigen polarisirenden Kraft sein, welche dem Punkte der Oberflächenspannungscurve entspricht, von dem an diese der Abscissenaxe parallel ist. Es wurde nun die electromotorische Kraft folgender Elemente gemessen:

Hg|HCN|Hg = 1,535 V. Hg|KOH|HgK = 1,925 V. Hg|$ZnSO_4$|HgZn = 1,329 V.
Hg|Na_2CO_3|HgNa = 2,134 V. Hg|K_2SO_4|HgK = 2,256 V.

Der Vergleich mit den Curven zeigt, dass die Spannungen die erwarteten Werthe haben. Die angestellten Betrachtungen finden keine Anwendung auf das H_2SO_4 Capillarelectrometer. Die Curve für die Oberflächenspannung als Function der po-

larisirenden Kraft in H_2SO_4 ist ähnlich[1]) der für $ZnSO_4$-Lösung geltenden, und die Vermuthung liegt nahe, wie in der $ZnSO_4$-Lösung der Bildung von HgZn, so hier den absteigenden Ast der Curve der Bildung von Quecksilberwasserstoff zuzuschreiben. Dieser Körper ist dargestellt durch Schütteln von HgZn mit Wasserstoffplatinchlorid und beschrieben.[2])

Versuche bezüglich seines Einflusses auf die Oberflächenspannung des Hg sind mit demselben nicht angestellt, da es nach der Methode seiner Darstellung schwierig ist, denselben von Platin und Zink zu befreien.

Tabelle.

Unter *E* sind die kathodisch polarisirenden Kräfte in Volt, unter *p* der die Aenderung der Oberflächenspannung compensirende Druck in mm Hg aufgeführt.

H_2SO_4		$ZnSO_4$		K_2SO_4 (3 ccm 0,5 normal + 15 ccm H_2O	
E	*p* mm	*E*	*p*	*E*	*p*
0,0197	+ 9	0,0197	+ 8	0,181	+ 29,8
0,095	36,5	0,095	33	0,333	48,0
0,181	60,5	0,181	59,5	0,665	59,0
0,333	100,0	0,333	108	0,887	+ 55,5
0,461	126,0	0,665	131	1,000	51,0
0,665	156,0	0,887	127	1,195	40,0
0,887	175,0	1,000	119	1,999	− 56,0
1,000	173,0	1,195	93	2,390	−117,0
1,195	164,0	1,339	83	2,998	−122,0
1,330	156,0	1,499	81	3,998	−117,0
Höhe der Hg-Säule im Capillarelectrom. 375 mm		HgZn zugesetzt	81,5	HgK zugesetzt	−107
		Höhe der Hg-Säule im Capillarelectrom. 462 mm		Höhe der Hg-Säule im Capillarelectrom. 225 mm	

1) F. Paschen, Wied. Ann. **39.** p. 43. 1890.

2) Gmelin-Krant, Handbuch der anorganischen Chemie. **3.** p. 751. 1875.

KOH 0,3 g KOH gelöst in 20 ccm H_2O		NaOH 1 g NaOH gelöst in 25 ccm H_2O		K_2CO_3 1 g K_2CO_3 gelöst in 25 ccm H_2O		KCl 100 g aufgefüllt zu 1/2 Liter		Na_2CO_3 5 ccm Lösung vom spec. Gew. 1,071 + 20 ccm H_2O		KCN 5 Tropfen KCN-Lösung 0,5 g in 25 ccm H_2O + 20 ccm H_2O		KCN 0,5 g gelöst in 25 ccm H_2O	
E	*p*	*E*	*p*	*E*	*p*	*E*	*p*	*E*	*p*	*E*	*p*	*E*	*p*
0,095	+ 12,5	0,095	+ 7,0	0,095	+ 3	0,095	+ 20,0	0,095	+ 16,5	0,0199	+ 6,0	0,0197	− 0,8
0,181	16,0	0,181	9,0	0,181	21,5	0,181	+ 31,5	0,181	+ 22,0	0,0956	4,0	0,095	− 4,0
0,333	25,5	0,333	13,0	0,333	29,0	0,333	+ 47,0	0,333	+ 33,0	0,183	4,0	0,181	− 8,0
0,665	11,0	0,665	+ 4,0	0,665	25,0	0,665	+ 52,0	0,665	29,0	0,335	± 0,0	0,333	− 20,0
0,887	− 4,5	0,887	− 17,0	0,887	9,0	0,887	+ 38,0	0,887	18,0	0,669	− 22,0	0,665	− 53,0
1,000	− 12,5	1,000	− 27,0	1,000	+ 1,0	1,000	+ 29,0	1,000	10,0	1,005	− 49,0	0,887	− 79,5
1,195	− 36,0	1,195	− 48,0	1,195	− 19,0	1,195	− 11,5	1,195	− 9,0	1,206	− 65,0	1,000	−100,5
1,333	− 42,5	1,330	− 58,5	1,330	− 38,0	1,499	− 37,0	1,330	− 24,5	1,339	− 90,0	1,195	−136,0
1,499	− 73,0	1,999	−177,0	1,195	−157,0	1,999	−139	1,499	− 47,0	2,009	−153,0	1,330	−162,0
1,999	−155,0	3,998	−177,0	2,660	−183,5	2,660	−166	1,999	−136,0	—	—	1,999	−191,0
3,998	−153,0	—	—	2,998	−183,0	3,998	−151	3,998	−160,5	—	—	3,998	−189,0
—	—	—	—	3,998	−183,0	—	—	—	—	—	—	—	—
HgK zugesetzt	−159	HgNa zugesetzt	−172,0	HgH zugesetzt	−176	HgK zugesetzt	−157	HgNa zugesetzt	−154,0	Höhe der Hg-Säule im Capillar-electrom. 290 mm		HgK zugesetzt	−187,0
Höhe der Hg-Säule im Capillar-electrom. 275 mm		Höhe der Hg-Säule im Capillar-electrom. 290 mm		Höhe der Hg-Säule im Capillar-electrom. 290 mm		Höhe der Hg-Säule im Capillar-electrom. 290 mm		Höhe der Hg-Säule im Capillar-electrom. 290 mm				Höhe der Hg-Säule im Capillar-electrom. 275 mm	

Freiburg i. B., Physikalisches Institut der Universität, Januar 1892.

VII. *Die piëzoelectrischen Constanten des Quarzes und Turmalines; von E. Riecke und W. Voigt.*

An einer anderen Stelle[1]) hat der Eine von uns vor etwa einem Jahre eine allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen gegeben, welche sich auf den drei Grundannahmen aufbaut, dass die electrischen Momente der Volumeneinheit an einer Stelle innerhalb eines irgendwie electrisch erregten Krystalles

1. nur Functionen sind von den ebenda stattfindenden Deformationen,

2. dass der Zusammenhang zwischen den drei electrischen Momenten a, b, c und den sechs Deformationsgrössen x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y in einer für die Darstellung der Beobachtungen ausreichenden Annäherung durch *lineäre* Functionen gegeben wird, und

3. dass die Symmetrie der Krystallform maassgebend ist für das piëzo- und pyroelectrische Verhalten des Krystalles.

Aus diesen Grundannahmen ergeben sich für jede krystallographische Gruppe charakteristische Werthe für die electrischen Momente, welche je nach Umständen 1 bis 18 Coefficienten der lineären Functionen, die der Substanz individuellen piëzoelectrischen Constanten, enthalten. Dieselben Ausdrücke hat neustens der Andere von uns aus der Annahme abgeleitet[2]), dass die Moleküle der Krystalle mit einem System electrischer Pole umgeben sind.

Ihre Anwendung auf bestimmte mechanische oder thermische Erregungsarten, d. h. bestimmte Werthe der Deformationsgrössen gestattet sowohl die electrische Vertheilung innerhalb des erregten Krystalles, als auch seine Wirkung auf äussere Punkte nach bekannten Methoden zu berechnen

---

1) Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen von W. Voigt, Göttingen 1890. (Aus dem 36. Bd. der Abh. der Kgl. Ges. d. Wiss.)

2) E. Riecke, Nachr. von der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Nr. 6. p. 191. 1891.

und die Vergleichung der Resultate der Theorie mit den für theoretische Behandlung geeigneten Beobachtungen der Herren J. und P. Curie, Röntgen, Czermak hat in allen Einzelheiten eine vollständige Uebereinstimmung ergeben. Indess sind jene Messungen, weil ohne Rücksicht auf eine Theorie angestellt und vielfach nur qualitativer Art, zu einer völlig befriedigenden Prüfung der Theorie nicht geeignet und es blieb demnach die Aufgabe, ausgedehntere quantitative Bestimmungen unter verschiedenen, der theoretischen Behandlung zugänglichen Umständen auszuführen und sie nach Berechnung der jeder Substanz individuellen piëzoelectrischen Constanten mit den theoretischen Gesetzen zu vergleichen. Diese von uns an Quarz und Turmalin durchgeführten Untersuchungen sind im Folgenden dargestellt.

Die Grundformeln der Theorie.

Der den ersten beiden Annahmen entsprechende allgemeinste Ansatz für die Momente a, b, c der Volumeneinheit sei geschrieben:

$$(1)\quad \begin{cases} a = \varepsilon_{11}\,x_x + \varepsilon_{12}\,y_y + \varepsilon_{13}\,z_z + \varepsilon_{14}\,y_z + \varepsilon_{15}\,z_x + \varepsilon_{16}\,x_y, \\ b = \varepsilon_{21}\,x_x + \varepsilon_{22}\,y_y + \varepsilon_{23}\,z_z + \varepsilon_{24}\,y_z + \varepsilon_{25}\,z_x + \varepsilon_{26}\,x_y, \\ c = \varepsilon_{31}\,x_x + \varepsilon_{32}\,y_y + \varepsilon_{33}\,z_z + \varepsilon_{34}\,y_z + \varepsilon_{35}\,z_x + \varepsilon_{36}\,x_y; \end{cases}$$

die ε_{hk}, welche im allgemeinen sämmtlich von einander unabhängig sind, stellen, wie oben gesagt, die *piëzoelectrischen Constanten der Substanz* dar.

Die Krystallformen des Quarzes und Turmalines besitzen eine dreizählige Symmetrieaxe, welche wir zur Z-Axe wählen, die des ersteren ausserdem drei normal zur Z-Axe stehende zweizählige Symmetrieaxen, die des letzteren drei sie schneidende Symmetrieebenen. Führt man in dem obigen System ein, dass bei einer Drehung des Coordinatensystems um 120° die Beziehungen zwischen den Momenten und den Deformationsgrössen sich nicht ändern sollen, so folgt daraus, dass

$$\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{26},\ \varepsilon_{22} = -\varepsilon_{21} = -\varepsilon_{16},\ \varepsilon_{15} = \varepsilon_{24},\ \varepsilon_{14} = -\varepsilon_{25},$$
$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32},\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{34} = \varepsilon_{35} = \varepsilon_{36} = 0$$

sein muss und es ergibt sich die vereinfachte Form:

$$(2)\quad \begin{cases} a = \quad \varepsilon_{11}(x_x - y_y) + \varepsilon_{14} y_z + \varepsilon_{15} z_x - \varepsilon_{22} x_y, \\ b = -\varepsilon_{22}(x_x - y_y) + \varepsilon_{15} y_z - \varepsilon_{14} z_x - \varepsilon_{11} x_y, \\ c = \quad \varepsilon_{31}(x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z, \end{cases}$$

welche für alle Krystallsysteme gilt, die eine dreizählige Symmetrieaxe besitzen; für die *ocdoëdrische Gruppe* ist eine solche das einzige Symmetrieelement, für diese ist also obiges Werthsystem a, b, c sogleich auch das definitive.

Von den drei zweizähligen Symmetrieaxen, welche die Krystallform des Quarzes ausserdem charakterisiren, folgen zwei aus dem Vorhandensein einer einzigen. Legen wir diese eine in die X-Axe, so muss bei einer Drehung des Coordinatensystems um diese Axe um 180^0 der ursprüngliche Zusammenhang zwischen Momenten und Deformationsgrössen wieder auftreten. Dieses ergibt, dass

$$\varepsilon_{15} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{33} = 0$$

sein muss und wir erhalten für die *trapezoëdrisch-tetartoëdrische Gruppe* (Quarz):

$$(3)\quad a = \varepsilon_{11}(x_x - y_y) + \varepsilon_{14} y_z, \quad b = -\varepsilon_{14} z_x - \varepsilon_{11} x_y, \quad c = 0.$$

Analog sind auch zwei der drei Symmetrieebenen des Turmalines unmittelbare Folgen der Existenz einer einzigen; legen wir diese in die YZ-Ebene, so muss ein zu ihr symmetrisch gelegenes System von Deformationen auch symmetrisch gelegene Momente ergeben. Dies ergibt, dass

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{14} = 0$$

sein muss, und es folgt sonach für die *zweite hemimorph-tetartoëdrische Gruppe* (Turmalin):

$$(4)\quad \begin{cases} a = \varepsilon_{15} z_x - \varepsilon_{22} x_y, \quad b = -\varepsilon_{22}(x_x - y_y) + \varepsilon_{15} y_z, \\ \qquad c = \varepsilon_{31}(x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z. \end{cases}$$

Die vorstehende Gestalt der Grundformeln ist diejenige, welche *im allgemeinen* für die Anwendung am geeignetsten ist; für das specielle Problem rein piëzoelectrischer Erregung eines Cylinders durch eine parallel der Längsaxe stattfindende Compression ist eine andere Form noch bequemer.

Da die Deformationsgrössen $x_x \ldots x_y$ in der Elasticitätstheorie als lineäre Functionen der Druckcomponenten $X_x \ldots X_y$ behandelt werden, so involviren die allgemeinen lineären Be-

ziehungen (1) zwischen den electrischen Momenten und den Deformationsgrössen analoge zwischen den Momenten und den Druckkräften. Man kann daher statt des Ansatzes (1) auch den folgenden zum Ausgangspunkt wählen:

$$(5)\begin{cases} -a = \delta_{11}X_x + \delta_{12}Y_y + \delta_{13}Z_z + \delta_{14}Y_z + \delta_{15}Z_x + \delta_{16}X_y, \\ -b = \delta_{21}X_x + \delta_{22}Y_y + \delta_{23}Z_z + \delta_{24}Y_z + \delta_{25}Z_x + \delta_{26}X_y, \\ -c = \delta_{31}X_x + \delta_{32}Y_y + \delta_{33}Z_z + \delta_{34}Y_z + \delta_{35}Z_x + \delta_{36}X_y, \end{cases}$$

und ihn ebenso wie (1) durch Einführung der Symmetrieeigenschaften für die einzelnen Krystallsysteme specialisiren.

Man erhält so durch die Annahme, dass die Z-Axe eine dreizählige Symmetrieaxe sei, die Grundformeln für die *oxydoëdrische Gruppe:*

$$(6)\begin{cases} -a = \delta_{11}(X_x - Y_y) + \delta_{14}Y_z + \delta_{15}Z_x - 2\delta_{22}X_y, \\ -b = -\delta_{22}(X_x - Y_y) + \delta_{15}Y_z - \delta_{14}Z_x - 2\delta_{11}X_y, \\ -c = \delta_{31}(X_x + Y_y) + \delta_{33}Z_z. \end{cases}$$

Aus ihr folgt, falls noch die X-Axe eine zweizählige Symmetrieaxe ist, als für die *trapezoëdrisch-tetartoëdrische Gruppe* gültig:

$$(7)\quad\begin{cases} -a = \delta_{11}(X_x - Y_y) + \delta_{14}Y_z, \\ +b = \delta_{14}Z_x + 2\delta_{11}X_y, \quad c = 0; \end{cases}$$

ebenso, wenn die YZ-Ebene eine krystallographische Symmetrieebene ist, für die *zweite hemimorph-tetartoëdrische Gruppe:*

$$(8)^*\quad\begin{cases} a = \delta_{15}Z_x - 2\delta_{22}X_y, \\ b = -\delta_{22}(X_x - Y_y) + \delta_{15}Y_z, \\ c = \delta_{31}(X_x + Y_y) + \delta_{33}Z_z. \end{cases}$$

Die Coefficienten δ_{hk}, welche man zum Unterschied von den Constanten ε_{hk} etwa die *piëzoelectrischen Moduln* nennen könnte, stehen mit jenen in einem einfachen Zusammenhang. Denn es bestehen zwischen den Deformationsgrössen und den Druckgrössen nach den Lehren der Elasticitätstheorie die Beziehungen:

$$(9)\begin{cases} -X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -X_y = c_{61}x_x + c_{62}y_y + c_{63}z_z + c_{64}y_z + c_{65}z^x + c_{66}x_y, \end{cases}$$

in denen die c_{hk} *die Elasticitätsconstanten* der Substanz heissen. Aus ihnen folgen die Gleichungen:

$$(10)\left\{\begin{array}{l} -x_x = s_{11}X_x + s_{12}Y_y + s_{13}Z_z + s_{14}Y_z + s_{15}Z_x + s_{16}X_y, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -x_y = s_{61}X_x + s_{62}Y_y + s_{63}Z_z + s_{64}Y_z + s_{65}Z_x + s_{66}X_y, \end{array}\right.$$

in denen die s_{hk} die *Elasticitätsmoduln* der Substanz genannt werden.

Die Einführung dieser Relationen in (1) und (5) führt auf den Zusammenhang:

$$(11)\qquad \delta_{ik} = \sum_k s_{ik} s_{hk}, \quad \varepsilon_{ih} = \sum_k \delta_{ik} c_{hk}.$$

Für die uns specieller interessirenden beiden Gruppen vereinfachen sich diese Formeln dadurch, dass von den c_{hk} und s_{hk}

$$c_{15}=c_{16}=c_{25}=c_{26}=c_{35}=c_{36}=c_{45}=c_{46}=c_{34}=0,\ c_{11}=c_{22},\ c_{13}=c_{23},$$
$$c_{24}=-c_{14},\ c_{56}=c_{14},\ c_{44}=c_{55},\ c_{66}=\frac{c_{11}-c_{22}}{2},$$
$$s_{15}=s_{16}=s_{25}=s_{26}=s_{35}=s_{36}=s_{45}=s_{46}=s_{34}=0,\ s_{11}=s_{22},\ s_{13}=\varepsilon_{23},$$
$$s_{24}=-s_{14},\ s_{56}=2s_{14},\ s_{44}=s_{55},\ s_{66}=2(s_{11}-s_{12}),$$

sind.

Hierdurch ergibt sich das System von Beziehungen: für die *trapezoëdrisch-tetartoëdrische Gruppe* (Quarz)

$$(12)\qquad\left\{\begin{array}{l} \delta_{11} = \varepsilon_{11}(s_{11}-s_{12}) + \varepsilon_{14}s_{14}, \\ \delta_{14} = 2\varepsilon_{11}s_{14} + \varepsilon_{14}s_{44}; \\ \varepsilon_{11} = \delta_{11}(c_{11}-c_{12}) + \delta_{14}c_{14}, \\ \varepsilon_{14} = 2\delta_{11}c_{14} + \delta_{14}c_{44}; \end{array}\right.$$

für die *zweite hemimorph-tetartoëdrische Gruppe* (Turmalin)

$$(13)\qquad\left\{\begin{array}{l} \delta_{22} = \varepsilon_{22}(s_{11}-s_{12}) - \varepsilon_{15}s_{14}, \\ \delta_{15} = \varepsilon_{15}s_{44} - 2\varepsilon_{22}s_{14}, \\ \delta_{31} = \varepsilon_{31}(s_{11}+s_{12}) + \varepsilon_{33}s_{13}, \\ \delta_{33} = 2\varepsilon_{31}s_{31} + \varepsilon_{33}s_{33}; \\ \varepsilon_{22} = \delta_{22}(c_{11}-c_{12}) - \delta_{15}c_{14}, \\ \varepsilon_{15} = \delta_{15}c_{44} - 2\delta_{22}c_{14}, \\ \varepsilon_{31} = \delta_{31}(c_{11}+c_{12}) + \delta_{33}c_{13}, \\ \varepsilon_{31} = 2\delta_{31}c_{31} + \delta_{33}c_{33}. \end{array}\right.$$

Die piëzoelectrische Erregung eines Prismas durch einseitigen Druck.

Die allgemeinen Formeln wollen wir nun auf den Fall eines, in beliebiger Richtung aus einem Krystall ausgeschnittenen Cylinders anwenden, der parallel seiner Axe mit einer Kraft comprimirt wird, welche den Druck p auf die Querschnittseinheit ergibt. Ist die Richtung der Axe und somit des Druckes gegen die Coordinatenaxe durch die Richtungscosinus γ_1, γ_2, γ_3 gegeben, so nehmen die elastischen Drucke im Cylinder bekanntlich die Werthe an:

$$(14)\qquad \begin{cases} X_x = p\gamma_1^2, \quad Y_y = p\gamma_2^2, \quad Z_z = p\gamma_3^2, \\ Y_z = p\gamma_2\gamma_3, \; Z_x = p\gamma_3\gamma_1, \; X_y = p\gamma_1\gamma_2 \end{cases}$$

und es ergeben sich für die Momente die Ausdrücke

bei Quarz:

$$(15)\qquad \begin{cases} -a = p(\delta_{11}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) + \delta_{14}\gamma_2\gamma_3) \\ +b = p(\delta_{14}\gamma_3 + 2\delta_{11}\gamma_2)\gamma_1, \; c = 0, \end{cases}$$

bei Turmalin:

$$(16)\qquad \begin{cases} -a = p(\delta_{15}\gamma_3 - 2\delta_{22}\gamma_2)\gamma_1, \\ +b = p(\delta_{22}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) - \delta_{15}\gamma_2\gamma_3), \\ -c = p(\delta_{31}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \delta_{33}\gamma_3^2). \end{cases}$$

Das Moment n nach einer beliebigen Richtung, deren Richtungscosinus α, β, γ sind, folgt hieraus nach der Formel

$$(17)\qquad n = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Ist diese Richtung diejenige der äusseren Normale auf einem Oberflächenelement und zugleich im Innern des Cylinders, wie in unserem Falle thatsächlich, a, b, c, constant, so gibt n die Dichte der electrischen Ladung des betreffenden Oberflächenelementes, welche für alle äusseren Punkte mit der wirklichen electrischen Vertheilung äquivalent ist.

Von besonderem Interesse sind einige specielle Werthe der Momente, weil Beobachtungen der Hrn. J. und P. Curie sich auf sie beziehen.

Diese Forscher comprimirten Quarzparallelepipedons, welche mit ihren Flächen parallel den oben festgelegten Coor-

dinatenebenen lagen durch Drucke in den Gesammtbeträgen A, B, C parallel den drei Kanten und bestimmten die Electricitätsmengen m, die durch dieselben in Stanniol-Belegen, welche die Flächen normal zur X-Axe bedeckten, frei wurden. Diese Mengen sind, wie leicht zu sehen, gleich $a q_x$, wenn q_x die Grösse der Fläche bezeichnet.

Je nachdem der Druck parallel der X-, Y- oder Z-Axe ausgeübt wird, ergeben die obigen Formeln (15):

$$m_x = -A\,\delta_{11},\quad m_y = +B\frac{q_x}{q_y}\,\delta_{11},\quad m_z = 0.$$

Also ist die entwickelte Electricitätsmenge dem wirkenden Druck proportional, im ersten Falle von den Dimensionen des Prismas unabhängig, im zweiten mit dem Verhältniss der belegten und gedrückten Fläche proportional; der Proportionalitätsfactor ist in beiden Fällen entgegengesetzt gleich. Ein Druck parallel der Z-Axe entwickelt in den Belegen gar keine Ladung.

Dies sind dieselben Resultate, welche die Hrn. J. und P. Curie aus ihren Beobachtungen abgeleitet haben.

Von Turmalin benutzten sie ein analog orientirtes Parallelepipedon, welches auf den Flächen normal zur Z-Axe mit Stanniol belegt war. Hier ist die entwickelte Electricitätsmenge m durch $c\,q_z$ gegeben und die obigen Formeln liefern, je nachdem die Drucke A, B, C parallel X, Y, Z wirken, die Resultate

$$m_x = -A\frac{q_z}{q_x}\,\delta_{11},\quad m_y = B\frac{q_z}{q_y}\,\delta_{31},\quad m_z = C\,\delta_{33}.$$

Diese Werthe fassen sich analog wie die obigen in Worte und geben die von Hrn. J. und P. Curie aus ihren Beobachtungen am Turmalin abgeleiteten Sätze. —

Die erschöpfende Prüfung der Formeln (15) und (16) und die Bestimmung der in ihnen auftretenden piëzoelectrischen Moduln δ_{hk}, welche nach (12) und (13) bei Kenntniss der Elasticitätsmoduln s_{hk} auch die Berechnung der piëzoelectrischen Constanten ε_{hk} gestattet, ist das Ziel der nunmehr zu beschreibenden Beobachtungen gewesen.

Allgemeine Angaben über die Methode der Beobachtung.

Die untersuchten Krystallstücke besassen die Form rechtwinkliger Prismen, deren Kanten gegen die Hauptaxen der Krystalle in bestimmter Weise orientirt waren. Um diese Prismen einem angemessenen Drucke in der Richtung einer Kante zu unterwerfen, hatten wir zu Anfang eine Hebelvorrichtung benützt; bei wiederholter Beobachtung stellten sich aber Schwankungen in den piëzoelectrischen Ladungen heraus, welche nur durch eine ungleichmässige Vertheilung des Drucks zu erklären waren. Wir gingen daher zur directen Belastung der Prismen über und mit einer Ausnahme sind die Versuche über welche im Folgenden berichtet wird, mit directer Belastung erhalten. Die Anordnung des Apparates war eine etwas verschiedene, je nachdem die electrische Erregung auf denselben Flächen beobachtet wurde, welche dem Drucke unterworfen wurden, oder auf den Seitenflächen.

Im ersteren Falle war die Einrichtung folgende: Ein parallelepipedisches Messingstück *M* von $13^1/_2$ cm Länge, 3 cm Breite, $1^1/_3$ cm Höhe, war auf einem grossen mit Gewichten beschwerten Holzklotze so befestigt, dass es über den Rand des Klotzes um 3 cm vorstand. Die Krystalle wurden von einer Klemme getragen, deren aus federnden Streifen von hartem Kupferbleche hergestellte Backen durch ein Hartgummistück von einander isolirt waren; an den Enden der Backen waren nach innen zu Blei- oder Kupferplatten angelöthet, deren Distanz so regulirt wurde, dass die Krystallstücke zwischen ihnen mit mässigem Drucke festgehalten wurden; auf der oberen Backe war aussen ein kleiner Stahlklotz befestigt, dachförmig abgeschrägt, sodass sich in seiner Mitte eine scharfe Kante von etwa $^1/_3$ cm Länge bildete, parallel zu der Längsrichtung der Klemme. Die Krystalle wurden so von der Klemme gefasst, dass jene Kante genau über der Mitte der gepressten Krystallflächen lag. Die ganze Klemme mit dem von ihr gehaltenen Krystalle wurde auf das zu Anfang erwähnte Messingstück gestellt, so dass der Krystall auf dem überragenden Theile desselben sich befand und dass die Kante des kleinen Stahlklotzes seiner Längsrichtung parallel war. Nun wurde ein aus einem rechteckigen Rahmen bestehender Bügel über die Klemme gehängt, dessen oberes

horizontales Stück eine nach innen gekehrte scharfe Schneide besass; mit dieser wurde der Bügel über die an dem Stahlklötzchen befindliche Schneide gehängt, sodass der Berührungspunkt der Schneiden genau über der Mitte der gepressten Fläche sich befand; der Bügel trug an seinem unteren Querstücke einen starken Draht; an diesen wurde die Wagschale angehängt, welche die zur Belastung verwandten Gewichtsstücke aufnehmen sollte. Die untere Feder der Klemmen stand, wie man sieht, in unmittelbarer metallischer Berührung mit dem als Unterlage dienenden Messingstücke; sie wurde ein für allemal mit der Gasleitung verbunden. Der Holzblock, an welchem die ganze Vorrichtung befestigt war, war mit Stanniolstreifen überzogen und gleichfalls abgeleitet. Die obere Feder und damit auch die obere Endfläche des Krystalls wurde mit dem einen Quadrantenpaar eines von Stöhrer construirten Thomson'schen Electrometers verbunden; das andere Quadrantenpaar war abgeleitet; die Nadel wurde mit Hülfe einer trockenen Säule geladen. Die ganze Einrichtung befand sich auf einem festen Tische in einem Glaskasten, der auf seinen Innenseiten mit Messingdrahtgittern ausgekleidet war. Die Oberfläche des Tisches war gleichfalls mit Stanniol überzogen und abgeleitet; der die Wagschale tragende Draht ging durch eine Auskehlung des Randes nach unten. Mit Hülfe eines federnden Contaktes konnte der die obere Krystallfläche mit dem Electrometer verbindende Draht mit der Gasleitung verbunden werden. Die Bewegung dieses Contaktes erfolgte mit Hülfe einer Schnur, welche durch ein Loch in der Decke des Kastens in das Innere hineinging.

Sollte die electrische Ladung auf einer Seitenfläche der Krystalle beobachtet werden, so wurden die Klemmen entfernt, auf das Messingstück wurde zunächst eine Hartgummiplatte gelegt, und auf diese der Krystall gestellt, sodass er sich wieder auf dem überragenden Theile des Messingstückes M befand. Die zum Ueberhängen des Bügels dienenden Stahlklötzchen waren gleichfalls auf Hartgummiplatten befestigt und wurden mit diesen frei auf die oberen Flächen der Krystalle aufgesetzt, sodass ihre Kante genau über der Mitte der Flächen sich befand. Der Bügel und die von demselben getragenen Gewichte wurden dann in derselben Weise angebracht wie

früher. Die Seitenflächen der Krystalle, für welche die electrische Ladung gemessen werden sollten, wurden mit Stanniol überzogen; sie wurden wieder von den beiden Backen einer federnden Klemmne berührt, welche von der Seite her angeschoben werden konnte. Die eine der beiden von einander isolirten Federn wurde mit der Gasleitung, die andere mit dem einen Quadrantenpaar des Electrometers verbunden.

Bei jeder Beobachtungsreihe wurde zuerst die Empfindlichkeit des Electrometers bestimmt, indem dasselbe Quadrantenpaar, welches bei den piëzoelectrischen Versuchen mit der einen Fläche des Krystallprismas verbunden war, durch ein Clarkelement geladen wurde, dessen einer Pol zur Erde abgeleitet war. Durch einen eingeschalteten Commutator konnten die Verbindungen der Pole vertauscht werden. Es wurde hierauf das Clarkelement entfernt, die Verbindung des Quadrantenpaares mit der zu untersuchenden Krystallfläche und mit Hülfe des erwähnten Federcontactes die Verbindung mit der Gasleitung hergestellt. Diejenige Stellung, welche die Nadel des Electrometers unter diesen Umständen annimmt, wird im Folgenden als ihre Nullstellung bezeichnet. Das Krystallprisma wurde dauernd mit einem constanten Gewichte belastet, um ein möglichst gleichmässiges Anlegen der auf seine Endflächen drückenden Platten herbeizuführen. Dieses constante Gewicht schwankte je nach dem belasteten Querschnitte zwischen 3 und 4 kg. Durch Aufheben des Federcontactes wurde dann die Krystallfläche und das mit ihr verbundene Quadrantenpaar isolirt. Es wurde darauf geachtet, dass hierbei keine merkliche Verschiebung der Nullstellung eintrat, wie sie insbesondere beim Turmalin durch pyroelectrische Erregung herbeigeführt werden konnte. War eine solche Verschiebung nicht vorhanden, so wurden bei allen Versuchen 2 Kilogrammgewichte auf der Wagschale zugelegt und der hierdurch verursachte Auschlag beobachtet. Hierauf wurde die Verbindung mit der Gasleitung wieder hergestellt und die Nadel in die Nullstellung zurückgeführt. Es wurde sodann von neuem der Contact unterbrochen, das zuvor aufgelegte 2 Kilogrammgewicht wieder abgenommen und der nun nach der entgegengesetzten Seite hin erfolgende Ausschlag gemessen. In dieser Weise wurden bei abwechselnder Belastung und Entlastung in der Regel sechs

Ausschläge nach der einen, sechs nach der anderen Seite hin bestimmt. Die Differenz der beiderseitigen Ablesungen gab ein Maass für die durch den Druck erzeugte electrische Ladung.

Die Bestimmung der Ruhelage für die abgelenkte Stellung des Electrometers wurde in folgender Weise ausgeführt. Beobachtet wurden die fünf ersten Umkehrpunkte; will man aus denselben die Ruhelage berechnen, so ist Rücksicht zu nehmen einerseits auf die Dämpfung andererseits auf die Verschiebung der Ruhelage durch die Zerstreuung der Electricität. Es werde angenommen, dass diese Verschiebung der Zeit proportional ist; es sei ferner x die Einstellung der Nadel, wie sie bei Abwesenheit der Zerstreuung eintreten würde, α der erste Ausschlag, ξ die während einer Schwingungsdauer der Nadel eintretende Verschiebung der Ruhelage, q das Dämpfungsverhältniss. Dann gelten für die aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte folgende Formeln:

$$\begin{aligned} a_1 &= x + \tfrac{1}{2}\xi + \alpha \\ a_2 &= x + \tfrac{3}{2}\xi - \alpha / q \\ a_3 &= x + \tfrac{5}{2}\xi + \alpha / q^2 \\ a_4 &= x + \tfrac{7}{2}\xi - \alpha / q^3 \\ a_5 &= x + \tfrac{9}{2}\xi + \alpha / q^4 \end{aligned}$$

Die in gewöhnlicher Weise aus dem ersten und zweiten, dem vierten und fünften Umkehrpunkt berechneten Ruhelagen sind:

$$x_1 = a_2 + \frac{a_1 - a_2}{1 + q}, \quad x_4 = a_5 + \frac{a_4 - a_5}{1 + q}.$$

Mit Hülfe dieser ergibt sich

$$x = x_1 - (x_4 - x_1)\frac{1 + 3q}{6(1 + q)}.$$

Bildet man aus den in dieser Weise für Belastung und Entlastung berechneten Einstellungen die Differenz, so erhält man das Doppelte des Scalenausschlages, welcher einer Belastung von 2 Kilogrammgewichten entspricht. Dividirt man den durch 1 kg erzeugten Ausschlag durch den von einem Clarkelement erzeugten, so repräsentirt die gefundene Zahl das Potential, zu welchem die mit der betreffenden Krystallfläche verbundenen Quadranten geladen werden, ausgedrückt in der electromotorischen Kraft des Clarkelementes. Ist Q die Capacität

der Quadranten, X die Capacität der die Krystallfläche berührenden Metallplatte, sowie der Drähte, durch welche die Verbindung mit dem Electrometer hergestellt wird, ist ausserdem V das Potential bis zu welchem jenes Leitersystem geladen wird, so ist die entwickelte Electricitätsmenge

$$e = (Q + X)\,V.$$

Kann der Werth von X für die verschiedenen der Beobachtung unterworfenen Krystalle als gleich betrachtet werden, so sind die entwickelten Electricitätsmengen proportional mit V, es sind also die Werthe von V ein relatives Maass derselben. Ob eine solche Annahme zulässig ist, wird dadurch zu prüfen sein, dass man die Capacität $Q + X$ mit der Capacität K eines und desselben unveränderlichen Conductors vergleicht. Stellen sich für das Verhältniss $(Q + X) : K$ bei Benutzung der verschiedenen Krystalle übereinstimmende Werthe heraus, so kommen die Unterschiede der Capacitäten X nicht in Betracht; die gefundenen Werthe von V sind ohne weitere Reduction zur Vergleichung der piëzoelectrischen Ladungen zu verwenden. Um die angegebene Prüfung auszuführen, wurde in demselben Kasten, welcher die übrigen Apparate umschloss, noch ein Luftcondensator aufgestellt, dessen Capacität K durch Verbindung mit den Quadranten des Electrometers der Capacität $Q + X$ noch hinzugefügt werden konnte. Dieselbe durch eine Belastung von zweï Kilogrammgewichten erzeugte Electricitätsmenge e vertheilte sich dann das einemal auf ein Leitersystem von der Capacität $Q + X$, das anderemal auf ein System von der Capacität $Q + K + X$; sind α und β die entsprechenden Ausschläge des Electrometers, so ist

$$\frac{Q + X}{Q + X + K} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$Q + X = \frac{\beta}{\alpha - \beta} K.$$

Wird die Capacität des Condensators in absolutem Maasse ausgedrückt, so ist auch die Capacität $Q + X$ in diesem bestimmt; dann sind aber auch die entwickelten Electricitätsmengen nach absolutem Maase zu berechnen.

Die vorstehenden Bemerkungen erläutern wir noch durch ausführlichere Mittheilung einer Beobachtungsreihe, welche mit

dem Turmalin *D* angestellt worden war. Wir geben zunächst die bei Belastung und Entlastung beobachteten Umkehrpunkte; die über den einzelnen Verticalkolumnen stehenden Zahlen geben die zeitliche Folge der Beobachtungssätze an.

Belastung.

1	3	5	7	9	11	13
848,0	847,3	847,9	847,1	847,9	847,8	846,7
816,0	815,0	815,0	815,1	815,1	814,1	814,0
839,2	838,4	838,7	838,2	838,9	838,7	837,6
822,0	821,0	820,9	821,0	821,0	820,3	819,9
834,4	833,3	833,6	833,2	833,9	833,4	832,3

Entlastung.

2	4	6	8	10	12	14
758,0	758,7	758,7	758,0	758,0	759,0	758,8
791,7	791,8	791,4	791,1	791,1	791,7	791,0
767,5	767,9	767,8	767,2	767,2	768,0	767,9
785,8	785,9	785,6	785,1	785,0	785,7	785,1
773,1	773,1	773,0	772,4	772,4	773,2	772,9

Die hieraus mit $q = 1{,}38$ berechneten Einstellungen sind

Belastung.			Entlastung.		
x_1	x_4	x	x_1	x_4	x
829,4	829,2	829,5	777,6	778,4	777,3
828,5	828,2	828,6	778,0	778,4	777,9
828,8	828,3	829,0	777,7	778,2	777,5
828,5	828,1	828,6	777,2	777,7	777,0
828,8	828,5	828,9	777,3	777,6	777,2
828,2	828,0	828,3	778,0	778,4	777,9
827,7	827,1	827,9	777,5	778,0	777,3

Mit Berücksichtigung der während der Beobachtungen eintretenden kleinen Verschiebungen des Nullpunktes berechnet sich hieraus der doppelte Ausschlag für eine Belastung von 2 kg zu 51,15 Scalentheilen.

Gleichzeitig gab ein Clarkelement einen doppelten Ausschlag von 134,4 Scalentheilen. Einer Belastung von 1 kg entspricht somit ein Potential von 0,1902 Clark.

Die Mittel aus den bei Belastung und Entlastung für x gefundenen Werthen sind 828,69 und 777,44.

Gleichzeitig wurden vor den einzelnen Beobachtungssätzen die im Folgenden aufgeführten Nullpunkte des Electrometers beobachtet.

803,2	803,1	803,1	803,1	803,2	803,2	803,1
803,1	803,2	803,2	803,1	803,1	803,1	803,1

Im Mittel ist der Nullpunkt 803,13. Die durch Belastung erzeugte Ablenkung ist hiernach 25,56, die durch Entlastung erzeugte 25,69. Die Summe dieser beiden sehr nahe gleichen Ablenkungen ist 51,25; die kleine Abweichung von dem vorhergehend angegebenen Werthe rührt daher, dass bei directem Mittelnehmen aus einer gleichgrossen Zahl von beiderseitigen Einstellungen die Verschiebungen des Nullpunktes nicht berücksichtigt werden.

Die untersuchten Quarzprismen.

Das Material zu den Beobachtungen am Quarz lieferte derselbe Krystall, der Voigt[1]) zur Bestimmung der Elasticitätsconstanten gedient hatte.

Es wurden zunächst drei Prismen bei den Versuchen benutzt, welche im Folgenden durch B, C und D bezeichnet sind. Alle drei waren aus einer und derselben Platte geschnitten, welche parallel der YZ-Ebene des Coordinatensystems, also senkrecht zu einer polaren Queraxe X des Krystalles lag. Die Dicken der Platten gemessen in der Richtung der X-Axe waren in cm

B	C	D
0,603	0,600	0,602.

Um die Lage der Prismen in der Ebene YZ zu bestimmen, geben wir die Winkel an, welche ihre Höhen oder Seiten mit der Richtung der Z-Axe einschliessen. Die Winkel sind positiv gerechnet in dem Sinne einer Drehung von der Z-Axe zu der Y-Axe.

Quarz	Höhe	Winkel gegen die Z-Axe
B	1,696	45°
C	1,645	135°
D	1,079	$22^1/_2$°
	1,099	$112^1/_2$°

Der Quarz B wurde hierauf senkrecht zu seiner Höhe in zwei gleiche Stücke getheilt, welche durch B_1 und B_2 bezeichnet

1) W. Voigt, Wied. Ann. **31.** p. 701. 1887.

werden sollen. Die Längen ihrer Seiten und ihre Orientirung gegen die Z-Axe sind im Folgenden angegeben.

Quarz	Seitenlänge	Winkel gegen die Z-Axe
B_1	0,784	45°
	0,715	135°
B_2	0,782	45°
	0,714	135°

Die belegte Fläche, auf welcher die electrische Ladung gemessen wurde, war bei allen Krystallen die zur X-Axe senkrecht stehende. Die Prismen B und C wurden nur parallel ihren Höhen, also in den Azimuten 45° und 135° gepresst; bei D wurde der Druck in der Richtung der beiden Seiten, also in den Azimuten 22½° und 112½°, angewandt. Ebenso bei den beiden Stücken B_1 und B_2, entsprechend den Azimuten 45° und 135°.

Endlich wurden die Prismen B_1 und B_2 auch noch in der Richtung der X-Axe gedrückt und die auf den gedrückten Flächen selbst erregten Electricitätsmengen gemessen. Abgesehen von dem Vorzeichen entsprechen dieselben, wie schon aus den Versuchen von Curie bekannt ist, den Ladungen, welche durch einen Druck in der Richtung der Y-Axe auf denselben Flächen erzeugt wird. Man erhält also auf diese Weise indirect die Ladung für das Azimut 90° des in der YZ-Ebene ausgeübten Druckes.

Zusammenstellung der mit den Quarzprismen erhaltenen Beobachtungsresultate.

In den allgemeinen für die piëzoelectrischen Momente des Quarzes aufgestellten Gleichungen (15) haben wir $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \sin\vartheta$, $\gamma_3 = \cos\vartheta$ zu setzen, wenn wir unter ϑ das Azimut der Druckrichtung in dem zuvor festgestellten Sinne verstehen. Wir bezeichnen ferner durch m_x die ganze auf der belegten Fläche erzeugte Ladung, durch q_x den Inhalt derselben. Das electrische Moment der Volumeinheit ist dann $a = m_x / q_x$; ist ferner p das Gewicht, mit welchem der Quarz belastet wird, q der Querschnitt der gepressten Fläche, so ist der auf die Flächeneinheit kommende Druck gleich p/q und der allgemeinen Theorie zur Folge gilt dann die Gleichung:

$$-\frac{m_x}{p}\cdot\frac{q}{q_x} = -\delta_{11}\sin^2\vartheta + \delta_{14}\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Wir theilen nun im Folgenden die Resultate der Beobachtungen mit.

1. Azimut der Druckrichtung $22^1/_2{}^0$. Quarz *D*.

Doppelausschlag auf 2 kg	Doppelausschlag auf 1 Clark	m_x in Clark	$\frac{m_x}{p} \cdot \frac{q}{q_x}$
23,9	145.6	0,164	0,046
23,6	141,6	0,166	0,045
19,1	126,0	0,151	0,042
		Mittel	0,044

2. Azimut der Druckrichtung 45^0.

Quarz	Doppelausschlag auf 2 kg	Doppelausschlag auf 1 Clark	m_x in Clark	$\frac{m_x}{p} \cdot \frac{q}{q_x}$
B	82,3	127,6	0,645	0,115
B	96,1	141,8	0,677	0,120
B	90,6	141,9	0,638	0,113
B_I	48,0	145,1	0,331	0,127
B_I	45,7	145,3	0,314	0,120
B_{II}	45,6	145,1	0,314	0,119
			Mittel	0,119

3. Azimuth der Druckrichtung 90^0.

Quarz	Doppelausschlag auf 2 kg	Doppelausschlag auf 1 Clark	m_x in Clark	$\frac{m_x}{p}$
B_I	54,4	145,3	0,374	0,187
B_I	55,4	145,3	0,381	0,190
B_{II}	53,9	145,3	0,371	0,185
B_{II}	53,4	145,6	0,367	0,183
			Mittel	0,186

4. Azimut der Druckrichtung $112^1/_2{}^0$. Quarz *D*.

Doppelausschlag auf 2 kg	Doppelausschlag auf 1 Clark	m_x in Clark	$\frac{m_x}{p} \cdot \frac{q}{q_x}$
82,4	145,6	0,566	0,155
68,7	125.8	0,546	0,149
80,3	141,8	0,566	0,155
74,6	141,9	0,526	0,144
		Mittel	0,151

5. Azimut der Druckrichtung 135°.

Quarz	Doppel-ausschlag auf 2 kg	Doppel-ausschlag auf 1 Clark	m_x in Clark	$\frac{m_x}{p} \cdot \frac{q}{q_x}$
C	63,8	140,7	0,453	0,083
C	47,2	127,2	0,371	0,067
C	56,7	141,6	0,400	0,073
C	54,8	141,9	0,386	0,070
B_{I}	28,7	145,1	0,198	0 083
B_{II}	26,9	145.1	0,185	0,078
			Mittel	0,076

Berechnung der piëzoelectrischen Moduln des Quarzes.

Berechnet man aus den Gleichungen, welche den vorhergehenden Druckrichtungen und electrischen Momenten entsprechen, die Moduln δ_{11} und δ_{14} nach der Methode der kleinsten Quadrate, so ergibt sich

$$\delta_{11} = 0{,}1908 \text{ und } \delta_{14} = -0{,}0431.$$

Die mit Hülfe dieser Constanten berechneten Werthe von $m_x/p \cdot q/q_x$ sind im Folgenden mit den beobachteten zusammengestellt.

$\frac{m_x}{p} \cdot \frac{q}{q_x}$	$22^1/_2$	45°	90°	$112^1/_2$°	135°
beob.	0,044	0,119	0,186	0,151	0,076
berechn.	0,043	0,117	0,191	0,148	0,074.

Die Uebereinstimmung ist, wie man sieht, eine befriedigende.

Das piëzoelectrische Moment in der Richtung der X-Axe für Druckrichtungen, welche innerhalb der YX-Ebene liegen, wird hiernach dargestellt durch die Formel

$$v = 0{,}1908 \sin^2 \vartheta + 0{,}0431 \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Das Moment ist Null für $\vartheta_0 = 0$ und $\vartheta_0 = -12°44'$. Es erreicht ein Maximum 0,1933 für $\vartheta = 83°38'$, ein Minimum $-0{,}0024$ für $\vartheta = -6°22'$.

Die untersuchten Turmalinprismen.

Es waren für die Untersuchung vier Prismen aus dem von Voigt[1]) auf seine Elasticitätsverhältnisse untersuchten Krystall, einem brasilianischen von grüner Farbe, geschnitten worden,

1) W. Voigt, Wied. Ann. **41.** 712. 1890.

welche im Folgenden durch *A*, *B*, *C*, *D* bezeichnet werden. Ihre Länge, Breite und Höhe, soweit ihre Kenntniss für die Berechnung nothwendig ist, wird in der folgenden Tabelle in cm angegeben.

	l	*b*	*h*
A	1,159	0,595	0,519
C	0,892		0,538
D	1,206		0,689.

Die Orientirung der Prismen gegen die Axen des Krystalles wird durch die Richtungscosinusse ihrer Kanten bestimmt; dabei ist das Coordinatensystem, wie oben gesagt, so gewählt, dass die *Z*-Axe mit der dreizähligen Hauptaxe, die *YZ*-Ebene mit einer Symmetrieebene des Krystalles zusammenfällt. Dann ergibt sich die folgende Zusammenstellung der Richtungscosinusse:

Turmalin		*X*	*Y*	*Z*
A	*l*	1	0	0
	b	0	1	0
	h	0	0	1
B	*l*	0	1	0
	b	1	0	0
	h	0	0	1
C	*l*	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
	b	1	0	0
	h	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
D	*l*	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
	b	1	0	0
	h	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

Zusammenstellung der mit den Turmalinprismen erhaltenen Beobachtungsresultate.

1. Die Druckrichtung liegt parallel der *Z*-Axe; Beobachtung der Ladung auf einer zu der *Z*-Axe senkrechten Fläche.

Turmalin	Doppelausschlag für 2 kg	Doppelausschlag für 1 Clark	Potential für 1 kg in Clark
A	47,51	135,3	0,1755
B	46,18	135,3	0,1706
B	46,41	135,3	0,1715
B	47,51	138,4	0,1716
		Mittel	0,1723

2. Die Druckrichtung liegt parallel der *Y*-Axe; Beobachtung der Ladung auf einer zu der *Y*-Axe senkrechten Fläche.

Turmalin	Doppel-ausschlag für 2 kg	Doppel-ausschlag für 1 Clark	Potential für 1 kg in Clark
A	5,18	136,1	0,0190
B	6,10	138,5	0,0220
		Mittel	0,0205

Hier war bei der Beobachtung mit *A* noch die Hebelvorrichtung gebraucht worden.

3. Die Richtungscosinusse der Druckrichtung sind 0, $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$; Beobachtung der Ladung auf der zu der Druckrichtung senkrechten Fläche.

Turmalin	Doppel-ausschlag für 2 kg	Doppel-ausschlag für 1 Clark	Potential für 1 kg in Clark
C	47,17	134,4	0,1754
D	47,94	134,4	0,1784
		Mittel	0,1769

4. Die Richtungscosinusse der Druckrichtung sind 0, $-1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$; Beobachtung der Ladung auf der zu der Druckrichtung senkrechten Fläche.

Turmalin	Doppel-ausschlag für 2 kg	Doppel-ausschlag für 1 Clark	Potential für 1 kg in Clark
C	51,11	134,4	0,1900
C	51,80	135,3	0,1915
D	51,15	134,4	0,1902
		Mittel	0,1906

5. Druckrichtung parallel der *X*-Axe. Beobachtung der Ladung auf der zur *Z*-Axe senkrechten Fläche.

Turmalin	Doppel-ausschlag für 2 kg	Doppel-ausschlag für 1 Clark	Potential für 1 kg in Clark
A	17,05	138,5	0,0615

6. Druckrichtung parallel der Y-Axe. Beobachtung der Ladung auf der zu der Z-Axe senkrechten Fläche.

Turmalin	Doppel-ausschlag für 2 kg	Doppel-ausschlag für 1 Clark	Potential für 1 kg in Clark
A	7,75	138,4	0,0280

7. Richtungscosinusse der Druckrichtung 0, $-1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$; Beobachtung der Ladung in der Richtung 0, $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$.

Turmalin	Doppel-ausschlag für 2 kg	Doppel-ausschlag für 1 Clark	Potential für 1 kg in Clark
D	27,05	138,4	0,0977
D	26,59	138,5	0,0959
		Mittel	0,0968

8. Vergleichende Messung der bei den Turmalinen *C* und *D* auftretenden seitlichen Ladungen, wenn bei *C* die Richtungscosinusse des Druckes 0, $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$, die der Ladung 0, $-1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$ sind, während *D* unter denselben Verhältnissen beobachtet wurde wie zuvor.

Turmalin	Doppel-ausschlag für 2 kg	Doppel-ausschlag für 1 Clark	Potential für 1 kg in Clark
C	16,86	136,4	0,0618
D	25,07	136,4	0,0919

Diese beiden Beobachtungen sind nicht im unmittelbaren Zusammenhange mit den übrigen angestellt worden, sondern von denselben durch einen Zeitraum von einem Monat getrennt. Da der gefundene Potentialwerth bei *D* erheblich kleiner ist als die früheren Werthe, so ist nur das aus den Beobachtungen sich ergebende Verhältniss der Ladungen von *C* und *D* im Folgenden benutzt.

Berechnung der piëzoelectrischen Moduln des Turmalins.

Wir haben nach dem früheren für die electrischen Momente in der Richtung der drei Axen die Gleichungen:

$$\frac{a}{p} = 2\gamma_1\gamma_2\delta_{22} - \gamma_1\gamma_3\delta_{15},$$
$$\frac{b}{p} = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\delta_{22} - \gamma_2\gamma_3\delta_{15},$$
$$\frac{c}{p} = -\delta_{31} + (\delta_{31} - \delta_{33})\gamma_3^2.$$

Wenden wir diese Formeln auf die im Vorhergehenden mitgetheilten Beobachtungsresultate an, so ergeben sich die folgenden Gleichungen zur Berechnung der piëzoelectrischen Moduln:

$$1.\quad -\delta_{33} = 0{,}172$$
$$2.\quad \delta_{22} = 0{,}020$$
$$3.\quad -\delta_{15} - \delta_{33} - \delta_{31} - \delta_{22} = 2\sqrt{2} \times 0{,}1769 = 0{,}500$$
$$4.\quad -\delta_{15} - \delta_{33} - \delta_{31} + \delta_{22} = 2\sqrt{2} \times 0{,}1906 = 0{,}539$$
$$5.\quad -\delta_{31} = 0{,}0615\,\frac{0.519}{1{,}159} = 0{,}027$$
$$6.\quad -\delta_{31} = 0{,}0280\,\frac{0{,}519}{0{,}595} = 0{,}025$$
$$7.\quad -\delta_{15} + \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{31} = 2\sqrt{2} \times 0{,}0968 \,.\, \frac{0{,}689}{1{,}206} = 0{,}156$$
$$8.\quad \frac{-\delta_{15} - \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{31}}{-\delta_{15} + \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{31}} = \frac{0{,}0618}{0{,}0919} \times \frac{0{,}538}{0{,}892} \times \frac{1{,}206}{0{,}689}$$

oder in Verbindung mit 7

$$8'.\quad -\delta_{15} - \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{31} = 2\sqrt{2} \times 0{,}0651 \,.\, \frac{0{,}538}{0{,}892} = 0{,}111.$$

Aus 3 und 4 ergibt sich:

$$\delta_{22} = 0{,}019 \text{ und } -\delta_{15} - \delta_{33} - \delta_{31} = 0{,}519.$$

Aus 7 und 8′

$$\delta_{22} = 0{,}022 \text{ und } -\delta_{15} + \delta_{33} +_{31} = 0{,}133,$$

woraus

$$\delta_{15} = -0{,}326 \text{ und } \delta_{33} + \delta_{31} = -0{,}193.$$

Aus 5 und 6 ergibt sich im Mittel

$$\delta_{31} = -0{,}026$$

und in Verbindung mit dem für $\delta_{33} + \delta_{31}$ gefundenen Werthe

$$\delta_{33} = -0{,}167.$$

Man hat somit schliesslich die folgenden Werthe der piëzoelectrischen Moduln des Turmalins:

$$\delta_{15} = -0{,}326,\quad \delta_{22} = \begin{cases} 0{,}020 \\ 0{,}019 \\ 0{,}022 \end{cases} \text{im Mittel } \delta_{22} = 0{,}020$$

$$\delta_{31} = \begin{cases} -0{,}027 \\ -0{,}025 \end{cases} \text{im Mittel } \delta_{31} = -0{,}026$$

$$\delta_{33} = \begin{cases} -0{,}172 \\ -0{,}167 \end{cases} \text{im Mittel } \delta_{33} = -0{,}169.$$

Die Uebereinstimmung der Einzelwerthe kann als eine befriedigende bezeichnet werden, wenn man berücksichtigt, dass die Moduln δ_{22} und δ_{31} aus kleinen Ausschlägen oder kleinen Differenzen grösserer Ausschläge zu berechnen sind und dass überdies kleine Abweichungen in der Richtung des Druckes sehr bedeutende Aenderungen des electrischen Momentes gerade bei den hier zur Geltung kommenden Richtungen bedingen.

Die piëzoelectrischen Moduln in absolutem Maasse.

Als Maass für die durch den ausgeübten Druck entwickelten Electricitätsmengen haben wir bisher das in der Einheit des Clarkelementes ausgedrückte Potential betrachtet, bis zu welchem die mit den Krystallflächen verbundenen Quadranten des Electrometers geladen wurden. Dies ist nur dann richtig, wenn die Unterschiede zwischen den Capacitäten der verschiedenen Krystalle zu vernachlässigen sind gegenüber der Capacität der Quadranten und des unveränderlichen zur Herstellung der Verbindungen dienenden Leitersystems. Die Zulässigkeit dieser Annahme wurde in der schon früher angegebenen Weise geprüft durch Vergleichung der Capacität $Q + X$ der Quadranten, der mit ihnen verbundenen Leitung und der Krystallflächen mit der Capacität K eines Luftcondensators. Die mit und ohne Condensator beobachteten Ausschläge des Electrometers sind in der folgenden Tabelle mit den daraus berechneten Werthen von $(Q + X)/K$ zusammengestellt. Es muss erwähnt werden, dass diese Zahlen aus Versuchsreihen berechnet wurden, welche mit der Hebelvorrichtung angestellt waren. Die Benutzung derselben schien aber unbedenklich, da es sich hier nur um die Constanz der durch eine bestimmte

Belastung erzeugten Electricitätsmengen handelt, die Orientirung der Druckrichtung gegen die Kanten des Turmalins gleichgültig ist.

Turmalin	Ausschlag ohne Condensator	Ausschlag mit Condensator	$\frac{Q+X}{K}$	Mittelwerth
A	91,9 88,7	47,8 46,8	1,084 1,117	1,100
B	95,5 92,8 92,8	49,2 48,0 49,4	1,065 1,071 1,145	1,094
C (*l*)	93,3 99,9 87,5	48,8 52,0 46,2	1,096 1,088 1,110	1,098
C (*k*)	105,9	55,5	1,101	1,101
D (*l*)	105,1 106,2 105,7 95,0	54,1 55,2 54,5 50,8	1,061 1,082 1,064 1,150	1,089
D (*k*)	85,7	44,8	1,095	1,095

Bei *C* und *D* bedeuten die beigesetzten *l* und *k*, dass das eine mal parallel der langen, das anderemal parallel der kurzen Kante gedrückt wurde. Im Mittel ist:

$$\frac{Q+X}{K} = 1,096.$$

In der vorläufigen Mittheilung, welche wir über unsere Untersuchung in den Nachrichten von der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1891, p. 247 gemacht haben, ist für $Q + X$ der Werth 57 cm angegeben. Diesem Werthe liegt eine directe Berechnung der Capacität K aus dem Abstand und dem Durchmesser der Condensatorplatten zu Grunde. Der so gefundene Werth $K = 52$ war aber sicher zu klein, weil bei demselben die Capacität von ziemlich grossen, theilweise mit Schellack isolirten Conductortheilen nicht berücksichtigt war, welche als Träger und Gegengewichte für die vertical stehenden Condensatorplatten dienten. Eine genauere Bestimmung der Capacität auf theoretischem Wege war bei der complicirten Anordnung des Apparates nicht möglich und es blieb nur übrig, durch eine besondere Versuchsreihe den Werth von K zu ermitteln.

Wir bedienten uns zu diesem Zweck, mit einer kleinen Abänderung, der von Maxwell in seinem Treatise Bd. 2. p. 375 angegeben Methode. Die Collectorplatte des Condensators wurde mit Hülfe eines Stimmgabelunterbrechers abwechsend mit dem einen Pol einer Säule von 4 bis 5 Daniell'schen Elementen und mit dem einen Pole eines sehr empfindlichen Thomson'schen Galvanometers verbunden. Die Condensatorplatte, der andere Pol der Säule, sowie der andere Pol des Galvanometers, waren mit der Gasleitung verbunden. Mit Hülfe eines gewöhnlichen Commutators konnten die Verbindungen zwischen den Polen der Daniell'schen Säule einerseits, der Collectorplatte und der Gasleitung andererseits vertauscht werden. Bezeichnen wir durch E die electromotorische Kraft der Säule, durch n die Anzahl der Doppelschwingungen, welche von der Stimmgabel in 1 Secunde ausgeführt werden, so ist die Menge der Electricität, welche in 1 Secunde durch das Galvanometer entladen wird:

$$i = nEK.$$

Die Pole der Säule wurden hierauf durch einen Widerstand von 22000 Ohm verbunden, das Thomson'sche Galvanometer im Nebenschluss zwischen zwei Punkte des so gebildeten Kreises eingeschaltet, welche durch einen Widerstand von 1 Ohm von einander getrennt waren; die Spannung zwischen den Polen des Galvanometers war hiernach $E/22000$.

Der Widerstand des Galvanometers war gleich 15610 Ohm, also im electrostatischem Maasse gleich:

$$\frac{15610 \times 10^9}{v^2};$$

die Stromstärke in electrostatischem Maasse ist hiernach:

$$J = \frac{E}{22000} \times \frac{v^2}{15610 \times 10^9}.$$

Durch Division der beiden Gleichungen ergibt sich:

$$K = \frac{v^2}{n \times 22000 \times 15610 \times 10^9} \times \frac{i}{J}.$$

Zur Bestimmung der Schwingungszahl n der Stimmgabel wurde dieselbe als Unterbrecher eines Ruhmkorff'schen Funkeninductors benutzt und es wurden die sehr kleinen inducirten Funken mit Hülfe eines kleinen Hohlspiegels auf

eine rotirende Trommel projicirt, welche mit photographischen Papier (Eastman's transparent film) überzogen war. Durch eine langsame Bewegung des Hohlspiegels wurde erreicht, dass die Funkenbilder auf der Trommel eine Schraubenlinie erfüllten. Indem man nun die Anzahl der Funken, welche innerhalb einer gemessenen Zeit zu Stande kamen, abzählte, erhielt man leicht mit einer erheblichen Genauigkeit die gesuchte Anzahl n der einer Secunde entsprechenden. Das Mittel aus mehreren gut stimmenden Beobachtungen ergab:

$$n = 31,47.$$

Mit Rücksicht auf diesen Werth von n, sowie mit $v = 3,012 \times 10^{10}$ wird:

$$K = 83,8 \times \frac{i}{J}.$$

Die Beobachtungen geben zunächst die Capacität des Condensators zusammen mit der Capacität der Drähte, welche den Condensator mit dem Stimmgabelunterbrecher verbinden. Hierzu war theilweise dieselbe Leitung benutzt, welche früher zu der Verbindung des Condensators mit dem Electrometer gedient hatte; die Drähte waren zum Theil durch Messingröhren geführt, von deren Wandung sie durch Schellack isolirt waren. Um die Capacität des Condensators für sich zu erhalten, wurde in derselben Weise wie zuvor die Capacität K' der Verbindung bestimmt, die Capacität des Condensators allein war dann $K - K'$. Es wurden im Ganzen drei Capacitätsbestimmungen in dieser Weise ausgeführt, von welchen die erste etwas ausführlicher mitgetheilt werden möge.

Es wurde zuerst der Zweigstrom der Batterie durch das Galvanometer gesandt und wurden mit Hülfe eines Commutators drei Einstellungen auf der einen, zwei auf der anderen Seite der Scala beobachtet. Hierauf wurde die Entladung des Condensators durch das Galvanometer geleitet und wurden bei abwechselnder Verbindung mit dem positiven und negativen Pole der Säule vier Einstellungen auf der einen, drei auf der anderen Seite bestimmt. Sodann wurde wieder die durch den Zweigstrom erzeugte Ablenkung gemessen, hierauf die Verbindung des Condensators mit der Zuleitung aufgehoben, und der dieser allein entsprechende Entladungsstrom in derselben Weise be-

obachtet, wie zuvor mit dem Condensator. In dieser Weise wurden vier Capacitätsmessungen mit Condensator, vier mit Zuleitung aneinander gereiht. Für die sechs ersten Sätze sind in der folgenden Tabelle die auf beiden Seiten der Scala beobachteten Einstellungen angegeben:

J Zweigstrom		i Entladung des Condensator		J Zweigstrom	
802,9	667,3	805,6	660,6	803,7	669,4
802,2	667,2	806,0	661,6	803,2	670,1
802,5	—	805,9	660,8	803,3	—
—	—	805,9	—	—	—
J Zweigstrom		**i' Entladung der Leitung**		**J Zweigstrom**	
803,7	669,4	755,2	710,1	804,1	670,2
803,2	670,1	756,3	710,9	803,4	670,4
803,3	—	756,1	711,6	803,8	—
—	—	756,2	—	—	—

Aus diesen und den in derselben Weise angestellten weiteren Beobachtungen ergaben sich die Werthe von J, i und i', welche im Folgenden in der Reihe, in welcher sie erhalten wurden, aufgeführt sind. Unter K und K' sind diejenigen Werthe der Capacitäten angegeben, welche durch die Combination der entsprechenden i und i' mit dem Mittel aus den benachbarten Werthen von J erhalten wurden.

$J = 135,3$		$J = 134,3$	
$i = 144,6$	$K = 90,23$	$i = 145,2$	$K = 92,93$
$J = 133,6$		$J = 133,9$	
$i' = 45,1$	$K' = 28,32$	$i' = 45,6$	$K' = 28,52$
$J = 133,5$		$J = 134,4$	
$i' = 45,4$	$K' = 28,61$	$i' = 45,4$	$K' = 28,43$
$J = 132,8$		$J = 133,5$	
$i = 144,8$	$K = 90,94$	$i = 143,7$	$K = 90,43$
$J = 134,3$		$J = 133,0$	

Im Mittel wird $K = 91,13$, $K' = 28,47$. Somit die Capacität des Condensators $K - K' = 62,66$.

Zwei andere in derselben Weise angestellte Beobachtungsreihen ergaben die folgenden Werthe von K und K'.

K	K'	K	K'
93,44	29,61	91,65	29,18
92,34	29,56	92,04	28,95
92,99	29,06	93,30	29,37
93,52	29,22	93,30	29,03
93,07	29,36	92,57	29,13

Die zweite Beobachtungsreihe gibt $K - K' = 63,71$; die dritte $K - K' = 63,44$; im Mittel ist somit *die Capacität des Condensators in electrostatischem Maasse gleich 63,27 cm. Die Capacität der Quadranten, der Leitung und der Krystallflächen* wird:

$$Q + X = 69,3 \text{ (cm)}.$$

Die electromotorische Kraft eines Clarkelementes ist in electromagnetischem Maasse gleich $1,44 \times 10^8$, in electrostatischem Maasse gleich $0,478 \times 10^{-2}$. Die früher angegebenen Werthe der piëzoelectrischen Ladungen werden somit auf absolutes electrostatisches Maass durch Multiplication mit $69,3 \times 0,478 \times 10^{-2}$ reducirt. Führt man endlich als Einheit der Druckkraft an Stelle des Kilogrammgewichtes die Dyne ein, so hat man die gefundenen Werthe noch durch $9,81 \times 10^5$ zu dividiren. Der schliessliche *Reductionsfactor auf absolutes Maass* wird somit:

$$\frac{69,3 \times 0,478 \times 10^{-7}}{9,81} = 33,8 \times 10^{-8}.$$

In absolutem Maasse (cm, g, s) werden somit die piëzoelectrischen Moduln:

I. Quarz.

$$\delta_{11} = 6,45 \times 10^{-8}, \qquad \delta_{14} = -1,45 \times 10^{-8}.$$

II. Turmalin.

$$\delta_{15} = -11,02 \times 10^{-8}, \qquad \delta_{22} = 0,67 \times 10^{-8},$$
$$\delta_{31} = -0,88 \times 10^{-8}, \qquad \delta_{33} = -5,71 \times 10^{-8}.$$

Hr. Curie findet bei Quarz für δ_{11} den Werth $6,3 \times 10^{-8}$, bei Turmalin für δ_{33} den Werth $-5,3 \times 10^{-8}$. Andere Moduln als diese beiden gestatten die von ihm mitgetheilten Zahlen nicht abzuleiten.

Dass die von uns erhaltenen Zahlen beide grösser sind, als die von Hrn. Curie gefundenen, möchte wohl besonders davon herrühren, dass wir den, während der Beobachtung

stattfindenden Electricitätsverlust, durch unsere Berechnungsart berücksichtigt haben. Bei Hrn. Curie findet sich wenigstens keine hierauf bezügliche Bemerkung.

Die piëzoelectrischen Constanten in absolutem Maasse.

Aus den oben erhaltenen Zahlen für die piëzoelectrischen Moduln berechnen sich nun mit Hülfe der von Voigt [1]) bestimmten Elasticitätsconstanten c_{hk} für dieselben Quarz-, und Turmalinkrystalle leicht die bezüglichen piëzoelectrischen Constanten ε_{hk}. Es gilt nämlich nach (12) und (13)

für Quarz:

$$\varepsilon_{11} = \delta_{11}(c_{11} - c_{12}) + \delta_{14} c_{14},$$
$$\varepsilon_{14} = 2\,\delta_{11} c_{14} + \delta_{14} c_{44},$$

für Turmalin:

$$\varepsilon_{22} = \delta_{22}(c_{11} - c_{12}) - \delta_{15} c_{14},$$
$$\varepsilon_{15} = \delta_{15} c_{44} - 2\,\delta_{22} c_{14},$$
$$\varepsilon_{31} = \delta_{31}(c_{11} + c_{12}) + \delta_{33} c_{13},$$
$$\varepsilon_{33} = 2\,\delta_{31} c_{31} + \delta_{33} c_{33}.$$

Die Elasticitätsconstanten für Quarz haben bei Anwendung absoluter Krafteinheiten (Dynen) in cm, g, *s*-System die Werthe:

$$c_{11} = 85{,}1\,.\,10^{10},\ c_{33} = 105{,}4\,.\,10^{10},\ c_{44} = 57{,}1\,.\,10^{10},$$
$$c_{12} = 6{,}95\,.\,10^{10},\ c_{13} = 14{,}1\,.\,10^{10},\ c_{14} = 16{,}8\,.\,10^{10};$$

diejenigen für Turmalin analog:

$$c_{11} = 270\,.\,10^{10},\ c_{33} = 161\,.\,10^{10},\ c_{44} = 67\,.\,10^{10}.$$
$$c_{12} = 69\,.\,10^{10},\ c_{13} = 8{,}8\,.\,10^{10},\ c_{14} = -\,7{,}8\,.\,10^{10},$$

Durch Benutzung dieser Resultate ergibt sich folgendes *definitive System der piëzoelectrischen Constanten.*

für Quarz:

$$\varepsilon_{11} = +\,4{,}67\,.\,10^4,\ \varepsilon_{14} = +\,1{,}73\,.\,10^4,$$

für Turmalin:

$$\varepsilon_{22} = +\,0{,}49\,.\,10^4,\ \varepsilon_{15} = -\,7{,}28\,.\,10^4,\ \varepsilon_{31} = -\,3{,}03\,.\,10^4,$$
$$\varepsilon_{33} = -\,9{,}35\,.\,10^4.$$

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **31.** p. 721. 1887 und **41.** p. 722. 1890.

Die pyroelectrische Contante des Turmalins.

Beim Turmalin gilt für das durch eine Erwärmung um ϑ Grade in der Volumeinheit erregte electrische Moment die Formel [1]):

$$c = \vartheta\,(2\,\varepsilon_{31}\,a_2 + \varepsilon_{33}\,a_3).$$

Hier sind a_2 und a_3 die Ausdehnungscoëfficienten des Turmalins in der Richtung der Y- und Z-Axe und zwar ist nach Beobachtungen von Pfaff [2]):

$$a_2 = 7{,}73 \times 10^{-6},\ a_3 = 9{,}37 \times 10^{-6}.$$

Diese Werthe ergeben zusammen mit den ebengefundenen c_{hk}:

$$c = 1{,}34 \times \vartheta.$$

Die Zahl 1,34 wollen wir als die *pyroelectrische Constante* des Turmalins bezeichnen. Dieselbe Zahl kann nun berechnet werden aus den directen Messungen pyroelectrischer Momente, welche der Eine von uns ausgeführt hat. [3])

Die pyroelectrischen Momente wurden dabei durch quadratische Functionen der Temperaturänderung ϑ dargestellt. Die an dem angeführten Orte p. 303 mitgetheilten fünf verschiedenen brasilianischen Turmalinen entsprechenden Coëfficienten beziehen sich auf eine willkürliche Einheit der Electricitätsmenge und auf die Gewichtseinheit. Ihre *Reduction auf absolutes electrostatisches Maass und auf die Volumeinheit* wird erhalten durch Multiplication mit $4 \times 3{,}11$ und es ergeben sich dann die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
c_{I} &= 1{,}39\,\vartheta + 0{,}0022\,\vartheta^2\\
c_{III} &= 1{,}33\,\vartheta + 0{,}0046\,\vartheta^2\\
c_{IV} &= 1{,}18\,\vartheta + 0{,}0051\,\vartheta^2\\
c_{V} &= 0{,}70\,\vartheta + 0{,}0084\,\vartheta^2\\
c_{VI} &= 1{,}04\,\vartheta + 0{,}0056\,\vartheta^2\\
\hline
\text{Im Mittel}\quad c &= 1{,}13\,\vartheta + 0{,}0052\,\vartheta^2.
\end{aligned}$$

Die Theorie setzt unendlich kleine Temperaturänderungen voraus und führt demgemäss auf eine lineäre Beziehung zwischen

1) W. Voigt, Allgemeine Theorie etc. p. 69. 1890.

2) Pfaff, Pogg. Ann. p. 107, 148. 1861.

3) Riecke, über die Pyroelectricität des Turmalins. Wied. Ann. 1890. **40.** p. 303 und 305.

c und ϑ. Es entspricht also dieses für eine bestimmte Temperatur durch die Beobachtung gelieferte c dem Werthe, welchen in obiger Formel

$$\frac{dc}{d\vartheta} = 1{,}13 + 0{,}0104\,\vartheta$$

für dieselbe Temperatur besitzt.

Die piëzoelectrischen Beobachtungen wurden besserer Isolation der Krystallflächen wegen im stark geheizten Zimmer bei im Mittel 28° angestellt; dagegen war bei den pyroelectrischen Beobachtungen die Zimmertemperatur, von welcher aus D gerechnet ist, gleich 18°; berücksichtigt man dies, so gibt sich als durch pyroelectrische Beobachtungen geliefert

$$c = 1{,}23\,\vartheta.$$

Zieht man in Betracht, dass die pyroelectrische Beobachtung bei den verschiedenen brasilianischen Turmalinen äusserst stark abweichende Werthe geliefert hat, und dass der oben berechnete Werth

$$c = 1{,}34\,\vartheta$$

zu seiner Bestimmung eine grosse Zahl durch verschiedene und complicirte Messungen abgeleitete Constanten benutzt, so wird man die Uebereinstimmung der beiden Resultate als eine bedeutende bezeichnen und behaupten können, dass die Grundlagen der Theorie durch die Beobachtung in überraschender Weise bestätigt werden. *Man wird also künftighin nicht mehr nöthig haben, zwischen Pyroelectricität und Piëzoelectricität als zwei verschiedenen Erscheinungen zu unterscheiden. Beide haben ihre gemeinsame Ursache in den im Inneren der Krystalle auftretenden Deformationen.*

Göttingen, im Herbst 1891.

III. *Ein Demonstrationsversuch mit electrischen Schwingungen von L. Arons.*

1. Lecher hat bekanntlich eine Methode angegeben, die äuche electrischer Schwingungen, welche zwischen parallelen rähten verlaufen, mittelst Geissler'scher Röhren aufzufinen. Rückt man eine solche Röhre in die Nähe eines Schwinungsbauches, so leuchtet sie hell auf. Es lag der Gedanke ahe, ob es nicht möglich sei den electrischen Schwingungsıstand zwischen parallelen Drähten auf eine längere Strecke leichzeitig sichtbar zu machen, indem man die Drähte auf ieser Strecke durch ein Glasrohr führt, aus welchem die Luft rtgepumpt werden kann. Diesen Gedanken habe ich mit Erlg zur Ausführung gebracht.

2. Das von mir benutzte Glasrohr (Fig. 1) hatte eine änge von 250 cm bei einem Durchmesser von 6 cm. Dasselbe



Fig. 1.

ef an beiden Seiten in je zwei enge Ansatzrohre aus; zwei luminiumdrähte von 2 mm Durchmesser durchliefen im Abtand von 3 cm die Länge des Rohres; ihre beiderseitigen nden waren durch kleine Korkstopfen gezogen, welche die Anıtzrohre möglichst gut schliessen. Um die Drähte gespannt halten zu können, werden dieselben, wie aus Fig. 2 ersichtlich, auf jeder Seite durch eine ihrer Länge nach durchborte kleine Klemmschraube geführt und diese, nachdem der Draht möglichst straff angezogen war, dicht an den Kork geschoben und festeschraubt. Sodann wurde das Ansatzrohr, die Klemmschraube nd ein Theil des herausragenden Drahtes mit Siegellack um-

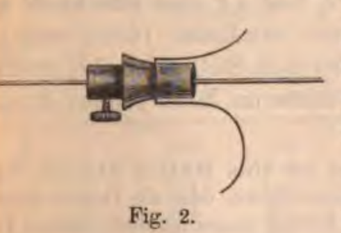


Fig. 2.

schmolzen. Dieser Verschluss war hinreichend luftdicht und erlaubte Verdünnungen bis unter 1 mm Quecksilber tagelang zu halten. [1])

3. In Fig. 3 ist eine erste Versuchsanordnung schematisch dargestellt. Als Schwingungserreger diente wie bei den meisten Versuchen auf diesem Gebiet quadratische Zinkplatten Z von 40 cm Seite. Die Kugeln, zwischen welchen der Funke des ziemlich kleinen, von 4 Accumulatoren getriebenen Inductoriums J übersprang, waren unmittelbar an den Tafeln angebracht, um möglichst viele verschiedene Schwingungszustände erzeugen zu können. [2])

Den erregenden Zinkplatten Z standen kleinere z, von 10 cm Seite gegenüber, welche den Anfang der Drahtleitung bildeten. Die Gesammtlänge dieser betrug von z bis E ca. 6 m; die Drähte im Glasrohr bildeten das Ende der Leitung

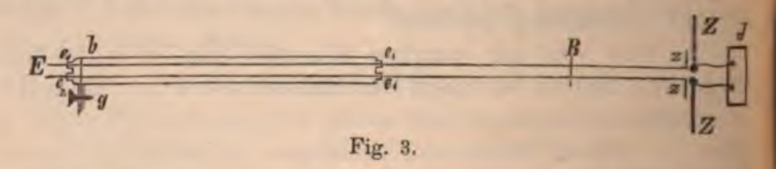


Fig. 3.

von $e_1\,e_1$ bis $e_2\,e_2$; sie waren am äussersten Ende durch einen durch den Glashahn g eingeschobenen Draht b überdrückt, so dass hier immer ein Schwingungsknoten lag. Das Glasrohr wurde vermittelst einer Wasserstrahlpumpe evacuirt, der Druck in demselben betrug zwischen 10 und 20 mm Quecksilber.

4. Befand sich ausser bei b keine Ueberbrückung auf den Drähten, so leuchtete der Raum zwischen den Drähten auf der ganzen Länge des Glasrohres. Wurde auf den freien Theil der Leitung zwischen $e_1\,e_1$ und $z\,z$ eine Brücke B aufgesetzt, so erlosch im allgemeinen das Licht; rückte man nun mit der Brücke weiter, so fanden sich Stellungen, bei welchen ein theilweises Leuchten der Drähte im Rohr zeigte, dass in

1) Ich hatte das Rohr zunächst von Hrn. Müller (Geissler Nachfolger) in Bonn in der Weise anfertigen lassen, dass die Drähte mittelst angesetzter Platinenden in die engen Röhren eingeschmolzen waren. Beim Transport war aber die Schmelzemaille mitsammt dem Platindraht an einer Stelle gebrochen.

2) Rubens, Wied. Ann. **42.** p. 163. Anm. 1. 1891.

der Leitung Schwingungen zustande kamen, indem die beiden durch die bewegliche Brücke abgegrenzten Theile in Resonanz standen. Ich konnte auf diese Weise 1, 2, 3, 4 und selbst 5 Schwingunsbäuche gleichzeitig im Glasrohr sichtbar machen. Fig. 1 mag von der Erscheinung ein Bild geben, für den Fall dass sich 4 Schwingungsbäuche im Rohre befanden. Während an den Knotenstellen die Drähte dunkel blieben, glimmten sie an den Bäuchen auf eine längere Strecke in bläulich weissem Licht; kleine spitzzulaufende Zungen liefen an diesen Stellen in der Ebene, welche beide Drähte aufnahm, aus. Dieselben werden nach beiden Enden der leuchtenden Strecke hin seltener und kürzer, in der Mittelparthie reichten sie hier und da von einem Draht bis zum anderen.

5. Wenn auch die beschriebene Methode nicht gerade zu Messungen verwendet werden wird, so ist es doch ganz interessant, dass man wenigstens eine ungefähre quantitative Orientirung über die Erscheinungen erhalten kann. Ich spannte längs der Drahtleitung ein Bandmaass aus und bestimmte die Stellung der Brücke, sowie die entsprechenden Schwingungsbäuche in der Röhre. Zu letzterem Zweck werden, da die Beobachtungen im verdunkelten Zimmer ausgeführt werden mussten, Fäden über die Mitte der leuchtenden Stellen gehängt und die Lage nach Erhellung des Zimmers abgelesen. Ich gebe die erste Beobachtungsreihe wieder, wobei je nur eine Einstellung ohne besondere Sorgfalt gemacht wurde, sodass eine solche Versuchsreihe bequem in der Vorlesung auszuführen ist. Die Spalte 3 und 5 der folgenden Tabelle geben die Einstellungen der Brücke B und der Bäuche im Rohr.

Nr.	Zahl der $\frac{\lambda}{4}$ auf der Leitung	Stellung der Brücke B		Lage der Bäuche im Rohr		$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{\lambda}{2}$
		beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet
1	5	526	510	136	138	—	248
2	7	370	370	100	103	—	178
		561	548				
3	9	284	290	86	83	132	138
		430	428				
		573	566	218	221		
4	11	582	579	73	70,5	112	113
				185	183,5		

Nr.	Zahl der $\frac{\lambda}{4}$ auf der Leitung	Stellung der Brücke B beobachtet	Stellung der Brücke B berechnet	Lage der Bäuche im Rohr beobachtet	Lage der Bäuche im Rohr berechnet	$\frac{\lambda}{2}$ beobachtet	$\frac{\lambda}{2}$ berechnet
5*	13	588	590	62	62		
				155	157	93	95
				Am Ende e_1	252		
6	15	590	593,6	56	55,4		
				138	138	82	83
				218	221	80	
7*	17	595	598	50 (?)	50,5		
				131	123,5	81(?)	73
				207	196,5	76	
8*	19	In unmittelbarer Nähe v. z (bei 600)	602	52	46,7		
				117	112	65	66
				184	178	67	
				Am Ende e_1	243		
9	21		605	45	43,6		
				103	103	58	59
				160	162	57	
				—	221		
10*	23		608	43	41		
				94	95	51	
				148	149	54	54
				197	203	49	
				Am Ende e_1	257		

6. Die Bedeutung der übrigen Spalten der Tabelle ergibt sich aus folgender Betrachtung. Da das Ende der Glasröhre bei b dauernd einen Knoten enthält, die Endplatten : immer einen Bauch bilden, so muss die ganze Länge der Leitung stets in eine ungerade Anzahl von Viertelwellenlängen zerfallen. Um aus dieser Anschauung heraus die Lagen der möglichen Knoten und Bäuche bezeichnen zu können, muss noch die Länge bekannt sein, welche die Endplatten repräsentiren. Aehnlich wie Rubens [1]) berechnete ich diese Länge aus den unter Nr. 3 angeführten Beobachtungen: der Mittelwerth ist 30 cm. Mit Hülfe dieser Zahl berechnete ich die in der dritten und vierten Spalte der Tabelle enthaltenen Zahlen unter der Annahme, dass die gesammte Länge der Leitung von z bis e_2 in soviel Viertelwellen zerfällt, wie die zweite Spalte angibt. Es zeigt sich, dass diese Spalte sämmtliche ungerade Zahlen von 5 bis 23 enthält; 3 war die kleinste mögliche Zahl. — der ihr entsprechende Schwingungszustand ist unter Nr. 3 und 6

1) Rubens, l. c. p. 161. 1891.

(9 und 15 Viertelwellen) mitenthalten, in Nr. 9 (21 Viertelwellen) ist gerade dieser sonst besonders scharf hervortretende Bauch übersehen worden.

Die Mehrzahl der in der Tabelle verzeichneten Schwingungszustände wurden aufgefunden, indem ich die Brücke B von e_1 bis z wandern liess, ohne vorher irgendwelche Rechnung angestellt zu haben. Die vier, in der Tabelle durch Sternchen gekennzeichneten, ergaben sich beim nachträglichen Aufsuchen ohne Mühe. Erwähnenswerth ist noch, dass bei Nr. 1 bis 3 die Brücke B auf allen der Schwingung entsprechenden Knoten ausserhalb des Rohres liegen durfte, während die höheren Theilungen nur durch Auflegen auf den letzten bei z befindlichen Knoten erhalten wurden.

7. Die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werthen ist eine leidliche. Bei den unter Nr. 8—10 angeführten Beobachtungen lag die Brücke B innerhalb eines Centimeters von den Platten z entfernt. Schon dieser Umstand weist darauf hin, dass den Platten z nicht für alle Schwingungszustände die gleiche Länge substituirt werden darf, wie es bei unserer Rechnung geschehen; in den Abweichungen zwischen Beobachtung und Berechnung der Lage von B zeigt die Tabelle denn auch einen ausgesprochenen Gang von positiven zu negativen Werthen. Die Differenz zwischen der beobachteten und berechneten Lage der Bäuche ist in einzelnen Fällen grösser, als erwartet werden durfte; die Erklärung scheint darin zu liegen, dass bei den Stellungen der Brücke B in unmittelbarer Nähe der Endplatten z gewisse Combinationen auftreten. So liegen die unter Nr. 7 gegebenen Beobachtungen ziemlich genau zwischen den für Nr. 6 und 7 berechneten Zahlen. Bis auf Nr. 7 stimmen auch die in der vorletzten Spalte der Tabelle angegebenen Abstände der sichtbaren Bäuche mit den in der letzten Spalte enthaltenen berechneten halben Wellenlängen recht gut überein.

8. Ich bemerkte oben (§ 7), dass den Endplatten z nicht für alle Schwingungszustände eine gleiche Drahtlänge substituirt werden dürfe. Der Beweis für diese Behauptung lässt sich in sehr augenfälliger Weise mit dem beschriebenen Rohr führen. Zu diesem Zweck stelle ich wieder eine Drahtleitung von ca 6 m her, bei welcher die Drähte im Glasrohr ungefähr

die Mitte der Leitung bilden. Das Ende e_1 des Rohres ist jetzt von den Endplatten zz nur noch ca 175 cm entfernt, ebensolang ist jetzt die Entfernung des Rohrendes e_2 vom Ende E der Drahtleitung. Aus dem Glasrohr ist das bei der vorigen Anordnung benutzte überbrückende Drahtstück b entfernt; auch das Ende E der Drahtleitung bleibt offen. Dagegen befindet sich zunächst unmittelbar am Ende e_2 des Glasrohres, aber ausserhalb desselben eine verschiebbare Brücke β. Lassen wir nun zwischen den Endplatten z und dem ihnen zugekehrten Ende der Glasröhre e_1 die Brücke B wandern, so erhalten wir wieder bei gewissen Stellungen dieser Brücke Schwingungserscheinungen, die je nachdem 1, 2, 3 oder 4 Bäuche im Rohr sichtbar werden lassen. Legen wir jetzt die Brücke B fest und bewegen die andere β vom Ende e_2 des Glasrohres gegen das Ende der ganzen Leitung E hin, so erlöschen die Schwingungen nicht sofort, sondern die Bäuche im Glasrohr folgen der Bewegung der Brücke, — wir erhalten längere Wellen in dem Theil der Leitung zwischen den beiden Brücken B und β. Ist die Brücke B von den Endplatten z noch erheblich entfernt, so ist die Verschiebung der Brücke β bis zum Erlöschen der Schwingungen sehr klein; befindet sich dagegen B sehr nahe an den Endplatten, deren Wirkung nun gegen diejenige der kurzen Drahtstrecke erheblich wird, so kann die zweite unter Umständen bis an das Ende der Leitung, also um $1^3/_4$ m verschoben werden, ohne dass die Schwingungen aussetzen. Die Bäuche folgen im allgemeinen der Bewegung der Brücke; einer nach dem andern tritt aus dem einen Ende der Röhre aus, andere treten an der entgegengesetzten Seite ein. Da der Abstand unter ihnen gleich bleiben muss, wandern die der zweiten Brücke zugekehrten Bäuche schneller als die entfernteren. Ich erhielt z. B. folgende Ergebnisse:

Nr.	Entfernung der ersten Brücke von der Endplatte in cm	Zahl der sichtbaren Bäuche	Verschiebung der zweiten Brücke bis zum Erlöschen in cm
1	105	1	Unmerklich
2	42	1	13
3	19	2	18
4	10	3	41
5	4	3	94
6	< 0,5	4	mehr als 175

9. Bei den Versuchen unter 5 und 6 betrug die Verschiebung mehr als die zuerst beobachtete Entfernung zweier Bäuche; hierbei findet keine regelmässige Bewegung der Bäuche in gleichem Sinne statt; sie scheinen an gewissen Stellen zurückzuspringen, um dann von neuem die Wanderung im ersten Sinne aufzunehmen. Ein solches Zurückgehen der Bäuche muss jedesmal eintreten, wenn sich die zweite Brücke einer Stelle nähert, welche einem Knoten für den zuerst eingestellten Schwingungszustand entspricht. Demgemäss stimmt auch nur für die im oberen Theil der Tabelle angeführten Versuche die Aenderung der Wellenlänge mit den Verschiebungen der zweiten Brücke überein. Im Versuch Nr. 4 betrug die Verschiebung fast ein Viertel der ursprünglich eingestellten Wellenlänge (die Hälfte des zuerst abgelesenen Abstandes zweier Bäuche). Das Stück der Leitung von den Endplatten bis zur ersten Brücke konnte in diesem Falle Wellen erregen, deren halbe Länge von 96 bis 106 cm variirte.

10. Bei den zuletzt beschriebenen Versuchen war ich über die mit der Wasserstrahlpumpe zu erhaltenden Luftverdünnungen im Glasrohr hinausgegangen. Mit Hülfe einer selbstthätigen Raps'schen Pumpe,[1]) die wegen des grossen zu evacuirenden Volumens viele Stunden hindurch arbeitete und vorzügliche Dienste leistete, trieb ich die Verdünnung bis auf Bruchtheile eines Millimeters Quecksilberdruck. Mit der Verdünnung ändert sich das Aussehen der Entladungen erheblich; doch eignen sich für Anstellung der Versuche zu hohe Verdünnungen nicht; die Erscheinungen werden nicht stationär; durch langsames Einlassen von Luft gelingt es einen möglichst günstigen Druck herzustellen. Derselbe liegt, wie es scheint, nicht wesentlich unter dem mit einer guten Wasserstrahlpumpe zu erreichenden. Dieser Umstand ermöglicht es, die beschriebenen Versuche, welche ich durchaus nur als Demonstrationsversuche betrachtet wissen möchte, mit einfachen Mitteln zur Darstellung zu bringen.

Berlin, Phys. Inst. d. Univ. 1892.

---

1) Raps, Wied. Ann. **42.** p. 629. 1891.

IX. *Ueber den Einfluss der Compressionswärme auf die Bestimmungen der Compressibilität von Flüssigkeiten; von W. C. Röntgen.*

Es ist bekannt, dass die Compression einer Flüssigkeit im allgemeinen von einer Wärmeentwickelung begleitet ist. Geschieht die Compression auf adiabatischem Wege, so besteht die Gleichung[1]):

$$\frac{d_s T}{d q} = \frac{T}{C_p} \frac{d_p v}{d T},$$

aus welcher man die durch eine Druckzunahme von einer Atmosphäre erzeugte Temperaturänderung berechnen kann, wenn der Ausdehnungscoëfficient, die specifische Wärme und die Dichte der Flüssigkeit bei der betreffenden Temperatur bekannt sind.

Eine Nichtberücksichtigung dieser Compressionswärme bei der Bestimmung der Compressibilität von Flüssigkeiten nach der Canton-Oersted'schen Methode kann zur Folge haben, dass das Resultat dieser Bestimmung in hohem Maasse fehlerhaft ist, wie sich am einfachsten an dem folgenden Fall zeigen lässt. Nehmen wir an, dass bei einem Compressionsversuche der Druck der Flüssigkeit so rasch vermindert wird, dass während der dazu nöthigen Zeit der Flüssigkeit keine merkliche Quantität Wärme zugeführt werden kann. Berechnet man dann aus dem vor und sofort nach der Druckänderung beobachteten Volumen der Flüssigkeit die Compressibilität, so erhält man um den folgenden Betrag zu kleine Werthe:

bei	Schwefelkohlenstoff	(20°)	um	rund	**50**	Proc.
„	Benzol	(20°)	„	„	**40**	„
„	Aethyläther	(20°)	„	„	**30**	„
„	Aethylalcohol	(20°)	„	„	**18**	„
„	Wasser	(20°)	„	„	**1**	„

Man ersieht aus diesen Zahlen, dass die Fehler, welche aus einer nicht genügenden Berücksichtigung der Compressionswärme erwachsen können, sich bei den verschiedenen Flüssig-

1) Clausius, Mechan. Wärmetheorie. 2. Aufl. 1. p. 196.

keiten in sehr verschiedenem Maasse geltend machen, und ich bezweifle nicht, dass in dieser Thatsache der Hauptgrund zu suchen ist, weshalb verschiedene Beobachter für die Compressibilität des Wassers fast immer relativ gut übereinstimmende, für die Compressibilität der übrigen Flüssigkeiten dagegen mitunter sehr voneinander abweichende Werthe gefunden haben.[1])

Um von dieser Fehlerquelle frei zu werden, scheint es mir zwei Wege zu geben. Entweder man wartet mit der Bestimmung des Volumens, bis die durch die Druckänderung entstandene Temperaturverschiedenheit sich bis auf einen kleinen, experimentell zu bestimmenden Bruchtheil ausgeglichen hat, oder man sucht den oben als Beispiel behandelten Fall so gut wie möglich zu verwirklichen und fügt zu der beobachteten Volumenänderung die mit Hülfe der obigen Formel berechnete, durch die Compressionswärme verursachte Aenderung hinzu. — Ich habe mich seinerzeit aus verschiedenen Gründen für den ersten Weg entschieden. Um das Ziel auf dem zweiten Wege zu erreichen, dürfte das bereits vor ca. 130 Jahren von Canton angewendete Verfahren zu empfehlen sein: man bringt das aus einer möglichst grossen Kugel mit angeschmolzener Capillare bestehende Piëzometer thermisch möglichst isolirt unter den Recipienten einer Luftpumpe und erzeugt die nöthigen Druckänderungen durch rasches Einlassen von Luft in den vorher evacuirten Recipienten; der Stand der Flüssigkeit in der Capillare ist dann möglichst kurz vor, resp. nach der Druckänderung zu beobachten, und man hat zu der beobachteten Volumenänderung die berechnete, von der Compressionswärme herrührende Volumenänderung, noch hinzuzufügen.

Dass beide Wege so ziemlich zu demselben Resultate führen, hat Hr. Drecker in einer im Wüllner'schen Laboratorium ausgeführten Arbeit gezeigt.[2])

Das beschriebene Canton'sche Verfahren mit der Abänderung, dass die Piëzometergefässe in mit Wasser gefüllten Blechbechern standen, wurde von Hrn. Quincke angewendet.[3]) Ob aber Hr. Quincke die Compressionswärme in genügendem

1) Vgl. Quincke, Wied. Ann. **44.** p. 776. 1891.
2) Drecker, Wied. Ann. **20.** p. 870. 1883.
3) Quincke, Wied. Ann. **19.** p. 401. 1883.

Maasse berücksichtigt hat, geht nicht mit Sicherheit aus seiner Mittheilung hervor. An keiner Stelle des ersten Theiles derselben, „Ueber die Comprimirbarkeit von Flüssigkeiten durch hydrostatischen Druck", ist davon die Rede, und nur in dem zweiten Theil, „Ueber die Aenderung der Brechungsexponenten von Flüssigkeiten durch hydrostatischen Druck", finde ich die darauf bezügliche Bemerkung (l. c. p. 419): „Würde man mit dem Interferenzapparat statt der Flüssigkeit Gase untersuchen, so würde bei der Vermehrung des Druckes die Luft in der Glasröhre sich erwärmen und erst allmählich die Temperatur der Umgebung annehmen. Man würde also zuerst eine starke plötzliche Verschiebung der Interferenzstreifen und dann eine kleinere langsamere Verschiebung in demselben Sinne, von der Abkühlung des Gases herrührend, beobachten. — Bei den Flüssigkeiten war eine ähnliche Erscheinung zu erwarten. Ich habe sie aber in merklicher Weise nur bei Terpentinöl, Alkohol und Benzol wahrnehmen können, wo sie 2 bis 3 Proc. der ganzen Verschiebung beträgt, die nach dem Erkalten vorhanden ist. . . —"

Es ist aber bemerkenswerth, dass eine Vermehrung der Quincke'schen Werthe der Compressibilität von Schwefelkohlenstoff, Benzol, Aethyläther und Aethylalkohol um die oben mit Hülfe der Thomson'schen Formel berechneten Procente zu Resultaten führt, welche nur wenig grösser sind als die von mir gefundenen, und ich vermuthe deshalb, dass Hr. Quincke es unterlassen hat, eine Correction für die Compressionswärme anzubringen.[1]

Ausser von den genannten fünf hat Hr. Quincke noch von sechs anderen Flüssigkeiten die Compressibilität untersucht. Die in Gemeinschaft mit Hrn. Schneider, sowie von mir allein angestellten Beobachtungen erstrecken sich auf ca. 100 verschiedene Substanzen; darunter befinden sich aber nicht die sechs übrigen Flüssigkeiten des Hrn. Quincke, sodass ein weiterer Vergleich unserer beiderseitigen Resultate nicht möglich ist.

---

1) Der von Hrn. Quincke aus seinen Beobachtungen abgeleitete Werth für die Compressibilität des Aethylalkohols bei 20° ist wohl infolge eines Rechenfehlers zu gross angesehen. Aus den beiden bei 0°, bez. 17,51° direct gefundenen Werthen (l. c. p. 409) erhält man nach der Vorschrift des Hrn. Verfassers den Werth $97{,}80 \,.\, 10^{-6}$ bei 20° und nicht $101{,}25 \,.\, 10^{-6}$.

In einer kürzlich von Hrn. Quincke veröffentlichten Notiz[1]), „Ueber die Beziehungen zwischen Compressibilität und Brechungsexponenten von Flüssigkeiten", äussert der Hr. Verfasser bezüglich der Zulässigkeit des von mir aus meinen und Zehnder's Versuchen gezogenen Schlusses, „dass die Formel $(n-1)/\sigma =$ const., die durch Druck erzeugte Aenderung des Brechungsexponenten der untersuchten Flüssigkeiten nicht mit einer innerhalb der Fehlergrenze der Versuche liegenden Genauigkeit darstellt", ein Bedenken. Es erscheint dem Hrn. Verfasser nicht „ohne weiteres zulässig", die beiden Zustände, in welchen sich unsere Flüssigkeiten bei der Bestimmung der Compressibilität einerseits und zweitens bei den Versuchen mit dem Interferentialrefractor befanden, miteinander zu vergleichen. Die Flüssigkeiten seien in beiden Fällen nicht unter ähnlichen Bedingungen comprimirt, erstens weil bei den Compressionsversuchen die Volumenänderung 15 Minuten, bei den optischen Versuchen dagegen die Streifenverschiebung kürzere Zeit, ca. 8 Minuten, nach der Druckänderung bestimmt wurde, und zweitens weil bei den ersteren Versuchen die Druckänderung 8 Atm., bei den letzteren „rund 0,2 bis 0,4 Atm." betrug.

Was zunächst den zweiten Punkt anbetrifft, so beruht die Angabe des Hrn. Quincke, dass die Druckänderung bei den Streifenverschiebungen „rund 0,2 bis 0,4 Atm." betrug, auf einem Missverständniss. Der Druck änderte sich bei allen Flüssigkeiten in Wirklichkeit von ca. 1 Atm. auf ca. 3 Atm., bei einigen Versuchen, z. B. mit Schwefelkohlenstoff, wenn man die allerersten mit berücksichtigt, um noch mehr. Die Druckänderung geschah aber stufenweise[2]) und die in den Tabellen enthaltenen Werthe von p geben nicht die Gesammtänderung des Druckes, sondern die Grösse dieser Stufen an. Das Druckgebiet der optischen Versuche liegt somit demjenigen der Compressionsversuche viel näher, als man nach der Quincke'schen Angabe glauben würde. Ausserdem aber haben wir in unserer Arbeit besonders nachgewiesen (l. c. p. 43 ff.), dass der Einfluss des Druckes auf den Brechungsexponnenten unserer Flüssigkeiten innerhalb des gewählten Druckintervalles als

---

1) Quincke, Wied. Ann. **44.** p. 774. 1891.

2) Röntgen u. Zehnder, Wied. Ann. **44.** p. 29. 1891.

vollständig constant zu betrachten ist. — Bei den Compressionsversuchen wurden die Flüssigkeiten meistens bis auf 8 Atm. comprimirt, aber bei jeder Versuchsreihe wurde mindestens einmal auch ein geringerer Druck angewendet, speciell deshalb, um sich zu überzeugen, dass keine Luft- oder Dampfbläschen im Piezometer vorhanden waren.[1]) Bei keinem solchen Versuch habe ich gefunden, dass die Compressibilität der untersuchten Flüssigkeiten innerhalb der erwähnten Druckgrenze $-n$ einen merklich anderen Werth hatte für grössere als für geringere Drucke. Dieses Resultat wurde in der betreffenden Abhandlung nicht besonders mitgetheilt, weil bereits Amagat, der dieser Frage ebenfalls eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet hat, zu demselben Ergebniss gelangt war.[2]) Eine merkliche Verschiedenheit nenne ich übrigens eine Differenz, welche die von mir festgesetzte Fehlergrenze meiner Versuche (0,5 Proc.) erreicht, und eine solche findet man, wie Amagat zeigte, bei Aethyläther z. B., erst bei höherer Temperatur und bei weit höheren Drucken, als ich sie verwendete.

Bezüglich des ersten Punktes des Quincke'schen Einwandes habe ich zu erwähnen, dass die optischen Versuche dasselbe Resultat gegeben hätten, wenn wir statt 8 Minuten 15 Minuten gewartet hätten. Vorversuche mit Wasser, Schwefelkohlenstoff und Benzol hatten uns gezeigt, dass 8 Minuten genügen, um die Compressionswärme verschwinden zu lassen, und dass ein längeres Warten gar keine weitere Streifenverschiebung zur Folge hat. Dass wir das Zeitintervall bei den definitiven Versuchen soviel wie möglich abkürzten, wird in Anbetracht der Anzahl von Versuchen (ohne die Vorversuche ca. 900) begreiflich sein. Auch wäre wohl als die einzig denkbare Ursache, welche nach dem Verschwinden der Compressionswärme noch eine weitere Streifenverschiebung hätte erzeugen können, nur eine elastische Nachwirkung der Flüssigkeit anzugeben; und dass eine solche in nachweisbarer Grösse nicht existirte, kann ich auf das Bestimmteste versichern, denn nach dieser Erscheinung habe ich nicht nur bei dieser Gelegenheit

---

1) Vgl. u. a. Wied. Ann. **29.** p. 182; **33.** p. 651; **34.** p. 535.

2) Amagat, Ann. d. ch. et d. ph. (5). **11.** p. 542. 1877. Compt. rend. **103.** p. 429. 1886.

sondern seit vielen Jahren[1]) fleissig bei flüssigen Körpern gesucht, aber stets mit negativem Resultat.

Nach dieser Auseinandersetzung der thatsächlich bestehenden Verhältnisse wird man wohl zugeben müssen, dass die Zulässigkeit des oben erwähnten Schlusses nicht mehr auf Grund der Verschiedenheit der von uns gewählten Druckgebiete und der benutzten Zeitintervalle zwischen je zwei aufeinander folgenden Versuchen in Frage gestellt werden kann.

Wie oben erwähnt, haben wir bei Vorversuchen gefunden, dass ein Zeitintervall von 8 Minuten zwischen zwei aufeinander folgenden Versuchen genügte, um bei den Bestimmungen der Aenderung des Brechungsexponenten von Flüssigkeiten durch Druck von dem Fehler der Compressionswärme frei zu werden. Da diese Vorversuche in der betreffenden Abhandlung nicht mitgetheilt wurden, möchte ich an der Hand des darin enthaltenen Beobachtungsmaterials den Beweis liefern, dass unsere Resultate von jenem Fehler in der That so gut wie frei sind.

Angenommen, die Compressionswärme wäre nicht bis auf einen zu vernachlässigenden Bruchtheil verschwunden gewesen im Augenblick, wo nach vorgenommener Druckänderung die definitive Einstellung des Fadenkreuzes auf den betreffenden Interferenzstreifen geschah, so musste der daraus hervorgehende Fehler mindestens in doppelter Grösse aufgetreten sein bei jenen Druckmessungen, welche solchen Versuchen in einer Versuchsreihe entsprechen, die unmittelbar folgten, nachdem in den Röhren ein Druckmaximum oder Minimum (vgl. l. c. p. 29) erreicht war. Denn bei einem derartigen Versuch wäre infolge der Compressionswärme in der Röhre, in welcher soeben z. B. ein Druckmaximum herrschte, die Temperatur vor der jetzt stattfindenden Druckverminderung zu hoch und nach dieser Druckänderung zu tief gewesen; während bei den anderen Versuchen die Temperaturen am Anfang und am Ende des Versuches entweder beide zu hoch oder beide zu niedrig gewesen wären. Die Folge dieses vermehrten Einflusses der Compressionswärme wäre nun die, dass die Druckänderungen, welche bei den genannten Versuchen nöthig waren,

1) Meine ersten Versuche darüber datiren aus dem Jahre 1873.

um eine bestimmte Streifenverschiebung zu erreichen, grösser sein müssten, als die übrigen.

Sehen wir nun nach, ob und eventuell in welchem Maasse dies der Fall ist.

Bei einigen Flüssigkeiten besteht eine Versuchsreihe aus 16, bei anderen aus 12 Versuchen; bei den ersteren sind es die 5. und 13., bei den zweiten die 4. und 10. Werthe von *p* in den Tabellen I bis IV (l. c. p. 32 ff.), welche grösser sein müssten, als die übrigen. Ein Blick auf diese Tabellen lehrt aber, dass der gesuchte Unterschied, wenn überhaupt vorhanden, jedenfalls sehr klein ist.

Wenden wir somit eine schärfere Probe an und bilden dazu beispielsweise von der Tabelle I für Schwefelkohlenstoff die Summe der dreissig Werthe aus der 5. und 13. Horizontalreihe von der Rubrik für *p* und ebenfalls die Summe aller übrigen Werthe von *p*. Berechnen wir dann das arithmetische Mittel aus jeder Summe, so finden wir, dass das erstere um 0,06 cm grösser ist, als das zweite. Aehnliches erhalten wir aus den übrigen Tabellen, sodass das erhaltene Resultat kein zufälliges ist.

Diese Differenz rührt also unzweifelhaft von der nicht vollständig verschwundenen Compressionswärme her; der Fehler ist zwar im Vergleich zu dem Mittelwerth aller *p* (37,78 cm) klein und überschreitet nicht die Grenzen der zufälligen Beobachtungsfehler, er ist aber nicht verschwindend klein. Nun lässt sich aber in folgender Weise zeigen, dass nur die Werthe der 5. und 13. Reihe mit diesem Fehler behaftet, und dass die übrigen alle davon frei sind. Hätte die Druckänderung um 37,78 cm auf adiabatischem Wege stattgefunden, so würde die Compressionswärme die Temperatur des Schwefelkohlenstoffes um 0,013° geändert haben.[1]) Eine Druckänderung um 0,06 cm erzeugt, wie die Rechnung ergibt, dieselbe Streifenverschiebung wie eine Temperaturänderung um 0,00006°; folglich ist im Augenblick der definitiven Einstellung des Fadenkreuzes auf die Streifen höchstens noch der $^1/_{200}$ Theil (nach der folgenden Auseinandersetzung nur noch der $^1/_{400}$ Theil)

1) Ich denke mir die Druckänderung der Einfachheit halber nur in einer Röhre erzeugt; in Wirklichkeit vertheilt sie sich auf zwei Röhren.

der ganzen Compressionswärme in der Flüssigkeit vorhanden. In diesem Fall, wo also am Ende eines Versuches von der Compressionswärme nur noch ein sehr kleiner Bruchtheil übrig ist, wird bei jedem Versuch, bei welchem der Druck in der Röhre in demselben Sinn und in demselben Betrag geändert wurde, wie beim vorhergehenden, die Endtemperatur der Flüssigkeit von der Anfangstemperatur infolge der Compressionswärme nicht merklich verschieden sein; und dann fällt der Fehler der Compressionswärme vollständig weg. Diese Bedingung ist aber bei allen Versuchen (auch beim ersten jeder Reihe wurde dafür gesorgt) erfüllt mit Ausnahme von den genannten Versuchen der 5. und 13. Reihe.

Den versprochenen Beweis für die Behauptung, dass das Endresultat, der Mittelwerth jeder Versuchsreihe, als frei von dem Fehler der Compressionswärme zu betrachten ist, haben wir somit erbracht.[1])

Die einer Differenz von 0,013° zwischen den Temperaturen der beiden Röhren entsprechende Streifenverschiebung beträgt bei Schwefelkohlenstoff ca. 7 Streifen, die aber nicht alle zur Beobachtung kamen, da die Druckänderung niemals so rasch ausgeführt wurde, dass der Einfluss der ganzen Compressionswärme sich bemerkbar machen konnte. — Beachtet man, dass die oben gefundene Differenz von 0,06 cm ca. $^1/_{30}$ Streifen entspricht, dass diese Differenz sich auf 2 Röhren vertheilt, und dass zur Messung jeder Druckdifferenz acht verschiedene Quecksilberstände und vier verschiedene Wasserstände abgelesen werden mussten, so gewinnt man, wie ich glaube, ein günstiges Urtheil über die Zuverlässigkeit der angewendeten Methode und Apparate, aber auch, wie ich nicht unterlassen möchte zu erwähnen, über die Geschicklichkeit und Zuverlässigkeit des Beobachters, meines früheren Assistenten Hrn. Dr. Zehnder.

Würzburg, Physik. Institut, Januar 1892.

1) Die Berücksichtigung des kleinen Fehlers, mit welchen zwei Werthe jeder Reihe behaftet sind, vermindert den Mittelwerth jeder Reihe für Schwefelkohlenstoff um ca. 0,008; dieser Werth liegt überall innerhalb der Grenzen der mittleren Fehler der Resultate.

X. *Ueber die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in membranösen Körpern; von F. Melde.*

(Hierzu Taf. VII Fig. 5—14.)

1. Die Schwingungen der Membranen bieten noch nach verschiedenen Richtungen hinreichendes Interesse, um sich mit ihnen immer wieder von Neuem zu beschäftigen, doch erfährt man bei dieser Beschäftigung auch heute noch, dass man sich mehrfach Schwierigkeiten gegenüber befindet, deren Beseitigung vorerst noch unmöglich ist. Insbesondere sind es die *Longitudionalschwingungen* dieser Körper, welche bisher in keineswegs befriedigender Weise verfolgt worden sind und habe ich diese Thatsache auch schon in meiner Akustik hervorgehoben.[1]) Auch eine neueste Arbeit von Antolik: „Ueber Klangfiguren, die auf gespannten Membranen und auf Glasplatten mittelst Tonübertragung hervorgerufen werden“[2]), sowie im Auszug aus dieser Arbeit, „Physikalische Schulversuche“, III. Abtheilung: „Schwingungen von Membranen“[3]) dürften den Gegenstand kaum wesentlich gefördert haben. Im allgemeinen sind die Methoden, welche Antolik zur Hervorbringung von Trasversal- bez. Longitudinalschwingungen beschreibt und anwendet, schon von Savart gehandhabt worden.[4]) Vor allem kann hierbei hervorgehoben werden, dass, wenn bei diesen Tonerregungsmethoden der Rahmen die Angriffsstelle bietet, auch dieser es ist, der seiner Masse nach in den meisten Fällen das bestimmende Element wird, an der sich sodann die Membran anzuschliessen versucht und nach dessen Schwingungen sich sehr wesentlich die Schwingungsformen der Membran richten.

1) Akustik p. 133.

2) Antolik, Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn. **8.** p. 285—325. 1890.

3) Antolik, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht. 4. Jahrgang p. 239—248.

4) Savart, Ann. de Chim et de Phys. 1824. **24.** p. 56—89; **25.** p. 12—50, 138—178, 225—269; sowie in dem von W. Weber gegebenen Auszuge im Journ. f. Chem. u. Phys. v. Schweigger. **14.** Jahrg. 1825 p. 385—428.

Man hat es eben dann zu thun mit „verbundenen Systemen", von denen der eine Körper auf den anderen einwirkt und von denen der eine, wenn er an Masse sehr bedeutend den anderen übertrifft, auch das hervorrufen kann, was man vielfach als „erzwungene" Schwingungen zu bezeichnen pflegt, eine Bezeichnung, die ich meinerseits für eine besonders passende und zutreffende nicht zu halten vermag. Ferner muss man sich bei den Membranen, wie auch sonst, hüten, Transversalschwingungen zu verkennen und anzunehmen, man hätte es statt ihrer mit Longitudinalschwingungen zu thun. Kittet man z. B. auf den Rahmen einer Membran, wie es Antolik thut, einen Korkstopfen und streicht diesen mit einer nassen Glasröhre an, so hat man es der Hauptsache nach nicht mit Longitudinal-, sondern lediglich mit Transversalschwingungen zu thun. Der Rahmen zeigt *beim Aufstreuen des Sandes auch auf ihn* die *ihm* zukommenden Transversalfiguren, und an ihn schliesst sich, sich nach ihm richtend, die Membran mit ihren Transversalschwingungen an. Man kann sich hiervon auch namentlich überzeugen, wenn man diese Methode, von der ich glaube, dass sie Hr. Antolik zuerst bekannt gemacht hat und welche viele sehr brauchbare Anwendungen, bei Chladnischen Klangscheiben, Glocken, geraden und krummen Stäben, finden kann, gerade einmal bei einer ebenen Klangscheibe zur Anwendung bringt. In diesem Falle geschieht das, was ich durch die Fig. 5 versinnlichen möchte. In ihr bedeutet AB eine Klangscheibe, auf welche rechts der durch den verticalen dicken Strich markirte Kork k senkrecht aufgekittet ist. Sobald nun die Glasröhre gg den Kork anstreicht, geräth dieser nicht nur in eine Schwingung, bei welcher er sich zwischen dem Grenzlagen a und a' hin- und herbewegt, sondern durch seine Verbindung mit AB geräth auch die Scheibe in eine Transversalbewegung, bei welcher etwa durch n eine Knotenlinie läuft, sodass das nächste Schwingungsfeld der Scheibe, worauf der Kork steht, auch auf- und niederschwingt, d. h. durch das Streichen des Korks mit der nassen Glasröhre geräth der Kork und die Scheibe in eine isochrone Transversalschwingung. Der Kork macht also eine doppelte Bewegung, nämlich eine Transversalbewegung um seine Ruhelage k, die er allein machen würde, wenn seine Basis unveränderlich fest bleiben

könnte, und was sich leicht erreichen lässt, wenn man den Kork auf eine unerschütterliche Unterlage, z. B. einen Stein aufkittet und anstreicht, wobei dann der Kork seinen Transversalgrundton, eventuell auch einen seiner Transversalobertöne hören lässt; sodann aber betheiligt sich der Kork gleichzeitig auch bei der Transversalbewegung der Scheibe an einer zwischen den Grenzbogen $b\,b'$ auf- und niedergehenden Bewegung. Man hat es also auch hier wieder mit einem verbundenen System zu thun: Kork und Scheibe sind eins, sie liefern zusammen eine resultirende Bewegung. Stimmt der Transversalton des Korkes genau mit einem Oberton der Scheibe überein, so wird die Scheibe sofort diesen Ton hören lassen; ist dies nicht der Fall, so wird eine gegenseitige Beeinflussung eintreten, bei welcher schliesslich, da der Kork der Scheibe gegenüber nur eine geringe Masse besitzt, die Scheibe das Dominirende bildet, und zwar mit derjenigen Schwingungsart, welche sie am nächsten mit der Grundschwingung des Korkes in Bereitschaft hat. Ich will mit dieser Auffassung durchaus nicht bestreiten, dass vielleicht auch Longitudinalstösse in der Ebene der Scheibe sich fortpflanzen können, aber, wenn diese auch zugegeben werden, so sind die Transversalbewegungen doch die bei weitem heftigsten und die Klangfiguren allein bestimmenden. An diesem Sachverhalt wird auch nichts geändert, wenn die Schwingungen sehr hoch, ja wenn sie so hoch werden, dass man keinen Ton mehr hört und die Klangfiguren aus sehr vielen Knotenlinien bestehen, die wegen ihres sehr nahen Zusammenwirkens vermuthen lassen, man hätte es nur mit longitudinalen Schwingungen zu thun. Auch hier hat bereits Savart darauf aufmerksam gemacht, dass bei derartigen Tonübertragungen *unhörbare* Schwingungen ihre Klangfiguren liefern können.

2. Es liegt für jetzt durchaus nicht in meiner Absicht, näher auf Membranschwingungen einzugehen und habe ich im vorausgehenden nur andeuten wollen, dass man vorsichtig sein muss in der Beurtheilung davon, ob man es mit Transversal- oder mit Longitudinalschwingungen zu thun habe. Bei sehr hohen Obertönen entscheidet hierbei auch meines Erachtens keineswegs die Bewegung des Sandes oder Pulvers, welches aufgestreut wird, denn bei solchen *Transversal*obertönen sind die

Excursionen der Membranen und Scheiben so gering, dass der Sand sich zu verschieben scheint, wo er doch nur sich in mikroskopisch feiner hüpfender Bewegung befindet.

Bevor nun bei solchen Schwingungen von Membranen eine wirkliche Entscheidung getroffen werden kann, schien es mir nothwendig, eine Frage ihrer Lösung entgegenzuführen, nämlich die: *Wie sieht es mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in membranösen Körpern aus?* Diese Frage ist bis jetzt meines Erachtens noch nicht zu lösen versucht worden. Hr. Antolik ist mit ihr bei seinen Versuchen in Verbindung gekommen, aber ein brauchbares Resultat ist hierbei nicht erzielt worden. Bei einem Versuch mit einer Membran von schwarzem Satiné-Papier — ich verstehe darunter mit Antolik gewöhnliches schwarzes Buntpapier, wie man es überall findet, auf einer Seite schwarz und glatt — und in Verbindung hiermit, auch mit einer kreisrunden Glasscheibe[1]), lässt er die Schwingungen einer Stimmgabel auf die Mitte der Scheibe, bez. die Membran, und zwar durch den Stiel der Gabel, welche senkrecht aufgesetzt wurde, übertragen. Ich kann unmöglich annehmen, dass hierbei Longitudinalschwingungen der Scheibe oder der Membran herauskommen. Der die Schwingungen der letzteren hervorrufende Oberton der Gabel wird mit Wahrscheinlichkeit als c^5 angenommen, während der Grundton der Gabel ein a mit 218 Schwingungen lieferte. Die von Antolik gemessene Wellenlänge der vermeintlichen Longitudinalschwingung bei der Glasscheibe war 83 mm, die bei der Papiermembran 28,5 mm. Legt man für Glas eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von rund gerechnet 5000 m zu Grunde, so würde diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Wellenlänge $\lambda = 0{,}083$ m eine Schwingungszahl

$$n = \frac{5000}{0{,}083} = 60242\, m$$

verlangen. Der mit einer *Wahrscheinlichkeit* angenommene Oberton der Gabel, das c^5, macht aber 4096 Schwingungen. Also so kann der Zusammenhang wohl nicht gewesen sein. Ferner, wenn wir einmal die Membran berücksichtigen und

---

1) Siehe aber unter 3. citirte Abhandlung p. 246 und Fig. 63.

umgekehrt aus $\lambda = 28{,}5$ mm und $n = 4096$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in ihr berechnen, so erhalten wir

$$v = 0{,}0285 \,.\, 4096 = 116{,}7 \text{ m}.$$

Ich werde hernach aber nachweisen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in solchem Papier rund gerechnet 1900 m beträgt. An einer anderen Stelle lässt Hr. Antolik einmal die Möglichkeit zu, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in diesem Papier könne gleich der in der Luft sein, und rechnet hiernach in Verbindung mit der auf der Membran angenommenen vermeintlichen Longitudinalwellenlänge gleich 8 mm einen Ton mit 55000 Schwingungen heraus. Wird dagegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in diesem Papier, wie angegeben, factisch rund gleich 1900 m gerechnet, so müsste die hiermit zu erhaltende Schwingungszahl

$$n = \frac{1900}{0{,}008} = 237500$$

werden. Man überzeugt sich, dass hier Voraussetzungen, sei es über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, sei es über die Wellenlängen, sei es über die Tonhöhen, vorliegen, welche bedenklich sind. Vor allem muss hier folgender Satz seine unumstössliche Richtigkeit behalten: Wenn wir aus der Wellenlänge λ und der Schwingungszahl n die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmen wollen, so muss erstens complete Sicherheit vorhanden sein, dass wir es in der gemessenen Grösse λ wirklich mit einer *Longitudinal*- und nicht mit einer Transversalwellenlänge zu thun haben; zweitens muss es möglich sein, die Zahl n entsprechend genau zu bestimmen. Was den ersten Punkt betrifft, so muss hervorgehoben werden, dass unter Umständen, selbst wenn der Körper heftige longitudinale Schwingungen ausführt und sich Knotenlinien in schönster Form auf ihm bilden, dennoch diese Knotenlinien von gleichzeitigen Transversalschwingungen in ihrem Abstand bestimmt werden können. Man denke nur an einen longitudinal schwingenden Stab, auf welchen Sand gestreut wird und auf dem sich vielleicht 14 Knotenlinien in fast gleichem Abstand voneinander bilden. Wenn wir diese Knoten bei der Schallgeschwindigkeitsmessung zu Grunde legen wollten, so würde dies absolut verwerflich sein, denn bekanntermaassen kann bei einem solchen

longitudinal schwingenden Stabe derjenige Transversalton, welcher mit dem Longitudinalton nahezu unisono ist, mitklingen[1]); er bestimmt der Hauptsache nach die Knoten, und deren Abstand als $\lambda/2$ bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit zu verwerthen, würde ja zu einem völlig unbrauchbaren Werthe der letzteren führen. Denn, falls der Stab longitudinal erregt wird mit einem Longitudinalknoten in der Mitte, müssen wir, wenn L die Länge des Stabes ist, $L/2$ und nicht den Abstand der Transversalknoten als halbe Longitudinalwelle rechnen. Ich mache auf diese Thatsache aufmerksam, weil es mir höchst wahrscheinlich ist, dass auch bei Membranen, falls sie wirklich in longitudinale Schwingungen versetzt werden, dennoch gleichzeitig auch in transversale gerathen können, welche letzteren dann die Hauptanordnung der Sandanhäufungen besorgen.

Was den zweiten Punkt, nämlich die Bestimmung der Schwingungszahl n betrifft, so kann diese, falls die Töne nicht zu hoch sind, mit Hülfe des Ohres ermittelt werden. Wie hierbei zu verfahren ist, wird hernach ausführlich auseinander gesetzt werden. Sind die Töne zu hoch, ja hat man es mit unhörbaren Schwingungen zu thun, so lässt sich vielleicht auch aus den Dimensionen des Körpers, welcher die Schwingungen überträgt, nach bekannten Formeln die Schwingungszahl *berechnen*. Man kann z. B., wie schon Savart es machte, einen in ein dickes Bret BB eingeschlagenen kurzen Stahlcylinder s mit dem Violinlager vv in seine transversale Grundschwingung versetzen und an ihm an seinem unteren Ende, wie es die Fig. 6 zeigt, eine Metall-Lamelle oder einen Cartonstreifen, oder wenn man will, auch einen Rahmen, der mit einer Membran überzogen und sonst auf Kautschukfüsschen ruht, anlehnen. Wäre der Cylinder z. B. 2,3 mm dick und 15 cm lang, so wäre die Schwingungszahl nach der Formel

$$n = \frac{s^2 \pi . r}{4 L^2} \sqrt{\frac{E . g}{s}}$$

zu berechnen.[2]) Man erhielt hierbei $n = 7173$, eine Zahl, die jedenfalls mit dem Ohr nicht mehr ganz sicher festgestellt werden kann.

1) Vergleiche meine Akustik p. 168 ff.

2) Vergl. meine Akustik p. 140.

Aber derartige Berechnungen nach einer Formel stimmen, wie ein einfacher Versuch zeigen wird, vielleicht sehr wenig mit der Erfahrung überein. Denn wenn der kurze Metallcylinder z. B. in ein Holzbret, eine Holzlatte, eingeschlagen wird, so schwingt ein guter Theil des Bretes oder der Latte mit, oder vielmehr das ganze Bret und die ganze Latte betheiligt sich an den Schwingungen des Metallcylinders und kann es kommen, dass der Ton, den man beim Anstreichen des Cylinders wirklich erhält, sehr wesentlich tiefer ist wie der berechnete Ton. So fand ich z. B., dass ein Stahlcylinder von 2,3 mm Durchmesser, der in eine 20 cm lange, 3 cm breite und 2 cm dicke Holzlatte nahe am einen Ende soweit eingeschlagen war, dass er ganz durch die Latte durch ging und nur noch mit einem 26 mm langen Stück frei herausragte, wenn dies dann mit dem Violinbogen angestrichen wurde, beim Vergleich des Tones mit dem Sonometer ein $n = 1776$ Schwingungen ergab, während das berechnete $n = 2298$ war. Als ich denselben Stahlcylinder aus der Latte heraus brachte und in einem schweren Metallschraubstock befestigte, war das mit dem Sonometer festgestellte $n = 2000$. Man erkennt hieraus, dass die theoretische Berechnung der Schwingungszahlen von solchen kurzen Metallcylindern mit einem festen und einem freien Ende kaum brauchbare Resultate liefern wird.

3) Ich wende mich nunmehr zunächst zur vorläufigen Andeutung der Methode, welche ich zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in membranösen Körpern handhabte. Zu diesen Körpern sind zunächst alle Papiersorten zu rechnen; ferner Papiere, die z. B. mit einem Stoffe, Oel, Wachs u. s. w. imprägnirt sind oder die einen Ueberzug von einem Stoffe, etwa einem Farbstoffe, erhalten haben; ferner gehören hierher Schnüre, Leinwand- und Baumwollenstoffe, Seide; ferner thierische Membranen u. s. w. Solche Stoffe geben im Folgenden die tongebenden Körper ab, und zwar verwendete ich diese Körper nur in *Streifenform*. Anfangs erwartete ich nicht, dass solche Streifen in so regelmässige *Longitudinal*schwingungen versetzt werden könnten, bei der sie Longitudinaltöne lieferten, deren Schwingungszahlen sich *mit Hülfe des Ohres* feststellen liessen. Das Abschneiden von solchen Streifen, wenn sie überall gleich breit sein sollen, ist, namentlich wenn die Streifen über 1 m lang verwendet werden,

nicht immer leicht möglich und verfuhr ich hierbei meistens wie folgt. Auf einem langen dicken Bret *BB* (Fig. 7) von Lindenholz wurden mit Bleistift zwei parallele Linien *pq* und *rs* gezogen: für meine Streifen in einem Abstand von 15 mm. Sodann wurde hierauf z. B. das von einer Papierrolle zu entnehmende Papier *PP* gelegt, sodass der vordere Rand *xy* des aufgelegten Papiers etwas über *pq* hinausragte. Dann wurde ein langes Holzlineal *LL* mit seiner vorderen Kante so aufs Papier gelegt, dass diese Kante genau in der Richtnng von *pq* zu liegen kam, in welcher Lage sodann das Lineal an seinen Enden mit zwei Nägeln zugleich mit dem Papier auf dem Bret *BB* festgenagelt wurde. Alsdann erfolgte mit einem scharfen Messer der Abschnitt des Papiers längs *pq*. Dann wurden die beiden Nägel herausgezogen, das Lineal verschoben und zunächst das Papier genau wieder mit der soeben erhaltenen geradlinien Schnittlinie an *pq* angelegt und mittelst einer Anzahl Weissstifte in dieser Lage aufs Bret angeheftet, jedoch so, dass die Stifte das Papier nicht durchbohrten, sondern nur mit den Stahlspitzen anstiessen und so mit den breiteren Messingknöpfchen das Papier nur festklemmten. Dann wurde das Lineal wieder aufs Papier gelegt, und zwar nunmehr genau längs der Linie *rs*, dann wieder aufgenagelt und zuletzt mit dem Messer der zweite Schnitt längs *rs* ausgeführt. Nach Entfernung des Lineals erhält man so regelrechte Streifen. Verschmäht man es, hiernach zu verfahren, so wird mancher Streifen, falls man nicht noch eine Hülfe zum Festhalten des Lineals beansprucht, namentlich bei sehr dünnen und glatten Papieren, missrathen. Es ist ja bei Longitudinalschwingungen solcher Streifen nicht gerade nöthig, dass sie genaue Parallelabschnitte bilden, aber wenn sonst alles in möglichster Regelmässigkeit hergerichtet wird, wird man auch regelmässige Streifen verwenden wollen. Falls die Streifen nur etwa ein halbes Meter lang sind, kann man sie selbstverständlich auch mit einem gewöhnlichen Parallellineal erhalten, ohne dass eine besondere Festmachung von diesem nöthig wäre.

Es gibt Stoffe, welche nur Streifen von kürzeren Längen herzustellen gestatten, z. B. Papiere, die nur in gewöhnlicher Bogenform zu erhalten sind. Müssen nun doch längere Streifen verwendet werden, so kann man zwei kürzere Streifen an-

einander leimen. Eine kleine Unregelmässigkeit kommt hierdurch in den Streifen, doch hat dieselbe aufs Endresultat kaum einen Einfluss.

4. Zur Einspannung der betreffenden Streifen bediente ich mich einer Einrichtung, welche zunächst an der Hand der Fig. 8 erläutert werden soll. Ich möchte sie eine „akustische Bank" oder „akustische Latte" nennen. Dieselbe empfiehlt sich für eine ganze Reihe akustischer Experimente. *LL* ist eine 2,8 m lange, 8 cm breite und 3 cm dicke Latte von Birnbaumholz. Dieselbe kann mit ihren Enden auf zwei Tische, am besten Stelltische, aufgelegt und mittelst Klammern festgeschraubt werden. Längs ihrer lassen sich die Schieber *S* und *S'* verschieben, welche ebenfalls von Birnbaumholz ausgearbeitet, 16 cm hoch, 11 cm breit und 3,5 cm dick sind. Am unteren Ende haben sie je einen dem Querschnitt der Latte *LL* entsprechenden rectangulären Ausschnitt, um längs jener verschoben und mittelst der Holzschrauben *h* und *h'* in geeigneter Entfernung von einander festgestellt werden zu können. Die nähere Einrichtung der Schieber zeigt die Fig. 9a und b. Die Fig. 9a stellt zunächst die Hauptform eines Schiebers dar, welcher ausser dem schon erwähnten Ausschnitt *x* noch einen kreisrunden Ausschnitt *y* von 32 mm Durchmesser und oben einen Winkelausschnitt *z* besitzt. Der Ausschnitt *y* dient dazu, um Röhren oder Stäbe an zwei Stellen, z. B. in je einem Viertel ihrer Länge, von den Enden an gerechnet, zu befestigen, wobei sich in vorzüglicher Weise Gummistopfen verwenden lassen, die dem äusseren Caliber der Röhre oder des Stabes entsprechend durchbohrt sind. Ferner sind an jeden Schieber an den Stellen *k* und *k'* zwei Klemmen, aus Messing gearbeitet, angeschraubt, und sind dies eben die Klemmen für die Abgrenzung und Festklemmung unserer Membranstreifen. Diese Messingklemmen bestehen, wie die Fig. 9b zeigt, aus zwei Stücken *u* und *t*, nämlich einem Winkelstück *u* welches mit zwei Messingschrauben auf dem Holzschieber fest aufgeschraubt ist, und einem Klemmbacken *t*, der durch die Schrauben δ, δ' zwischen dem festsitzenden Messingtheil *u* und sich selbst den Streifen festklemmt. Der Winkelausschnitt *z* ist nun, wie die Fig. 9b zeigt, von der Mittelebene der Dickenseite des Holzschiebers

an nach beiden Seiten hin abgeschrägt, sodass dieser Winkelausschnitt eine Kante bildet, auf welche sich ebenfalls Stäbe und Röhren auflegen lassen. Sollen diese in einer ihnen ertheilten Lage festgehalten werden, so geschieht dies mittelst eines dicken Bindfadens, der durch einen Wirbel *w* angezogen werden kann. Dies wird aber dadurch ermöglicht, dass der Holzschieber nach oben bis auf die Tiefe des Winkelausschnittes *z* in seiner Mittelebene durchsägt ist. Der Bindfaden kann dann an der linken Dickenseite des Holzschiebers festgemacht, dann in den Sägeschnitt eingezogen werden, um so unter sich die Röhren festzuhalten, falls rechts der Wirbel *w* angedreht wird. Die Figur wird keinen Zweifel übrig lassen, wie die Sache gemeint ist. Wird der Winkelausschnitt *z* in in seinen zugeschrägten Kanten zu starr angesehen, so kann man durch Kautschuk- oder Filzunterlagen die Röhren oder Stäbe mit mehr Elasticität auflagern lassen. Die Auflage von Stäben und Röhren in den Winkelausschnitten *z* kommt insbesondere für Transversalschwingungen in Betracht, namentlich dann, wenn die tönenden Körper auch mal in verticaler Lage verwendet werden sollen. Die runden Ausschnitte *y* gestatten, wie man erkennt, insbesondere mit dem zweiten Longitudinal-Oberton Stäbe und Röhren zu verwenden, wobei dann die Latte *LL* (Fig. 8) ebenfalls in verticaler Lage befestigt werden muss, um longitudinale Stösse auf einer unten angebrachten Scheibe oder Membran in transversale umzusetzen, kurz man wird finden, dass eine solche Einrichtung in der Akustik mannigfache Anwendungen finden kann. Für unseren jetzigen Zweck sind die Schieber *S* und *S'* mit den Messingklemmen bei *k* und *k'* (Fig. 9b) die Hauptsache.

Dass nicht an jedem Holzschieber blos eine Messingklemme sondern derer *zwei* angebracht wurden, also im ganzen vier, hat seinen Grund darin, dass es sich im Laufe der folgenden Untersuchuug mehrfach als nothwendig erwiess, *zwei* gleichlange Streifen von verschiedenen Stoffen, neben einander mit ihren Longitudinaltönen vergleichen zu können.

5. Die ausgespannten membranösen Streifen wurden von mir zwischen dem Daumen und Zeigefinger angestrichen, nachdem diese Finger mit feingepulvertem Colophonium überzogen sind. Es zeigte sich jedoch bald, dass es misslich war, dieses

Colophonium rasch wieder von den Fingern wegzubekommen, und zog ich, um die Finger nicht mit Colophonium in Verbindung zu bringen, einen Glaçéhandschuh an. Taucht man nun den Daumen und Zeigefinger ins Colophonium, so kann man mit viel grösserer Sicherheit und Reinheit die Longitudinaltöne hervorrufen. Auch reicht dann ein einmaliges Eintauchen ins Colophonium für vielfaches Anstreichen aus. Der Handschuh ist ja in kürzester Zeit an und ausgezogen und empfiehlt sich ein solcher namentlich auch beim Longitudinalstreichen von Saiten und Metallstäben.

Die Streifen der longitudinal schwingenden Körper sind hiernach an ihren beiden Enden fest. Sollen sie ihren Longitudinalgrundton geben, so müssen sie in ihrer Mitte oder auch eine Strecke entfernt von der Mitte angestrichen werden. Kommt es vor, dass bei längerem Streifen, dem vielleicht einmal der zweite Longitudinaloberton entlockt werden soll, bei welchem sich ein Schwingungsknoten in der Mitte des Streifens zu bilden hat, so muss man den letzteren mehr nach einem der festen Enden hin anstreichen.

Es gibt auch Stoffe, die sich in der angegebenen Weise nicht in Longitudinalschwingungen versetzen lassen, z. B. Wachstuch, dessen Oberfläche zu glatt und zu fettartig ist. Ich verfahre bei diesen Körpern so, dass ich beiderseits mitten auf die Streifen zwei kleine Streifen Seidenpapier aufklebe und den Strich über diese gehen lasse. Die kleine Masse des Seidenpapiers und das Bischen Gummi übt kaum einen Einfluss auf die Tonhöhen aus. Ein ähnliches muss z. B. eintreten bei Löschpapier und Löschcarton, bei welchen Körpern, wenn man sie mit den mit Colophonium überzogenen Fingern anstreicht, Papiertheile in grösserer Menge abgerieben werden.

6. Welche Stoffe sind nun zu den Körpern zu rechnen, welche ich als *„membranöse“* bezeichne? Die Antwort ist leicht zu geben: es sind alle die Stoffe, welche gestatten, dass sie Membranen liefern können, welche sich in irgend einer Weise aufspannen lassen. Solcher Stoffe gibt es eine sehr grosse Menge, und wenn ich im folgenden Resultate über Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in solchen Medien mittheile, so leuchtet ein, dass ich mich in der Auswahl beschränken musste, dass ich aus den verschiedenen Gruppen, in welche

sich alle diese Körper bringen lassen, nur einige Repräsentanten berücksichtigen konnte. Denn in der That zählen solche Stoffe nach Hunderten.

Ich möchte nun folgende Gruppen unterscheiden:

Erste Gruppe. Sie umfasst alle Körper, welche als *Papiere* bezeichnet werden und zwar Papiere, welche nicht mit einem Stoff imprägnirt sind oder keinen Ueberzug von einem anderen Stoff erhalten haben, oder nicht in bestimmter Weise sonst, wie z. B. das Pergamentpapier behandelt worden sind. Also in diese erste Gruppe gehören alle Schreibpapiere, Zeichenpapiere, Seidenpapiere, Packpapiere u. s. w.

Zweite Gruppe. Hierher gehören Papiere, welche noch irgend eine Veränderung erlitten haben, wie z. B. gewöhnliche farbige Papiere, Pergamentpapiere, Wachspapiere, Oelpapiere u. s. w.

Dritte Gruppe. Sie enthält Körper, die als Seiden-, Leinen-, Baumwollen- und Wollenstoffe in Betracht kommen. Hier ist man bei den Experimenten leicht daran, weil diese Stoffe ja alle auch in Bandform der verschiedensten Art vorkommen.

Vierte Gruppe. Hierher rechne ich die Körper der vorausgehenden Gruppe, aber mit einer Imprägnirung, bez. einem Ueberzug. Es gehört hierher demgemäss alles was Wachstuch, Pausleinwand u. s. w. heisst.

Fünfte Gruppe. Alle Körper die als Kautschuk und Gummistoffe figuriren.

Sechste Gruppe. Sie enthält Membranstoffe, direct aus dem Pflanzenreiche entnommen, wie z. B. Baststreifen, Holzspäne u. s. w.

Siebente Gruppe. Membranöse Körper aus dem Thierreiche: Thierblasen, Darmmembranen und Felle.

Achte Gruppe. Membranöse Körper aus Metallen hergestellt. Sobald sich nämlich Metalle so dünn herstellen lassen, dass sie als Membranen verwendet werden können, werden wir Streifen hiervon mit grosser Leichtigkeit nach der oben angegebenen Methode in Longitudinalschwingungen versetzen können. Es leuchtet aber ein, dass die Stoffe der letzten Gruppe hier eigentlich nicht in Betracht gezogen zu werden brauchten, weil diese Stoffe auch in beliebigen Formen als

Saiten, Stäbe, Röhren existiren, bei welchen man ja die Schallgeschwindigkeit vielfach schon kennt. Ein gleiches wird von einzelnen Körpern der sechsten Gruppe gelten.

7. Ich wende mich nun zur näheren Auseinandersetzung der Methode der Beobachtung und Berechnung der gewonnenen Beobachtungszahlen. Die Methode besteht darin, die Schwingungszahl N eines Longitudinaltons und die hierzu gehörige Wellenlänge λ direct zu bestimmen und zwar erstere nach dem Gehör und letztere durch Messung mit einem Millimetermaassstab, demgemäss dann v aus der Gleichung

$$v = \lambda . \mathrm{N}$$

gefunden wird. Man gelangt nun hierzu durch ein gutes Gehör unter Zuhülfenahme eines Tonmessers. Als letzterer ist der Appunn'sche Tonmesser für die „kleine" Octave mit $c = 128$ bis $c^1 = 256$ Schwingungen mit je Abständen von 4 zu 4 Schwingungen bekannt. Nach diesem Apparat habe ich mir aber für die „eingestrichene" Octave einen zweiten Apparat bauen lassen und zwar von dem hier in Marburg wohnenden geschickten Instrumentenmacher Brambach. Da auch dieser Apparat Intervalle von 4 zu 4 Schwingungen haben sollte, so waren 65 Zungen nöthig, um das c^1 bis zum c^2 zu liefern und somit Schwingungszahlen von 256 bis 512 zu haben.

Die Lamellen der membranösen Körper wurden gemäss meiner Auseinandersetzung an der Hand der Figuren 8 und 9 an beiden Enden festgeklemmt, und da nur die Longitudinal-*Grundtöne* dieser Lamellen Verwendung fanden, so waren demnach je die abgegrenzten Längen:

$$L = \frac{\lambda}{2} \text{ und somit } 2L = \lambda.$$

Die Abmessung dieser Länge $\lambda / 2$ an den Messingklemmen geschah mit einem Metallbandmaass, von dessen Richtigkeit ich mich überzeugt hatte. Die Eintheilung desselben waren Millimeter und wurde $\lambda/2$ nur auf ganze Millimeter abgegrenzt verwendet.

Die Bestimmung der Schwingungszahl N des Longitudinaltons der Streifen geschah nach dem Gehör und zwar nach der Auffassung der *Octaven*-Intervalle, wie es ja allgemein geschieht, wenn man z. B. den Längenelasticitätsmodulus durch Längen-

schwingungen von Saiten oder Stäben bestimmen will. Es wurde demgemäss die Lamelle angestrichen; dann wurde am Tonmesser die Zunge gesucht, welche als eine tiefere Octave des Lamellentons am genauesten nach dem Gehör erkannt wurde. Die Nummer dieser Zunge wird im folgenden immer mit a bezeichnet werden. Dann wurde nach einer vorhandenen Tabelle, welche von 0 bis 64 gleich die zu diesen Nummern a gehörigen *Transversal*-Schwingungszahlen n der Zungen enthält, dieses n notirt. War nun vielleicht einmal n gleich N, so war sofort $\lambda . n = (v)$ die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit. So aber allermeistens n eine tiefere Octave von N und zwar die nächsttiefste, oder zweittiefste oder dritttiefste war, so musste, falls zunächst $\lambda . n = (v)$ berechnet war, diese Zahl (v) mit 2, 4 oder 8 multiplicirt werden, um schliesslich z. B. $4 . (v) = v$ als gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu erhalten. Es wurde also absichtlich nicht gleich die richtige Unteroctave festgestellt, sondern es geschah dies erst nachträglich. Im ersteren Falle wären dann sogleich z. B. $\lambda . 4\,n = v$ zu berechnen gewesen. Warum diese *nachträgliche* Entscheidung der Unteroctaven eintrat, wird im Verlaufe der nächsten Mittheilungen klar werden. *Beispiel.* Ein Streifen einer leinenen Schnur lieferte:

$$\frac{\lambda}{2} = 1066\,\text{mm} = 1{,}066\,\text{m}; \lambda = 2{,}132\,\text{m}.$$

$$a = 39;\ n = 412$$

$$(v) = 2{,}132 . 412 = 878 . 3;\ v = 2 . (v) = 2 . 878{,}3 = \mathbf{1757{,}6},$$

da erkannt wurde, dass n als die nächste Unteroctave vom Streifenton genommen werden musste. Es empfiehlt sich überhaupt bezüglich der Octaven eine Nomenclatur zu gebrauchen und schlage ich die Bezeichnung „Ober-“ und „Unteroctave“ vor mit dem Zusatznummern 1, 2, 3 u. s. w. Demgemäss ist c^2 z. B. die 2. Oberoctave von c und zugleich die 3. Unteroctave von c^5.

8. Bevor ich nun Resultate meiner Beobachtungen mittheile, dürfte es sich empfehlen, die Genauigkeit der auf diesem Wege zu erlangenden Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zu ermitteln, sofern diese Genauigkeit zunächst von der Bestimmung der Schwingungszahlen n abhängt. Hierbei sind also auszuschliessen, vielleicht sehr in Betracht kommende Ab-

weichungen, die durch Unregelmässigkeit des Materials der membrannösen Körper selbst bedingt werden und von denen wir vorläufig absehen müssen.

Bezüglich der zunächst durch's Gehör festzustellenden Nummer a des Zungentons n, der eine Unteroctave des durch Streifen erlangten Longitudinalgrundtons N der betreffenden Lamelle bildet, glaube ich befähigt zu sein, selbst noch bei der dritten Unteroctave die Nummer a für diese möglichst richtig zu treffen. *Beispiel.* Die Nummer $a = 34$ lieferte einen Ton $n = 256 + 34 . 4 = 392$ Schwingungen. Ein Ton N nun, von welchem dieser Ton mit 392 Schwingungen die genaue dritte Unteroctave ist, wäre der Ton $N = 8 . 392 = 3136$ Schwingungen. Ertönt dieser hohe Longitudinalton, so glaube ich befähigt zu sein, nicht $a = 33$ oder $a = 35$ sondern $a = 34$ ziehen zu sollen. Zöge ich aber $a = 33$ oder $a = 35$, so würde die hiernach schliesslich berechnete Schwingungszahl $N = 8 . 388$ oder $N = 8 . 396$ d. h. 3104 oder 3168 sein, d. h. die Schwingungszahl N wäre schliesslich um ∓ 32 Schwingungen falsch gefunden. Bei Zungentönen, welche als *zweite* Unteroctaven mit dem Tone der Lamelle erklingen, würde man um 16 Schwingungen, bei denen, welche als *erste* Unteroctave gelten um 8 Schwingungen irren und bei Tönen derselben Octave, würde man durch eine falsche Annahme der betreffenden Zunge sich um 4 Schwingungen in der Berechnung der Schwingungszahl N irren. Geben wir dies alles zu, so würde eine Maximalirrung um 32 Schwingungen bei den höchsten Tönen, die im folgenden vorkommen, angenommen werden müssen. Angenommen nun, ein Lamellenton von 3136 Schwingungen habe einer Halbwelle $\lambda / 2 = 307$ mm, mithin einer Ganzwelle gleich 614 mm angehört, so wäre, wenn wir die als richtig erkannte Nummer 34 gezogen hätten, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = 0{,}614 . 3136 = 1925{,}5$ m gefunden worden. Hätte man dagegen $a = 33$ oder 35 gezogen, so wäre $v = 1905{,}8$ bezw. $v = 1945{,}1$ gefunden worden, d. h. die Schallgeschwindigkeiten wären um 19,7 m verschieden von dem als richtig erscheinenden Werthe abgewichen. Berechnen wir dies nach Procenten, so würde dies heissen: man habe die Schallgeschwindigkeit auf ca. 1,2 Proc. richtig gefunden. Ein solches Resultat muss aber vollkommen befriedigen.

9. Die vorausgehenden numerischen Ableitungen lassen sich noch in einer allgemeiner gültigen Form gewinnen. Unter der Voraussetzung, dass der Ton n, nach welchem wir die Höhe des Longitudinaltons N berechnen, die 3. Unteroctave ist, und dass wir zugeben, wir irrten uns im Maximo um eine Nummer bei dem Tone des Sonometers, so wäre dieser berechnete Longitudinalton gleich

$$N = \{256 + (a \pm 1)\,4\} \,.\, 8 = (256 + 4\,a)\,8 \pm 32$$

und somit die berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich

$$v = (256 + 4 \,.\, a)\,8 \,.\, \lambda \pm 32 \,.\, \lambda.$$

Der Fehler beträgt demgemäss in Metern:

$$\Delta v = \pm 32 \,.\, \lambda,$$

und in Procenten des richtigen v:

$$\Delta' v = \frac{100 \,.\, 32 \,.\, \lambda}{(256 + 4 \,.\, a)\,8 \,.\, \lambda} = \frac{400}{(256 + 4 \,.\, a)}.$$

Wir ersehen hieraus, dass der procentische Fehler des v von λ unabhängig ist und nur von a abhängt. Setzen wir daher a gleich o, d. h. denken wir einen Longitudinalton N, von welchem der *tiefste* Ton unseres Sonometers mit $n = 256$ Schwingungen die 3. Unteroctave ist, so wird

$$\Delta' v = \frac{400}{256} = 1{,}56 \,..$$

Denken wir ferner einen Longitudinalton N, von welchem der *höchste* Ton unseres Sonometers mit $n = 512$ Schwingungen die 3. Unteroctave ist, so wird

$$\Delta' v = \frac{400}{256 + 4 \,.\, 64} = \frac{400}{512} = 0{,}78.$$

d. h. die Genauigkeit der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit wächst, dieselbe Unteroctave des Tones a immer vorausgesetzt, für *höhere* Longitudinaltöne.

Falls die Töne unseres Sonometers die 2. Unteroctave von den festzustellenden Longitudinaltönen der Streifen bilden, wird der procentische Fehler

$$\Delta' v = \frac{100 \,.\, 16\,\lambda}{(256 + 4 \,.\, a)\,4\,\lambda} = \frac{400}{256 + 4\,a}$$

sein, d. h. der procentische Fehler bleibt derselbe wie vorhin

und ebenso wird dies der Fall sein, wenn wir annehmen, wir hätten es bei den Tönen unseres Sonometers mit der 1. Unteroctave oder dem Gleichklang zu thun.

10. Es muss nun bemerkt werden, dass zweifellos die Annahme, man könne sich in der Nummer unseres Sonometers irren, um so weniger zutrifft, je näher dessen Töne an die Töne der Longitudinaltöne heranrücken und werden demgemäss unsere im vorausgehenden berechneten Maximalabweichungen für v nothwendig weniger wahrscheinlich sein, wenn wir es mit Longitudinaltönen zu thun haben, die gerade nicht um 3 Octaven höher sind wie die Töne unseres Sonometers d. h. es wird sich überhaupt empfehlen, nicht zu kurze Membranstreifen zu verwenden. Da nun aber das einmal benutzte Sonometer nur Töne liefert, welche von 4 zu 4 Schwingungen höher oder tiefer werden, so sind wir gewissermaassen gezwungen, uns beim n um 4 Schwingungnn zu irren. Es existirt jedoch noch eine Thatsache, welche die Genauigkeit der Tonbestimmung nach einem solchen Tonmesser wesentlich erhebt, nämlich die: dass wenn man zwei *benachbarte* Zungentöne zusammen erkliegen lässt, *das Ohr als Resultante deutlich einen Ton von mittlerer Tonhöhe wahrnimmt.* Ich mache von dieser Thatsache schon lange den ausgiebigsten Gebrauch. Finde ich demgemäss dass z. B. die Zunge $a = 15$ etwas zu hoch, die Zunge $a = 14$ etwas zu tief, so lege ich ein $a = 14{,}5$ zu Grund.

Man wird nun einwenden, warum ein solches Sonometer anwenden mit *sprungweis* fortschreitenden Tönen? Warum nicht zur Tonhöhenermittelung eine andere voraussichtlich sicherere Methode anwenden? Vielleicht mit Zuhilfenahme einer Saite, deren Lage man durch einen Schieber ganz continuirlich verändern kann bis eben der Transversal- oder Longitudinalton derselben mit dem fraglichen Tone unisono klingt, oder vielleicht nur die tiefere Octave von diesem ist? Soll eine *solche* Methode wirklich zu dem erwünschten Ziele führen, so muss selbstverständlich ein Weber'sches Monochord mit senkrecht aufgespannter Seite verwendet werden. Diese Saite muss, falls sie ihren Grundton, sei es transversal oder longitudinal schwingend, gibt, zunächst auch nach einer Normalstimmgabel ihrem Grundtone nach bestimmt werden, am besten jedenfalls so, dass man ihre Länge oder die Spannung oder beides so

lange regulirt, bis sie mit der Gabel unisono klingt, was mit Hülfe von Schwebungen zu erreichen ist. Da ein Schieber nothwendig ist, welcher längs der Saite eingestellt werden soll, so muss dieser so eingerichtet sein, dass er nicht zerrt, wie es ja beim Weber'schen Monochord der Fall ist. Die Einstellung dieses Klemmschiebers auf die richtige Länge der Saite wird selbstverständlich aber nur nach verschiedenem Probiren, Verschieben und Tonerregen der Saite und daneben der Lamelle gelingen. Von einer solchen Methode musste ich absehen, da es sich bei meiner Untersuchung um Hunderte von Tonhöhenbestimmungen handelte. Aber ich konnte auch von ihr aus einem anderen Grunde absehen. Denn die tongebenden membranösen Körper sind ja in ihrer Structur durchaus nicht zu den absolut regelmässigen Körpern zu rechnen und wir werden ja später sehen, welche Abweichungen in der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei einem und demselben Stoffe wirklich vorkommen können. Man wird sich überzeugen, dass auf diese stofflichen Unregelmässigkeiten ganz andere Abweichungen in den Werthen von v zu setzen sind als wie die, welche wir oben als Maximalabweichungen kennen lernten. Ich wiederhole, dass diese oben berechneten Fehler in der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit berechnete Maximalfehler sind, dass in Wirklichkeit diese wohl überhaupt nicht mit grosser Wahrscheinlichkeit anzunehmen sind. Mit Rücksicht hierauf bemerke ich noch folgendes. Nachdem ich eine Nummer des Sonometers gezogen hatte, welche mir mit dem Longitudinalton des Streifens zunächst übereinzustimmen schien, begann die genauere Prüfung in der Art, dass ich die benachbarten Nummern zog, wieder prüfte, bis ich eben dem Gehör nach vollkommen befriedigt war. Namentlich trat das letztere ein, wenn beim gleichzeitigen Hören der beiden Töne N und n der Logitudinalton N des Streifens neben dem Transversalton n des Sonometers sich eigentlich gar nicht bemerklich machte, was ja bei vollkommenen Octavenklängen der Fall ist.

11. Bei der absoluten Tonhöhenbestimmung von Longitudinalschwingungen kommt aber meistens noch ein ganz anderer Umstand in Betracht, der von fundamentaler Bedeutung ist. Ich meine die wirkliche Feststellung der Ordnungszahl der Octave, d. h., wenn der Longitudinalton gehört wird

und ein tieferer Ton des Sonometers hiermit verglichen wird, die Entscheidung darüber: *welche Oberoctave bildet denn der Longitudinalton N vom tieferen Vergleichston n*, oder umgekehrt; *welche Unteroctave ist denn der letztere Ton von ersterem?* Mit dieser Frage kommt Jeder in Verbindung, der z. B. den Längenelasticitätsmodulus aus Longitudinalschwingungen von Stäben oder Saiten bestimmen will. Die Unsicherheit, welche hier eintreten kann, existirt etwa nicht blos, wenn man es mit Verschiedenheiten von 2, 3 oder 4 Octaven zu thun hat, sondern sie kann auch schon bei Tönen eintreten, welche factisch nur um eine Octave verschieden sind, ja, selbst bei Unisonolongitudinaltönen wird es, falls sie höher und höher werden, vielleicht Manchem schwer, mit Bestimmtheit zu erkennen, dass sie wirklich Unisonotöne sind. Bei der Bestimmung von Elasticitätsmodulis, wobei *bekannte* Körper, Metalle, Glas u. s. w. verwendet werden, über deren Elasticitätsmodulus man schon im voraus ziemlich unterrichtet ist, verfährt man bekanntermassen so, dass man zunächst einmal eine plausibele Octavenhöhe dem Vergleichston gegenüber annimmt und die Berechnung mit dieser Tonhöhe durchführt. Hat man sich dann um ein oder zwei Octaven geirrt, so zeigt sich dieser Irrthum bald, indem man z. B. bei Stahl für den Elasticitätsmodulus 5000 km anstatt 20000 km erhält, wonach offenbar zu schliessen ist, dass man den Longitudinalton um eine Octave zu tief geschätzt hat und somit gemäss der Formel für den Elasticitätsmodulus erst noch das 5000 mit $2^2 = 4$ zu multipliciren hat. Hat man es dagegen mit einem, bezüglich seiner Elasticitätsverhältnisse, vorläufig ganz unbekannten Körper zu thun, so ist es meist unmöglich, mit einer angenommenen Octavenhöhe zum Ziele zu gelangen. Es bleibt dann zunächst nichts anderes übrig, als neben dem festzustellenden Longitudinalton einen zweiten *Longitudinalton* von einer Saite oder einem Stabe zu etabliren, von der oder von dem man den Elasticitätsmodulus kennt. Man kann dann die Saite oder den Stab so lange verkürzen, bis sie mit dem fraglichen Longitudinalton *unisono* klingt, was immer bei nicht *zu hohen* Tonlagen unschwer zu erkennen ist. Hiernach wird es nicht schwer sein, die richtige Tonhöhe des fraglichen Tones festzustellen, bez. zu berechnen.

In einer solchen Lage befand ich mich als ich die Lösung der vorliegenden Frage über die Schallgeschwindigkeiten in membranösen Körpern in Angriff nahm. Der erste Körper, welchen ich untersuchte, war gewöhnlich einseitig schwarzes Buntpapier, welches nach den Angaben von Antolik, unter der Bezeichnung „Satiné-Papier“ sich sehr zu Membranschwingungen und den hierbei in Betracht kommenden Klangfiguren eignen sollte. Ich grenzte z. B. eine Länge $L = \lambda/2 = 381$ mm ab. Der Vergleichston des Sonometers hierzu war die Nummer $a = 15$. Es war mithin $n = 316$ und somit $(v) = 316 . 0{,}762$, da $\lambda = 762$ mm $= 0{,}762$ m war. Dies gab also $(v) = 240{,}8$. Nun entstand aber die Frage, welche Unteroctave ist denn dies $n = 316$ von dem Longitudinalton N der Lamelle? Um dies zu entscheiden, nahm ich eine dünne Glasröhre und schnitt von ihr nach und nach so viel ab, bis auch sie einen Ton gab, den ich möglichst als im Unisono mit dem Lamellenton erkannte. Die so erhaltene Länge der Röhre war 1030 mm = 1,03 m. Sie gab auch ihren Grundton, mithin war bei ihr $(v) = 316 . 2{,}06 = 650{,}9$. Da nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Glase nahe 5000 m beträgt, so kann (v) nur mit 8 multiplicirt werden, um $v = 5207{,}2$ m für Glas zu erhalten. Ebenso musste dann auch das (v) für das Papier mit 8 multiplicirt werden, d. h. der Streifenton war die *dritte* Oberoctave von unserem Ton $a = 15$ oder $n = 316$ des Sonometers, wonach $v = 1926$ m erhalten wird.

Da der Streifenton im Vergleich zum Tone des Glasstabes jedoch schwach war, so konnte es bei geringer Aufmerksamkeit einem ungeübten Beobachter erscheinen, als wäre ersterer noch um eine Octave höher als der letztere, d. h. die 4. Oberoctave. Demgemäss wäre aber die Schallgeschwindigkeit im Streifen gleich 3852 m herausgekommen, d. h. eine Schallgeschwindigkeit gefunden, welche noch über die für Kupfer hinausginge, was wohl sofort als sehr unwahrscheinlich angesehen werden durfte. Doch ich liess eine solche Annahme einmal zu und wandte eine neue Controle an, nämlich einen Vergleich des Streifentons mit dem Longitudinalton einer *dünnen* Kupfersaite. Die letztere wurde am Weber'schen Monochord in einer Länge von 1 m durch die nöthigen

Gewichte gespannt und gab einen Longitudinalton N als eine Unteroctave von $a = 55$ des Sonometers, und demgemäss von $n = 476$ Schwingungen. Dieses n mit der doppelten Länge der Saite = 2 multiplicirt, gab für Kupfer $(v) = 952$ und offenbar musste dieses (v) erst mit 4 multiplicirt werden, um für die richtige Schallgeschwindigkeit in der Kupfersaite $v = 3808$ m zu finden. Es war demgemäss der Saitenton die 2. Oberoctave von $a = 55$ oder $n = 476$ des Sonometers. Wenn nun aber doch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Papierstreifen nicht 1926 m, sondern 3852 m gewesen wäre, dann wäre der Streifenton bei einer Streifenlänge von 381 mm nicht die 3, sondern die 4. Oberoctave von $a = 15$ des Sonometers gewesen, d. h. wir müssten die Schwingungszahl $n = 316$ nicht mit 8, sondern mit 16 multipliciren, um N zu erhalten. Dies gäbe $N = 5056$. Da nun die Kupfersaite bei 1000 mm Länge nothwendig ein $N = 4.476 = 1904$ gab, so lässt sich sofort berechnen, bei welcher Länge sie 5056 Schwingungen gegeben hätte. Man findet aus einer einfachen Proportion diese Länge gleich 377 mm. Als ich diese nun von der Kupfersaite wirklich abgrenzte, konnte ich *mit der grössten Bestimmtheit erkennen*, dass der Streifenton der tiefere war und somit nothwendig jetzt die 1. Unteroctave von dem Saitenton bilden musste. Ferner musste der Streifenton dann genau denselben Eindruck wie der Saitenton machen, wenn man den Streifen mit einer Länge von $381/2 = 190{,}5$ mm einspannt; geschah dies, so konnte ich mit der grössten Bestimmtheit erkennen, dass die beiden Longitudinaltöne, deren Tonstärke nunmehr als völlig gleich erschienen, vollkommen unisono waren. Ferner musste dies Unisono auch erkannt werden, wenn man die Saite gleich $2.377 = 754$ mm und den Streifen wie ursprünglich gleich $2 . 190{,}5 = 381$ mm abgrenzte, oder auch, wenn man die Saite gleich $3 . 377 = 1131$ mm und den Streifen gleich $3 . 190{,}5 = 571{,}5$ mm lang nahm. Alle diese tieferen Unisonos konnten mit der grössten Bestimmtheit als solche erkannt werden. Hiermit wird die Bedeutung von Toncontrolen, wie ich sie bei meiner Untersuchung mitunter anwenden musste, vollkommen erkannt werden.

(Fortsetzung folgt.)

XI. *Nachtrag zu meiner Arbeit: Theorie der Lösungswärme und des osmotischen Drucks;* *von C. Dieterici.*

In einer im December 1891 in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaft zu Berlin erschienenen Abhandlung über die Theorie der Lösungen erhebt Hr. Lothar Meyer Einwände gegen van't Hoffs Theorie des osmotischen Drucks. Ich bedauere es lebhaft, diese Arbeit erst Anfang Februar 1892 unmittelbar nach Lesung der Correctur meiner Arbeit über den osmotischen Druck in diesen Annalen kennen gelernt zu haben, da ich sonst noch beim Lesen der Correctur einige jener Einwendungen, welche Hr. Meyer gegen van't Hoff geltend macht, und welche in gleicher Weise auch meine Ableitung der van't Hoff'schen Sätze treffen, berücksichtigt hätte.

Hr. Meyer hebt hervor, dass der osmotische Druck, wie er beobachtet wird, wesentlich abhängt von der Natur der halbdurchlässigen Membran. Das ist zweifellos richtig, und die von ihm mitgetheilten Beobachtungen beweisen diese Thatsache. Wir müssen also fragen, wie müssen die Membranen beschaffen sein, für welche van't Hoffs Ueberlegungen und meine strengere Ableitung jener Sätze gelten. Die Antwort ist sowohl aus van't Hoffs Arbeit, wie auch aus meiner sofort abzulesen und desshalb auch nicht besonders herausgehoben: die Membran muss eine derartige sein, dass sie eine völlig reversible Ueberführung von Wasser an Salz bez. umgekehrt ermöglicht. Das heisst also, dass, wenn wir durch sie eine Lösung vom reinen Lösungsmittel scheiden, auf erstere durch einen Stempel einen solchen Druck ausüben, dass die Diffussion gerade aufgehoben wird, und wir durch den Stempel eine gewisse Menge Lösungsmittel aus der Lösung herausdrücken, dass dann die ganze gegen das System geleistete Arbeit allein gegen die Diffussionskräfte aufgewendet wird, kein Theil derselben durch irreversible Vorgänge in der Membran, wie Reibung, durch Quellung veranlasste Deformation der Membran, Dichtigkeitsänderungen etc. absorbirt wird. Diese

Voraussetzung machen die theoretischen Ueberlegnngen, indem sie die Membranen in der Vorstellung zur Ausführung völlig reversibler Kreisprocesse verwenden. Die natürlichen und die künstlich hergestellten Membranen werden der theoretischen Forderung selten, vielleicht nie genügen, wenn auch Pfeffer's Membranen dem Ideal sehr nahe gekommen zu sein scheinen. Bei dieser Sachlage müssen wir die Frage aufwerfen, ob denn der von van't Hoff theoretisch definirte osmotische Druck überhaupt eine physikalische Grösse ist, da er ja doch kaum direct beobachtet werden kann. Diese Frage ist unbedingt zu bejahen; denn der von van't Hoff definirte osmotische Druck tritt entscheidend auf, wie in meiner Arbeit dargethan ist, bei dem Lösungsprocess, wo von einer Membran gar nicht die Rede ist. Er zeigt sich hier als ein zwischen dem aufzulösenden Körper und dem Lösungsmittel wirkender molecularer Oberflächendruck, der, da er von der Temperatur abhängt, vermuthlich kinetischer Natur ist. Wenn die kinetische Theorie der Gase zu einer kinetischen Theorie der Flüssigkeiten und festen Körper ausgebaut sein wird, werden wir über die Mechanik jenes melecularen Oberflächendruckes uns klarere Vorstellungen machen können, als heute. Von Hrn. L. Boltzmann ist ja bekanntlich ein Versuch dieser Art schon ausgeführt.

Die Argumente des Hrn. Lothar Meyer, dass der osmotische Druck nicht ein Gasdruck sei, finden in meiner Arbeit ihren strengen Beweis. Ich erlaube mir nur noch den Hinweis, dass auch der Rechnungsbeweis des Hrn. Meyer, dass der van't Hoff'sche Druck gar nicht dem Boyleschen Gesetze folgt, sobald man ihn für verschiedene Lösungsmittel berechnet, seine theoretische Begründung findet in dem Satze meiner Arbeit: Lösungen *desselben Lösungsmittels* und gleicher Dampfspannungsverminderung bei gleicher Temperatur sind isotonisch. Bei verschiedenen Lösungsmitteln verhalten sich ceteris paribus die osmotischen Drucke umgekehrt, wie die Molecularvolumina der Lösungsmittel.

Breslau, 9. Februar 1892.

XII. *Ueber die galvanische Leitungsfähigkeit eines Wismuth-Blei-Amalgams; von Eug. Englisch.*

Im April 1885 veröffentlichte Hr. Prof. Dr. Braun eine Untersuchung über „die Thermoelectricität geschmolzener Metalle.“[1]) Das Thermoelement Hg | (3 Hg + 1 Pb + 1 Bi)[2]) zeigte dabei eine besondere Eigenthümlichkeit. Die Curve, welche seine electromotorische Kraft darstellt, war bis 180° convex gegen die Abscissenaxe, von 180° bis 210° concav und von da an wieder convex.[3])

Amalgame von so hohen Metallgehalt, wie der hier in Frage kommende, scheinen bisher nicht untersucht worden zu sein. Die Herren Matthiessen und Vogt konnten bei Quecksilberlegirungen, welche mehr als 4 Proc. des beigemischten Metalls enthielten, keine constanten Resultate erhalten. Hr. C. L. Weber war aber in einer Untersuchung über „die galvanische Leitungsfähigkeit und die thermoelectrische Stellung von Amalgamen im Zusammenhang mit der Veränderlichkeit der Structur“[4]) zu dem Satze gekommen, dass im *allgemeinen* der Zunahme des spec. Widerstandes der Amalgame eine Zunahme der thermoelectrischen Differenz gegen Kupfer entspreche.

Angeregt von Hrn. Prof. Braun habe ich nun untersucht, ob der höchst charakteristischen Curve der electromotorischen Kraft des Elements Hg | (3 Hg + 1 Pb + 1 Bi) eine Curve einer anderen electrischen Grösse des Amalgams 3 Hg + 1 Pb + 1 Bi analog verlaufe. Das Amalgam ist so gut flüssig wie Quecksilber und zeigt auch ein diesem sehr ähnliches Aussehen. Aenderungen der Structurverhältnisse, welche Hr. C. L. Weber zur Erklärung des eigenthümlichen Verhaltens der von ihm untersuchten Amalgame heranzieht, können hier also nicht in Frage kommen. Es lag näher im galvanischen Leitungswiderstand des Amalgams ein besonderes Verhalten zu vermuthen und dieses zu untersuchen.

---

1) Braun, Ber. d. Berl. Acad. **18.** p. 289. 1885.
2) Gewichtstheile.
3) Braun, l. c. p. 297.
4) C. L. Weber, Wied. Ann. **23.** p. 447. 1884.

Das Amalgam war dabei in eine etwa 1,2 mm weite und über 1 m lange Glasröhre eingeschlossen, welche schlangenförmig gebogen war. An die Enden der Röhre waren weitere, senkrecht stehende Glasröhren angeschmolzen, in welche die zur Zuleitung des Stromes und zur Abzweigung dienenden amalgamirten Kupferdrähte bis zu einer bestimmten Marke eingesetzt wurden. Die hohen Temperaturen wurden durch einen starken Dampfstrom hoch siedender Flüssigkeiten (Xylol 140,5°, Anilin 183°, Dimethylanilin 192°, Toluidin 198°, Xylidin 214°) hergestellt. Die das Amalgam enthaltende Glasröhre war dabei in einen Glascylinder eingesetzt, welcher durch Umwickelung mit schlecht leitenden Substanzen gegen Wärmestrahlung nach aussen geschützt war.

Die Widerstandsbestimmungen selbst wurden nach der Kirchhoff'schen Methode unter Benutzung des Differentialgalvanometers ausgeführt.[1]) Ein Spiegelgalvanometer mit verschiebbaren Rollen von etwa 1200 Ohm Widerstand war als Differentialgalvanometer eingerichtet. Um die richtige Einstellung des Galvanometers stets constatiren zu können, war eine Pohl'sche Wippe in den Stromkreis eingeschaltet, in gleicher Weise, wie es Hr. C. L. Weber beschrieben hat.[2]) Dem Vergleichswiderstand war ein zweiter Rheostat als Nebenschluss beigegeben; man konnte sich dadurch dem Widerstand des Amalgams genügend nähern, um durch Interpolation einen dem wahren Werth des Widerstandes proportionalen zu erhalten. (Die Rollen waren nicht auf gleichen Widerstand, sondern nur auf gleiche Wirkung, wie es Kirchhoff verlangt, eingestellt; die einfache Abzweigung nach dem Differentialgalvanometer lieferte also nur proportionale Werthe). Indem man einmal durch Zufügen von Widerständen in den Abzweigungen die Nadel des Galvanometers in die Nulllage zurückführte und dadurch den wahren Werth des Widerstandes erhielt, fand man das andere mal durch passendes Aendern des Vergleichswiderstandes einen proportionalen Werth und hatte somit zwei parallel neben einander herlaufende Versuchsreihen, welche sich gegenseitig controllirten.

---

1) Kirchhoff, Wied. Ann. **11.** p. 801. 1880.
2) C. L. Weber, Wied. Ann. **23.** p. 449. 1884.

Die Beobachtung des Hrn. Weber, dass Kupferelectroden von den Amalgamen stark angegriffen werden, habe ich bei den Temperaturen, bis zu welchen ich gelangte, nicht gemacht. Thermoströme traten nicht auf; dagegen machte sich anfangs eine Störung geltend, welche wie Peltier-Effect aussah, aber durch Anwendung besonderer Abzweigungselectroden beseitigt wurde.

Die Rechnungen übergehend, gebe ich in nachfolgender Tabelle I die von mir gefundenen Werthe des specifischen Widerstandes w und der Leitungsfähigkeit λ, bezogen auf Quecksilber von 0°. Die Spalte dw/dT enthält die Mittelwerthe für die betreffenden Temperaturintervalle.

Tabelle II enthält die von Hrn. Prof. Braun früher ermittelten, aber seiner Zeit nicht veröffentlichten Werthe der thermoelectrischen Kraft e in Volt gegen Quecksilber, wenn die andere Contactstelle auf 20° C. gehalten wurde. de/dT sind wieder Mittelwerthe; die Zahlen für w und λ sind für die Temperaturen, welche Hr. Prof. Braun anwandte, umgerechnet. Der bessern Vergleichung wegen habe ich aus Tabelle I die Werthe von dw/dT *ohne Aenderung* auch in Tabelle II noch einmal eingesetzt.

Tabelle I.

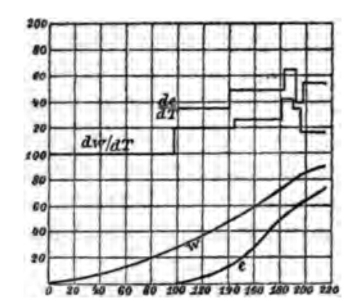
T^0	w	$\frac{dw}{dT}$	λ
0°	0,9813	0,000 295	1,0191
97,5°	1.0101	505	0.9900
143°	1,0331	556	0,9681
181,5°	1,0545	720	0,9483
191,5°	1,0617	640	0,9419
196,5°	1,0649	457	0,9398
214°	1,0729		0,9321

Tabelle II.

T^0	e	$\frac{de}{dT}$	w	$\frac{dw}{dT}$[1]	λ
0°	—	—	0,9813	0,000 295	1,0191
100°	0,000 0355	0,000 0056	1,0113	505	0,9889
140°	058	68	1,0316	556	0,9693
183°	0874	84	1,0555	720	0,9474
192.6°	0955	59	1,0624	640	0,9413
198,5°	099	74	1,0658	457	0,9383
214°	1105		1,0729		0,9321

1) Aus Tabelle I entnommen.

In der beigegebenen Zeichnung sind die Temperaturen als Abscissen, die Werthe von w, e, dw/dT, de/dT als Ordinaten aufgetragen. Bedeutet y die Ordinate der Curve, so ist in dem gebrauchten Maastabe stets:



$$w = (980 + y)\,10^{-8},$$
$$e = (35 + y)\,10^{-5},$$
$$\frac{dw}{dT} = (y - 70)\,10^{-6},$$
$$\frac{de}{dT} = (y - 80)\,10^{-7}.$$

Aufs deutlichste tritt besonders in den Curven für dw/dT und de/dT die Analogie bis zur Temperatur von 198° hervor. Sind die Curven auch nicht gerade parallel, so entspricht doch stets dem Ansteigen von de/dT ein Ansteigen von dw/dT und umgekehrt. Freilich wird man von dem einen untersuchten Amalgam noch nicht allgemein auf einen Zusammenhang zwischen thermoelectrischer Kraft und Widerstand schliessen dürfen, merkwürdig genug bleibt aber der analoge Verlauf beider Curven.

Hrn. Prof. Braun möchte ich für die mir gewährte Hülfe meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Tübingen, Physik. Institut, November 1891.

Jahrg. 11. Nr. 1.

Verhandlungen
der
Physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

Sitzung vom 8. Januar 1892.

Vorsitzender: Hr. A. Kundt.

Hr. **F. Kurlbaum** spricht:

Ueber die Herstellung eines Flächenbolometers.

Die darauf bezüglichen Versuche sind gemeinsam mit Hrn. O. Lummer angestellt.

Hr. **E. Pringsheim** berichtet dann über seine Versuche, betreffend

die Lichtemission elementarer Gase

und demonstrirt den Anwesenden die wichtigsten der besprochenen Erscheinungen.

Sitzung vom 29. Januar 1892.

Vorsitzender: (i. V.) Hr. B. Schwalbe.

Hr. **E. Lampe** hält folgende Ansprache:

Zu den Verlusten an alten Mitgliedern, welche das vergangene Jahr der Physikalischen Gesellschaft gebracht hat, kam in seinen letzten Tagen der von

Prof. Dr. Leopold Kronecker,

geb. den 7. December 1823 zu Liegnitz,
gest. den 29. December 1891 zu Berlin.

Im Jahre 1862 trat er in die Gesellschaft ein, ist also beinahe dreissig Jahre der unsrige gewesen,

und obgleich er nur selten in den Sitzungen erschienen ist, meines Wissens auch nie das Wort ergriffen hat, so beklagen wir mit der Universität, der Academie, der ganzen gelehrten Welt Deutschlands und Europas das plötzliche Dahinscheiden eines der hervorragendsten Mathematiker nicht bloss unserer Tage, dessen Mitgliedschaft unserer Gesellschaft zur hohen Ehre gereicht hat.

Es kann hier nicht davon die Rede sein, auch nur im Fluge die wissenschaftliche Bedeutung des Mannes zu schildern, dessen Gedanken noch auf längere Zeit hin den Antrieb zu neuen mathematischen Forschungen geben werden. Nur auf einige wenige Züge möchte ich in diesem Augenblicke die Aufmerksamkeit lenken. Durch glückliche Umstände wurde der junge Leopold Kronecker auf die Bahn geleitet, der er unwandelbar bis zu seinem Ende gefolgt ist. Ein geistesverwandter Genius, der noch lebende Ernst Eduard Kummer führte als Lehrer des Gymnasiums zu Liegnitz ihn in die Elemente derjenigen Gebiete ein, denen er später seine Lebensarbeit gewidmet hat. Eine innige Freundschaft hat beide Forscher stets verbunden gehalten, von denen der jüngere in dem älteren seinen geistigen Vater verehrte. Als vor etwa zehn Jahren ein Manuscript für das von Kronecker redigirte Journal für Mathematik einlief, zog dieser aus dem Kasten ein Primanerheft der Liegnitzer Gymnasialzeit, in welchem die Grundgedanken der eingelieferten Abhandlung über die Bernoulli'schen Zahlen nach einer von Kummer gestellten Aufgabe behandelt worden waren.

„Wem er geneigt, dem sendet der Vater der Menschen und Götter
Seinen Adler herab, trägt ihn zu himmlischen Höhn."

Neben Kummer wurde später Dirichlet sein Lehrer, sein Vorbild und bald sein verehrter Freund. Aber

sehr früh auch wandte sich KRONECKER selbständig den Problemen zu, aus deren Ergründung er mit klarem Bewusstsein seine wissenschaftliche Lebensaufgabe gemacht hat. Die erste Mittheilung, welche der noch nicht Dreissigjährige am 20. Juni 1853 der Berliner Academie durch DIRICHLET vorlegen liess, stellte seine algebraischen Forschungen mit einem Schlage neben die von ABEL, GALOIS, HERMITE. Der überwältigende Eindruck der Arbeiten des jungen Gelehrten auf die Zeitgenossen wird am besten durch die Worte DIRICHLET's aus seinem Briefwechsel mit KRONECKER beleuchtet (Göttinger Nachr. 1885, p. 374): „Für die überaus grosse Freude, welche mir die Mittheilung Ihrer schönen Entdeckungen verursacht hat, finde ich keinen passenderen Ausdruck, als Ihnen aus voller Ueberzeugung macte virtute zuzurufen. Zugleich kann ich Ihnen nicht verhehlen, dass sich dieser Freude etwas Egoismus beimischt, da ich mir bei aller Bescheidenheit das Zeugniss nicht versagen kann, dass ich Sie zuerst in die unteren Regionen einer der Wissenschaften eingeführt habe, auf deren Höhen Sie jetzt als Meister einherschreiten. Ich rede absichtlich nur von einer der Wissenschaften, denn an Ihrer algebraischen Grösse muss ich mich völlig unschuldig erklären.“ Zur vollen Würdigung solcher Leistungen ist es nöthig, den Umstand zu erwähnen, dass die Ordnung geschäftlicher Familienangelegenheiten auf mehrere Jahre die Zeit KRONECKER's vollständig in Anspruch genommen hatte.

Es konnte nicht ausbleiben, dass die Akademie der Wissenschaften zu Berlin, welcher KUMMER seit 1855 als Mitglied angehörte, den als Privatmann in unserer Stadt lebenden Mathematiker 1861 in ihre Mitte berief. Der Siebenunddreissigjährige entwickelte in seiner Antrittsrede das Programm der Aufgaben, an deren Lösung er seine Kräfte setzen wollte. Die

Algebra, die Zahlentheorie, die complexe Multiplication der elliptischen Functionen werden als die Zweige der Mathematik erwähnt, auf deren Erforschung sein Sinn und Streben gerichtet sei. „Die Verknüpfung dieser drei Zweige der Mathematik erhöhte den Reiz und die Fruchtbarkeit der Untersuchung; denn ähnlich, wie bei den Beziehungen verschiedener Wissenschaften zu einander, wird da, wo verschiedene Disciplinen der Wissenschaft ineinandergreifen, die eine durch die andere gefördert und die Forschung in naturgemässe Bahnen gelenkt."

Bei einer Durchsicht der langen Reihe bedeutender wissenschaftlicher Arbeiten, die KRONECKER veröffentlicht hat, ist dieser Gedanke als der rothe Faden erkennbar, der sich durch alle hinzieht. Die zielbewusste Forschung verleiht, bei aller Vielseitigkeit der durchgearbeiteten Themata, seinem ganzen Lebenswerke den Charakter eines einheitlichen Kunstwerkes. Die Verwandtschaft des mathematischen Schaffens mit dem künstlerischen war ja ein Lieblingsgedanke des Verstorbenen. Diejenige Gestalt, welche der Lebensgedanke KRONECKER's im letzten Jahrzehnt angenommen hatte, erhellt am klarsten aus seinem Aufsatze: „Ueber den Zahlbegriff"[1]): „In der That steht die Arithmetik in ähnlicher Beziehung zu den anderen beiden mathematischen Disciplinen, der Geometrie und Mechanik, wie die gesammte Mathematik zur Astronomie und den anderen Naturwissenschaften. . . Dabei ist aber das Wort „Arithmetik" nicht in dem üblichen beschränkten Sinne zu verstehen, sondern es sind alle mathematischen Disciplinen mit Ausnahme der Geometrie und Mechanik, also namentlich die Algebra und Analysis, mit darunter zu begreifen. Und ich glaube auch, dass es dereinst gelingen wird, den ge-

1) Festschrift für E. ZELLER u. Journ. f. Math. **101.** p. 338.

sammten Inhalt aller dieser mathematischen Disciplinen zu „arithmetisiren", d. h. einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffs wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind." Der Arithmetik in diesem weiteren Sinne, dieser „Königin der Mathematik", wo „in der Olympier Schaar thronet die ewige Zahl", war Kronecker's Dienst geweiht. Lange Jahre arbeitete er in privater Zurückgezogenheit, ohne durch die Pflichten und Sorgen eines Amtes in der Verfügung über seine Arbeitszeit eingeengt zu sein; indem er jedoch das „nonumque prematur in annum" sorglich beachtete, gab er nur in Zwischenräumen Kunde von den Früchten seines Nachdenkens. Von der Berechtigung, die er als Akademiker hatte, an der Universität Vorlesungen zu halten, machte er seit Michaelis 1861 in den Wintersemestern regelmässig Gebrauch, zuweilen auch in den Sommersemestern. Nach der Uebernahme der Professur für Mathematik an der Universität im Jahre 1883 wuchs diese Thätigkeit des Sechzigjährigen, der seit dem Sommer 1880 auch die Redaction des Journals für Mathematik in Gemeinschaft mit Weierstrass übernommen hatte; zugleich wuchs nun aber auch das Verlangen, die Gedanken zu veröffentlichen, welche er lange mit sich herumgetragen hatte, um sie reifen zu lassen. Er setzte seinen Stolz darin, jede Vorlesung wie eine originale Leistung zu behandeln, seinen Schülern immer neue Gedanken aus seinem schier unerschöpflichen Vorrathe vorzutragen, nie bei einer neuen Vorlesung über dasselbe Thema sich völlig zu wiederholen. Die auf seine Veranlassung von einzelnen seiner Schüler ausgearbeiteten Vorträge, zu denen er den Stoff oft genug in der vorangehenden Nacht in wenigen, nur für ihn ver-

ständlichen Aufzeichnungen sammelte und ordnete, standen bei ihm in einer stattlichen Reihe von Bänden und legen Zeugniss ab von der Mühe, die er auf seine Vorlesungen verwandt hat, enthalten gewiss auch manche Ideen, zu deren Veröffentlichung er nicht die Zeit gewonnen hat. Aus der Anregung jedoch, welche er durch diese Vorträge erhielt, die Ergebnisse seiner Forschungen so darzustellen, dass dieselben anderen Menschen mitgetheilt werden konnten, erklärt sich wohl die erstaunliche Fülle seiner Publicationen in dem verflossenen Jahrzehnt. Als ob er eine Ahnung gehabt hätte, dass seiner Thätigkeit einmal plötzlich ein Ziel gesetzt werden könnte, bezeichnete er einst in wehmüthiger Stimmung seine Festschrift zu KUMMER's fünfzigjährigem Doctorjubiläum als sein wissenschaftliches Testament. In der That reicht ja die Entstehung der hier zusammengestellten Grundzüge der arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen in die Jugendzeit KRONECKER's zurück, und die weiteren derselben Entwickelungen beschäftigten ihn und seine Schüler in den folgenden neun Jahren, während deren er zum Glück für die Wissenschaft nach der Veröffentlichung jener Schrift die einzuschlagenden Wege hat weisen können.

Trotz des schweren Verlustes der Gattin, der den Verewigten im vorigen Sommer tief beugte, sodass er „als Mensch“ verzweifelte, weiter leben zu können, war der Achtundsechziger „als Mathematiker“ noch immer so frisch und klar, dass eine fortgesetzte reiche Ernte seines Geistes erwartet werden durfte. Der 29. December des abgelaufenen Jahres hat uns plötzlich alles geraubt; viele Früchte der tiefsinnigen Ueberlegungen seiner durchwachten arbeitsvollen Nächte hat er mit sich ins Grab genommen. Die mathematische Welt, welche auf ihn als eine unversiegbare Quelle neuer Gedanken blickte, welche von ihm ein gewich-

tiges Urtheil über den Werth neuer Entdeckungen erhielt, ist starr in dem Gefühle der Leere des Platzes, den er einnahm. Wir alle betrauern den Verlust einer Zierde deutscher Gelehrsamkeit, und diejenigen, welche das Glück hatten, ihm näher zu treten, beweinen den Verlust eines auf den Höhen der Menschheit wandelnden, kunstsinnigen und vielseitig gebildeten Mannes und eines gastfreien Freundes, der in herzlichem Wohlwollen an den Geschicken seiner Mitmenschen Antheil nahm.

Hr. **E. Budde** gedenkt dann des grossen Verlustes, den die astronomische, physikalische und mathematische Wissenschaft durch den am 2. Januar 1892 erfolgten Tod von

Georg Biddell Airy

erlitten hat.

Der Verstorbene war am 27. Juli 1801 zu Alnwick in Northumberland geboren, bezog 1819 die Universität Cambridge, studirte Mathematik, graduirte daselbst 1823 mit Auszeichnung und wurde 1824 zum Fellow von Trinity-College ernannt. 1826 wurde er Professor der Mathematik, 1828 Director des astronomischen Observatoriums von Cambridge und 1835 nach dem Abgange Pond's Director des Observatoriums in Greenwich, Königlicher Astronom für England. Diese höchste Stelle, welche einem englischen Astronomen zugänglich ist, hat er bis an sein Lebensende bekleidet und hat ihr durch seine unermüdliche Thätigkeit eine früher nicht erreichte wissenschaftliche Bedeutung gegeben.

Durch sein ganzes Wirken geht ein Zug von eminent praktischer Begabung und Neigung; die Mathe-

matik war ihm ein Mittel zur Förderung der Beobachtung und des praktischen Könnens. Gleich seine erste Abhandlung (Bd. 2 der Cambridge transactions) beschäftigt sich mit der Frage, ob und unter welchen Bedingungen versilberte Glasspiegel in Teleskopen zu verwenden seien, und von ähnlichem Charakter sind viele seiner späteren Arbeiten. Wie der grösste Theil seiner Lebensdauer, so war auch der grösste Theil seiner Bemühungen der Astronomie und den Zwecken der Observatorien gewidmet; diese können hier nur kurz berührt werden. Als Director in Cambridge führte er sofort regelmässige Reduction der Beobachtungen, genaue Arbeitspläne nnd auf Grund derselben eine feste Routine der Beobachtung ein; als Astronomer Royal hat er die ganze instrumentelle Ausrüstung von Greenwich umgebildet, hat auch dort regelmässige Reduction mit pünktlicher Veröffentlichung verbinden lassen und sich schliesslich der fünfzehnjährigen Arbeit unterzogen, die alten Greenwicher Beobachtungen von 1750 an zu reduciren; die grosse Menge von verarbeiteten Material, welche durch diese Leistungen den Astronomen zugänglich gemacht wurde, sicherte ihm die dankbare Anerkennung seiner Fachgenossen. Seit 1838 hat er in Greenwich magnetische und meteorologische Beobachtungen, später auch einen heliographischen und spectrographischen Dienst eingeführt. Eine Reduction auch der meteorologischen Daten lag in seinem Plan, er gab sie aber auf, weil ihm die leitenden theoretischen Gesichtspunkte nicht genügend entwickelt schienen, um eine solche Arbeit fruchtbar zu machen. Neben seiner grossartigen organisirenden und rechnenden Thätigkeit blieb ihm Zeit für eine Reihe von gediegenen Einzelabhandlungen, sowie zur Mitwirkung bei der Erfüllung practischer Bedürfnisse von Wissenschaft und Technik. Hierher sind z. B. zu rechnen die Erfindung eines

Doppelbildmikrometers, seine Arbeit für die Wiederherstellung der beim Brande des Parlaments verloren gegangenen Normalmaasse, seine Untersuchungen über den Einfluss, welchen die Bewegung eiserner Schiffe auf den Compass ausübt und über die dafür anzubringenden Correctionen, seine Mitwirkung bei der Feststellung der Spurweite von Eisenbahnen, bei der Einführung von Gasmessern u. s. w.

Unter seinen astronomischen Arbeiten ist eine, die auch für die Physik von grossem Interesse ist, die 1869 vorgenommene Bestimmung der Aberration in einem mit Wasser gefüllten Fernrohr. Im übrigen datiren seine rein physikalischen Arbeiten zumeist aus der ersten Periode, aus der Zeit der Fellowship und Professur. Energisch, wie in anderen Dingen, so auch in seinem Beruf als Lehrer, stellte er sich die Aufgabe, den angehenden Gelehrten verschiedene Zweige der theoretischen Physik durch zusammenhängende Bearbeitung zugänglicher zu machen und schrieb eine Reihe von werthvollen „tracts“ über Mond- und Planetentheorie, über Gestalt der Erde, über Theorie der Beobachtungsfehler und Magnetismus. Ausserdem veröffentlichte er in den Transactions von Cambridge eine Anzahl von Abhandlungen über specielle Fragen der Mechanik und Physik, über Bewegung und Anziehung einer flüssigen Masse, welche wenig von der Kugelgestalt abweicht, über Zahnräder und Echappements, über die Möglichkeit eines Perpetuum mobile, wenn man voraussetzt, dass die Kräfte sich nicht momentan fortpflanzen, über die Grundsätze für die Construction astronomischer Linsensteme, über sphärische Abberation, über einen eigenthümlichen Fehler des Auges (enthält die Entdeckung des Astigmatismus), über Pendelcorrectionen. In allen zeigt sich, neben ungewöhnlichem mathematischen Scharfsinn der auf die greifbare Frage gerichtete Sinn. Mit besonderem

Glück betheiligte er sich seit 1824 an der damals neuen Bearbeitung der Wellentheorie des Lichts; seine Untersuchungen über NEWTON'sche Ringe ergaben wesentliche Stützpunkte für dieselbe, und seine Abhandlung über die Polarisationserscheinungen im Quarz, ist zum bleibenden Gemeingut geworden. Die letztere hat auch seinen Namen mit dem Phänomen der „AIRY'schen Spiralen" für immer associirt.

An den wissenschaftlichen Ehren, die seinen Leistungen entsprachen, hat es ihm nicht gefehlt; er war schon früh Präsident der astronomischen Gesellschaft von England, später Vorsitzender der Royal Society, mit dem Titel Sir ausgezeichnet und Mitglied oder Ehrenmitglied der bedeutendsten wissenschaftlichen Gesellschaften des Continents. Hochgeachtet und beliebt starb er am 2. Januar 1892 im 91. Jahre seines Lebens, und sein kräftiger Organismus würde auch diese hohe Grenze wohl noch überschritten haben, wenn er nicht im vergangenen Sommer durch einen Sturz geschwächt worden wäre. Mit ihm scheidet einer der würdigsten und thätigsten Vertreter der englischen, wir können sagen der europäischen Wissenschaft.

Zum ehrenden Gedächtniss der beiden Verstorbenen erheben sich die Anwesenden von den Sitzen.

Hr. **A. König** spricht dann auf Grund von gemeinsam mit Hrn. R. RITTER ausgeführten Versuchen

über den Helligkeitswerth der Spectralfarben bei verschiedener absoluter Intensität.

J. PURKINJE hat zuerst darauf hingewiesen, dass die relative Helligkeit von verschieden gefärbten Pigmenten durch eine Aenderung in der Intensität ihrer Beleuchtung in ver-

schiedener Weise beeinflusst wird. In der Dämmerung ist Blau heller als Roth, wenn für mittlere Helligkeit beide Farben gleich hell zu sein scheinen. Dove und Seebeck haben die Erscheinung später eingehender verfolgt, und Hr. von Helmholtz fand zuerst, dass sie auch bei Spectralfarben zu beobachten war. Haben zwei verschieden gefärbte Felder bei einer mittleren Intensität gleiche Helligkeit, so wird nach gleicher Verminderung der objectiven Intensität beider, dasjenige Feld, welches von dem kurzwelligeren Lichte erleuchtet ist, das hellere sein, während nach einer Vermehrung der Intensität das langwelligere heller aussieht. Hr. E. Brodhun[1]) hat vor einigen Jahren dann dieses „Purkinje'sche Phänomen" messend untersucht und gefunden, dass dasselbe bei den von ihm benutzten Helligkeiten nach oben hin endlich nicht mehr zu beobachten war, d. h. dass von einer bestimmten Helligkeit an alle Farben ihre relative Helligkeit in gleichem Maasse ändern, wenn ihre objective Intensität um denselben Betrag erhöht wird. In dieser Helligkeitsstufe ist man daher erst berechtigt die Intensitätsvertheilung im Spectrum ohne besondere Angabe über die Helligkeit, bei der die Vergleichungen gemacht sind, durch eine Curve darzustellen. Solche Curven hat Hr. Brodhun sowohl für mein (normales trichromatisches) Auge, als auch für sein (grünblindes) Auge und für das (rothblinde) Auge des Hrn. R. Ritter ausgeführt und veröffentlicht.

Es ist nun aber ersichtlich, dass man Curven der Helligkeitsvertheilung im Spectrum bei jeder Helligkeitsstufe gewinnen kann: sie haben aber nur dann Werth, wenn zugleich die Helligkeitsstufe so angegeben wird, dass sie reconstruirbar ist.

In einer umfangreichen Arbeit, über deren kleineren Theil ich hier berichte[2]), haben nun Hr. R. Ritter und ich solche Curven für unsere Augen und für diejenigen einiger anderer Beobachter bei sehr verschiedener Helligkeit zu gewinnen versucht. In der Gestaltänderung dieser Curven mit steigender

---

1) E. Brodhun, Beiträge zur Farbenlehre. Inauguraldiss. Berlin 1887.

2) A. König, Ueber den Helligkeitswerth der Spectralfarben bei verschiedener absoluter Intensität. (In: Beiträge zur Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane (von Helmholtz-Festschrift) Hamburg und Leipzig 1891, Leopold Voss.)

absoluter Intensität muss nun natürlich das PURKINJE'sche Phänomen in der Art hervortreten, dass mit steigender Helligkeit die Ordinaten um so stärker wachsen, je grösser die Wellenlänge des betreffenden Spectrallichtes ist; dadurch wird sich dann auch das Maximum in der Richtung zum rothen Ende hin verschieben.

Die Beobachtung geschah in der Art, dass eine Fläche, welche Licht von der Wellenlänge 535 $\mu\mu$ (Thalliumgrün) enthielt, stets unverändert beibehalten, und nun die Lichtmenge in Spaltbreiten bestimmt wurde, welche bei den verschiedenen Wellenlängen des betreffenden Spectrums erforderlich ist, um dieselbe Helligkeit zu erzielen. Das Reciproke dieser Spaltbreite nenne ich für die benutzte Helligkeitsstufe den Helligkeitswerth des untersuchten Spectrallichtes.

Die niedrigste Helligkeitsstufe lag der unteren Reizschwelle sehr nahe, sie war so gering, dass der Beobachter mindestens $^1/_4$ Stunde in absoluter Dunkelheit verweilt haben musste, um sie überhaupt wahrzunehmen. Nennen wir die Lichtmenge 1, welche erforderlich war, um diese Helligkeit auf dem erwähnten grünen Vergleichsfelde herzustellen, so sind die übrigen benutzten Helligkeitsstufen gegeben durch die Lichtmengen 16, 256, 1024, 4096, 16384, 65536 und 262144. Die letzte Helligkeitsstufe entspricht bei meinem Auge ungefähr der Helligkeit, unter der ein mit 600 Meterkerzen erleuchtetes weisses Papier erscheint, wenn ich es durch ein Diaphragma von 1 qmm Oeffnung betrachte.

Die wesentlichen Resultate, welche sich bei den verschiedenen Beobachtern ergeben, lassen sich in folgenden Sätzen zusammenfassen, wobei alle Angaben auf das Dispersionsspectrum des Gaslichtes sich beziehen.

1. Für alle Beobachter (zwei Trichomaten, ein Grünblinder und ein Rothblinder) hatte die Curve der Helligkeitswerthe für die dunkelste Stufe fast genau dieselbe Gestalt und zwar diejenige, welche von DONDERS, Hrn. HERING und von Hrn. DIETERICI und mir bei angeborener Monochromasie für grössere Helligkeitsstufen beobachtet ist. Ihr Maximum lag ungefähr bei 535 $\mu\mu$.

2. Mit steigenden Helligkeitsstufen wandert bei den Trichromaten das Maximum erst langsam, dann schneller und

endlich wieder sehr langsam. Bei der höchsten benutzten Helligkeitsstufe liegt es ungefähr bei 610 $\mu\mu$.

3. Grünblinde zeigen, soweit die gemachten Beobachtungen reichen, dieselben Verhältnisse wie die Trichromaten.

4. Bei Rothblinden wandert das Maximum mit steigender Helligkeitsstufe anfänglich ebenso wie bei den Trichromaten langsam nach dem langwelligen Ende hin, erreicht bei mittlerer Helligkeitsstufe die Wellenlänge 570 $\mu\mu$ und bleibt hier, soweit die Beobachtungen reichen, auch für höhere Stufen stehen.

Die unter 1 angegebene Thatsache war von Hrn. E. Hering und den Anhängern seiner Theorie der Gegenfarben vorausgesagt und kurz vor der Veröffentlichung unserer Untersuchungen ebenfalls beobachtet worden. Dass man in ihr aber keinen Beweis für die Richtigkeit dieser Theorie zu sehen berechtigt ist, ergibt sich aus der von mir gleichzeitig gemachten Beobachtung, dass die Vertheilung der Helligkeit im Spectrum in einzelnen Fällen auch dann ungeändert bleibt, wenn durch peripher oder central gelegene pathologische Processe die eigentliche Farbenempfindung völlig verloren geht und nur die Empfindungsreihe Schwarz-Grau-Weiss bestehen bleibt.

Sitzung vom 12. Februar 1892.

Vorsitzender: Hr. A. KUNDT.

Hr. **S. Kalischer** spricht

zur Theorie und Berechnung der Stromverzweigung in linearen Leitern.

Hr. **E. Budde** trägt darauf vor

über integrirende Divisoren und Temperatur.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1892. ANNALEN № 4.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLV.

I. *Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Lichtbrechung des Glases; von C. Pulfrich.*

(Hierzu Tafel VIII Fig. 1—2.)

Das optische Verhalten des Glases und einer Anzahl ein- und zweiaxiger Krystalle unter dem Einfluss der Temperatur bildet eine bemerkenswerthe Ausnahme von dem Verhalten der übrigen durchsichtigen, festen, flüssigen und gasförmigen Körper. Während nämlich bei diesen mit erhöhter Temperatur, der Abnahme der Dichtigkeit entsprechend, auch das Brechungsvermögen abnimmt, tritt bei der Mehrzahl der Glassorten und einigen Krystallen gerade das Umgekehrte ein: *Die Brechungsindices wachsen mit steigender Temperatur.* In Hinblick auf die bekannte und allgemein als Regel betrachtete Proportionalität von brechender Kraft und Dichtigkeit bildet somit das angegebene Verhalten eine höchst auffällige Erscheinung, die zwar schon seit Jahren bekannt ist, aber bis jetzt noch keine Erklärung gefunden hat. [1])

1) In der nachstehenden Literaturzusammenstellung ist hinter jeder Literaturangabe in Parenthese bemerkt, auf welche Substanz sich die Untersuchung bezieht. Die Namen derjenigen Substanzen, welche das oben beschriebene Verhalten zeigen, sind durch besonderen Druck hervorgehoben; bei allen anderen angeführten Körpern nimmt der Brechungsindex mit der Temperatur ab.

Rudberg, Pogg. Ann. **26.** p. 291. 1832 (*Kalkspath*, Quarz, Aragonit). Fizeau, Ann. ch. phys. (3) **66.** p. 429. 1862. Pogg. Ann. **119.** p. 87. 297. 1863 (*Kalkspath*, Flussspath, *Zinkglas von Maïs*, *Glas von St. Gobain, Gew. Flintglas*). Ann. ch. phys. (4) **2.** p 143. 1864 (Quarz). Stefan, Wien. Ber. (II) **63.** p. 239. 1871. (Steinsalz, Sylvin, Kaliumalaun, Flussspath, *Glas.*) Hastings, Astron. Nach. Nr. 2501 und Americ. Journ. of sc. (3) **15.** p. 269. 1878 (2 *Feil's Flintgläser*, *Feil's Crownglas*). G. Müller, Publ. des astrophysik. Obs. zu Potsdam (16) **4.** p. 151. 1885 (*Kalkspath*, Quarz, mehrere *Flint-* und *Crowngläser*).

Bei den doppeltbrechenden Krystallen erscheint die Sache noch viel verwickelter als beim Glase. Denn hier ist schon bei gewöhnlicher Temperatur weniger die verschiedene Dichte, als vielmehr die lineare Anordnung der Massentheilchen für die nach den verschiedenen Richtungen stattfindende Fortpflanzungsgeschwindigkeit maassgebend. Deshalb ist auch die bei den Krystallen beobachtete Erscheinung nicht in dem Maasse von grundsätzlicher Bedeutung wie beim Glase, welches in seinen Eigenschaften vollständig den Charakter eines isotropen Körpers besitzt. Sehr wahrscheinlich ist aber auch bei den Krystallen die Erklärung in der gleichen Ursache zu suchen, welche das Verhalten des Glases bestimmt und welche darzulegen, der Zweck dieser Arbeit ist.

Bei der grossen Wichtigkeit, welche die Frage nach einer genauen Kenntniss des Einflusses der Temperatur auf die Lichtwirkung des optischen Glases in theoretischer und praktischer Hinsicht besitzt, und bei den zum Theil von einander abweichenden Angaben, die sich in der Literatur vorfinden, war es in erster Linie wünschenswerth, den Gegenstand einer gründlichen experimentellen Untersuchung zu unterwerfen. Unterstützt durch die reichen Mittel der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena, in deren Laboratorium diese Arbeit ausgeführt wurde, und des Glastechnischen Laboratoriums von Schott und Gen. ist es mir unter Anwendung einer neuen, ausserordentlich bequemen und sicheren Beobachtungsmethode gelungen, die Temperaturvariationen für eine grössere Anzahl der von dem genannten Jenenser Glaswerk hergestellten optischen Gläser und für einige durchsichtige Mineralien über allen Zweifel sicher festzustellen. Auf Grund der so gewonnenen Thatsachen ist es mir dann möglich gewesen, der Frage nach dem physikalischen Grunde für das abweichende Verhalten des Glases näher zu treten und auf diese Frage eine, wie ich glaube, eindeutige Antwort zu geben.

F. Vogel, Wied. Ann. **25.** p .87. 1886 (*Kalkspath, schweres Flintglas, weisses Glas*). Offret, Bull de la soc. franç. de min. **10.** p. 405—697. 1890 (*Beryll, Phenacit, Kalkspath*, Aragonit, Baryt, *Topas de minas geraes, Topas* von *Schneckenstein*, *Cordierit*, *Sanidin*, *Oligoclas*). Arzruni, Groth's Z. f. Kryst. **1.** p. 165. 1877 (Schwerspath, Coelestin, Anglesit). Dufet, Bull. de la soc. minér. de France **7.** p. 182 und **8.** p. 187 und 257 (Quarz, *Beryll*, Flussspath).

Die Arbeit zerfällt in zwei Theile: der I. Theil enthält die Beschreibung der Methode und der benutzten Apparate, die Beobachtungsresultate und den Vergleich mit den Resultaten anderer Beobachter. In dem II. Theile sind die Gründe mitgetheilt, welche für die von uns gegebene Erklärung maassgebend gewesen sind.

I. Theil.

Experimentelle Untersuchungen.

§ 1. Methode der Untersuchung; das Abbe'sche Spectrometer; Erhitzungsapparat.

Zum besseren Verständniss der von mir angewandten Methode ist es zunächst erforderlich, das zu den Messungen benutzte Abbe'sche Spectrometer[1]) einer kurzen Besprechung zu unterziehen.

Das Princip, auf welchem dieser Apparat beruht, ist das der Autocollimation. Ein einziges Fernrohr dient sowohl zur Beleuchtung als auch zur Beobachtung. In der Brennebene des Fernrohrobjectivs ist ein Verticalspalt angebracht, der von einer seitwärts aufgestellten Lichtquelle vermittelst eines kleinen den Spalt bedeckenden Reflexionsprismas beleuchtet wird. Das aus dem Fernrohr austretende parallelstrahlige Büschel wird je nach der Stellung des zu untersuchenden Prismas entweder direct reflectirt, oder zuerst gebrochen und dann an der Hinterfläche des Prismas reflectirt. Das Strahlenbündel kehrt hierauf wieder in das Fernrohr zurück und erzeugt in der Focalebene des Objectivs ein scharfes Bild des Spaltes, das mit letzterem zusammenfällt, wenn das reflectirte Strahlenbündel vollkommen senkrecht zu der reflectirenden Fläche gerichtet ist. Der am Theilkreis abgelesene Drehungswinkel des Prismas führt zu der Kenntniss des Prismenwinkels φ und des einem bestimmten homogenen Strahlenbündel zugehörigen Einfallswinkel α (Fig. 1 Taf. VIII). Man findet dann den Brechungsindex (N) vermöge der einfachen Beziehung:

1) E. Abbe, Neue Apparate, Jena 1874. — Eine ausführliche Beschreibung der neuesten Construction des Spectrometers, sowie aller bei dieser Arbeit verwertheten instrumentellen Hülfsmittel soll demnächst mit Abbildungen in der Zeitschrift für Instrumentenkunde veröffentlicht werden.

$$\text{(I)} \qquad N = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}.$$

Aus naheliegenden Gründen ist der Winkel φ nicht grösser als die Hälfte der bei der Methode der minimalen Ablenkung üblichen Winkelgrösse zu bemessen, also ungefähr gleich 30°.

In Wirklichkeit kann das Zusammenfallen des Spaltbildes mit dem Spalt nicht direct beobachtet werden, weil der Spalt von dem Reflexionsprisma bedeckt ist. Deshalb ist in der für die Beobachtung freien Hälfte des Gesichtsfeldes eine Marke angebracht — in unserem Falle ein feiner, parallel zur Spaltrichtung aufgezogener Spinnefaden — und es wird nun das Zusammenfallen des Spaltbildes mit diesem Faden beobachtet. Eine solche Einstellung kann mit sehr grosser Genauigkeit ausgeführt werden. Auch lehrt eine nähere Betrachtung, dass, obgleich jetzt den Anforderungen der Methode nicht in aller Strenge genügt wird, für die Methode selbst kein Nachtheil entsteht. Denn so lange man es mit directen Reflexionen zu thun hat (Bestimmung des Winkels φ), ist es überhaupt gleichgültig, unter welchem Incidenzwinkel die Strahlen auf die reflectirende Fläche auffallen, und nur in dem anderen Falle (Bestimmung von α) entsteht durch die Brechung eine Collimationsdifferenz, die aber so klein ist, dass sie unbedenklich vernachlässigt werden kann. Sind nämlich Spalt und Faden nebeneinander gelegen, wie in unserem Falle, sodass die sämmtlichen Strahlen dem Hauptschnitt des Prismas angehören, so lässt sich der Fehler im Resultat leicht rechnerisch verfolgen, und es ergibt sich, dass bei einer Brennweite des Fernrohrobjectivs von 28 cm und einem Abstand von 2 mm zwischen Spalt und Faden, der praktisch leicht eingehalten werden kann, die so erhaltenen Brechungsindices eine Abweichung von 1—2 Einheiten der 5. Decimale von N besitzen, die aber, da sie für alle Farben die gleiche ist, für uns ganz bedeutungslos ist. Etwas verwickelter, aber im Resultat nicht ungünstiger liegen die Verhältnisse, wenn die Marke — zwei halbkreisförmige Backen, zwischen denen das Spaltbild einzustellen ist — in der Längsrichtung des Spaltes unterhalb desselben angebracht ist.

Es ist als ein grosser Vorzug der Methode hervorzuheben, dass man nicht nöthig hat, wie es z. B. bei der Methode der

minimalen Ablenkung der Fall ist, die richtige Einstellung besonders zu prüfen; die Handhabung ist dadurch ausserordentlich vereinfacht, denn man braucht nur den Theilkreis mit Prisma so weit zu bewegen, bis das Spaltbild mit der Marke zusammenfällt, das ist dann die richtige Einstellung. Zur Feinbewegung des Theilkreises dient eine Mikrometerschraube.

Ein weiterer Vorzug des Abbe'schen Spectrometers, wohl der wichtigste aber bisher nur noch wenig beachtete, besteht in der ausserordentlichen Genauigkeit, mit der die *Dispersionsbestimmung* ausführbar ist. Dieselbe geschieht nicht, wie fast allgemein üblich, durch Ermittelung der Brechungsindices für einzelne Fraunhofer'sche Linien, sondern durch eine *Differenzmessung, auf mikrometrischem Wege.* Man bedient sich zu dem Zwecke der vorhin erwähnten Mikrometerschraube, welche mit einer Trommel und Theilung versehen ist, und lässt die einzelnen Spectrallinien nacheinander mit dem Faden zusammen fallen. Die Differenz der abgelesenen Trommeltheile, in Winkelmaass umgerechnet, ergibt die Winkelgrösse, um welche sich die Einfallswinkel (α) der verschieden gefärbten Strahlenbüschel von einander unterscheiden. Diese für die Grösse der Dispersion maassgebenden Winkeldifferenzen werden so unabhängig vom Theilkreis und viel genauer gemessen, als eine directe Ablesung am Theilkreise erlauben würde.

Der grösseren Genauigkeit der mikrometrischen Messung entspricht auch die Art der Berechnung. Bezeichnet man für eine Farbe (Natriumlicht), für welche der Brechungsindex *direct* bestimmt werden soll, den zugehörigen Einfallswinkel mit α_0, den mikrometrisch ermittelten Winkelabstand eines anders gefärbten Strahlenbündels, welches an der Hinterfläche senkrechte Reflexion erleidet, mit β, so lässt sich vermöge der beiden Beziehungen:

$$N_D = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \varphi}, \qquad N = \frac{\sin (\alpha_0 + \beta)}{\sin \varphi}$$

schreiben:

$$N - N_D = \frac{1}{\sin \varphi} (\sin (\alpha_0 + \beta) - \sin \alpha_0)$$

$$= \frac{1}{\sin \varphi} . 2 \cos \left(\alpha_0 + \frac{\beta}{2}\right) . \sin \frac{\beta}{2},$$

wofür man in Anbetracht der kleinen Grösse β auch setzen kann:

$$(II) \qquad N - N_D = \frac{1}{\sin\varphi}\cos\left(\alpha_0 + \frac{\beta}{2}\right).\sin\beta.$$

Unter Benutzung der vorstehenden Formel erhält man direct aus den beobachteten Winkeldifferenzen β die Differenz der Brechungsindices für die verschiedenen Spectralfarben gegen den Brechungsindex für gelbes Licht. Der Vortheil dieser Rechnungsweise liegt auf der Hand, denn man ist bei der Ausführung der Rechnung der Anwendung einer mehr als vierstelligen Logarithmentafel völlig enthoben, während bei directer Bestimmung der Brechungsindices selbst die Anwendung einer siebenstelligen Logarithmentafel nicht ausreicht, um eine der mikrometrischen Messung entsprechende Genauigkeit des Resultats zu erzielen.

Noch eine andere damit zusammenhängende Bemerkung möchte ich mir hier erlauben. Es ist vielfach üblich[1]), zur Charakteristik für das optische Verhalten der Substanz, die Brechungsindices des Körpers für eine Anzahl Fraunhofer'scher Linien einzeln aufzuzählen. Dadurch ist es aber dem Leser ausserordentlich erschwert, sich über den Verlauf der Dispersion schnell zu orientiren. Ohne Bildung von Differenzen und ohne vergleichende Rechnungen geht es dabei nicht ab. Weit vortheilhafter ist es, den Brechungsindex nur für eine Farbe (N_D) anzugeben und im Uebrigen zur Charakteristik der Dispersion die Differenzen der Brechungsindices bez. die relativen Dispersionen mitzutheilen. Es ist das eine den praktischen Bedürfnissen entsprungene und auch für theoretische Untersuchungen werthvolle Vereinfachung, welche in dem Glaswerk sowohl wie in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena schon seit Jahren in Anwendung gebracht worden ist, und deren ich mich im Folgenden ebenfalls bedienen werde. —

Um dem Prisma eine höhere Temperatur (Siedetemperatur des Wassers) zu geben, benutzte ich bei meinen Untersuchungen einen von Abbe construirten *Erhitzungsapparat*. Eine kurze Mittheilung über diesen Apparat findet sich in der

1) U. A. auch in den Landolt'schen Tabellen.

Zeitschr. für Instrumentenk. p. 362 1889. Derselbe besteht aus einem Tischchen, welches mit mehreren übereinanderliegenden Böden und Rinnen versehen ist und auf das Tischchen des Spectrometers aufgesetzt werden kann; ferner aus einem überhängenden doppelwandigen Gehäuse, welches an einem besonderen Stativ befestigt ist und an der Drehung des Theilkreises nicht theilnimmt. Die Rinnen sind mit Quecksilber als Sperrflüsskeit gefüllt. Es entstehen auf diese Weise zwei von einander getrennte Hohlräume; der äussere wird von dem Dampfe einer siedenden Flüssigkeit durchströmt, der innere Hohlraum enthält das zu untersuchende Prisma. Der Austritt des Dampfes erfolgt durch eine am unteren Ende des Gehäuses angebrachte Röhre mit Schlauch und Kühlapparat. Wie die in dem inneren Hohlraum luftdicht eingesetzten Thermometer erkennen lassen, ist die Temperatur im Innern der Temperatur der constant siedenden Flüssigkeit (Wasser, Alkohol, Aether) gleich; denn die Wärme wird dem inneren Hohlraum von allen Seiten, auch von unten und oben zugeführt, und man ist im Stande, durch fortgesetztes Kochen die constante Siedetemperatur beliebig lange zu erhalten. Das Gehäuse selbst, sowie die untere Seite des Tellers sind mit einer dicken Filzlage versehen. Bei niederer (Zimmer-) Temperatur wirkt die Vorrichtung als Schutzmittel gegen den Einfluss einer Temperaturänderung von aussen.

Zum Einblick in den inneren Hohlraum ist dem Fernrohrobjectiv gegenüber in dem Gehäuse eine Oeffnung angebracht, welche durch eine Glasplatte mit guten ebenen Flächen verschlossen ist. Das Gehäuse wird so gestellt, dass die beiden Flächen annähernd senkrecht zur Axe des Fernrohrs gerichtet sind. Alsdann hat die Platte keinen Einfluss auf den Gang der Lichtstrahlen.

Der hier nur kurz skizzirte Apparat hat mir für die besonderen Zwecke dieser Arbeit gute Dienste geleistet. Aber auch für allgemeinere Aufgaben lässt sich die Heizvorrichtung mit Vortheil verwenden, u. A. zur spectrometrischen Untersuchung von Flüssigkeiten im Hohlprisma, zum Studium der Gesetze der Ausdehnung doppelt brechender Krystalle durch Bestimmung der durch die Wärme hervorgerufenen Winkeländerungen bestimmt orientirter Prismen solcher Körper. —

Was endlich die von mir angewandte *Methode zur Be-*

stimmung der Temperaturvariationen der Brechungsindices anbetrifft, so gründet sich dieselbe auf ein von Abbe angegebenes und schon vor längerer Zeit veröffentlichtes Verfahren. [1]) Dasselbe ist bisher unbeachtet geblieben, sonst würde man mit Rücksicht auf den vorliegenden Zweck wohl schon längst versucht haben, die Methode in Anwendung zu bringen, denn sie besitzt sowohl in Bezug auf die Einfachheit der Beobachtung, als auch in Hinsicht der Genauigkeit der Resultate, Vorzüge, welche sie jedem anderen spectrometrischen Verfahren weit überlegen machen. Die Methode gestattet nämlich, die dem Einfluss der Temperatur unterworfenen Winkelgrössen *in ihren Differenzen* von einer Beobachtung zur anderen *selbstständig, durch mikrometrische Messung* zu bestimmen.

Der Gedanke ist folgender: Auf der dem Fernrohr zugewandten Fläche des zu untersuchenden Prismas sei ein zweites, kleineres Prisma von solchem Winkel befestigt, dass das von ihm herrührende Spiegelbild des Spaltes sich auf das gleichfalls im Gesichtsfeld erscheinende Spectrum projicirt. Bei einer Temperaturänderung wird dann, da die Winkel der beiden Prismen sich nicht ändern, und unter der Voraussetzung, dass auch die Verbindung der beiden Prismen keine Aenderungen erfährt, eine Lagenänderung der reflectirenden Flächen gänzlich ausgeschlossen sein. Es sind also die mit Hülfe der Mikrometerschraube des Spectrometers ermittelten Einstellungsunterschiede der verschiedenen Spectralfarben gegen die genannte unveränderliche Hülfsmarke gleich den Veränderungen, welche die bezüglichen Einfallswinkel (α) durch die Temperatur erleiden und welche in der weiter unten zu besprechenden Weise in Rechnung gezogen werden.

Die Bestimmung des Einfallswinkels selbst — durch Winkelmessung am Theilkreise — ist somit *auf eine einzige Farbe* (Natriumlicht) *und auf eine einzige Temperatur* (Zimmertemperatur) beschränkt, sodass, wenn der Winkel, mit mässiger Genauigkeit, einmal ermittelt ist, man zur Bestimmung der Abhängigkeit der Lichtbrechung von Temperatur und Farbe des Theilkreises nicht mehr bedarf. In der That würde man für diesen Zweck mit den denkbar einfachsten instrumentellen

1) l. c. p. 29.

Hülfsmitteln auskommen: einem feststehenden Fernrohr und einem drehbaren Tischchen für das Prisma mit Mikrometerbewegung.

Die Methode hat in dieser Form den Nachtheil, dass die Befestigung des Hülfsprismas an das zu untersuchende Prisma schwer in praktisch ausreichender Vollkommenheit erzielt werden kann. Derselbe fällt aber gleich fort, wenn man, wie ich bei der vorliegenden Untersuchung verfahren bin, *die Hülfsfläche direct an das zu untersuchende Prisma anschleift.* Zur näheren Erläuterung diene die Fig. 1 Taf. VIII, welche den Hauptschnitt eines so zugerichteten Prismas in zweimaliger Vergrösserung darstellt. Das abgetrennte Stück des Prismas ist durch die beiden punktirten Linien angedeutet. Es bezeichnet wieder φ den brechenden Winkel, ferner ist α_0 der Einfallswinkel des an der Vorderfläche (II) gebrochenen Strahlenbündels. Die Fläche III ist nahezu senkrecht zur Richtung des Strahlenbündels gelegen. Es empfiehlt sich, dieselbe so anschleifen zu lassen, dass die Marke ganz ausserhalb des Spectrums zu liegen kommt, weil sonst leicht ein Zusammenfallen der Marke mit einer Spectrallinie eintreten kann, was für die Genauigkeit der Einstellung von Nachtheil ist.

Noch ein anderer Umstand muss hier erwähnt werden. Die Form des Prismas bewirkt nämlich, wie leicht ersichtlich, eine Halbirung des Fernrohrobjectivs, derart, dass die beiden Hälften in der Richtung der zu messenden Verschiebung *nebeneinander* zu liegen kommen. Dieser Umstand verlangt, dass man darauf achte, dass während der Dauer einer Versuchsreihe keine Aenderung in der Einstellung des Oculars stattfinde, weil eine solche, verbunden mit einer Aenderung in der Accommodation des beobachtenden Auges scheinbare Verschiebungen der beiden Bilder gegeneinander hervorruft, deren Betrag grösser sein kann als die zu messenden Werthe. Unter Berücksichtigung der angegebenen Vorsichtsmaassregel kann aber die bezeichnete Fehlerquelle ganz vermieden werden. Ebenso verhält es sich mit einer Aenderung des Spaltabstandes vom Objectiv des Fernrohres und einer Aenderung der Brennweite des letzteren, welche durch Temperaturschwankungen der umgebenden Luft, bez. durch die vom Erhitzungsapparat auf Objectiv und Fernrohr überströmende Wärme hervorgerufen werden können. Da die ganze Versuchsreihe in ungefähr zwei

Stunden erledigt werden konnte und auch für die Abhaltung der Wärmestrahlung in praktisch ausreichender Weise gesorgt war — ein zwischen Objectiv und Heizkammer eingeschobener Schirm wurde nur für die Zeit der eigentlichen Messung entfernt —, so ist auch diese Fehlerquelle für unsere Beobachtungsmethode ganz ohne Nachtheil. Damit ist überhaupt jeder Einwand gegen die Anwendbarkeit der Methode beseitigt.

Die beschriebene Methode setzt die Unveränderlichkeit der drei Prismenwinkel voraus. Die Voraussetzung trifft für die isotropen Körper infolge der nach allen Seiten stattfindenden gleichartigen Ausdehnung ohne weiteres zu.[1]) Bei doppelt brechenden Krystallen ist das natürlich anders. Hier ist bekanntlich die Ausdehnung nach den verschiedenen Richtungen verschieden und nur bei einaxigen Krystallen findet in der senkrecht zur optischen Axe gelegenen Ebene eine gleichmässige Ausdehnung statt. Macht man in diesem Falle die genannte Ebene zum Hauptschnitt des Prismas, so bleiben auch hier die Prismenwinkel unverändert. Die weiter unten mitgetheilte Versuchsreihe an Quarz habe ich mit einem so orientirten Prisma (optische Axe parallel zur brechenden Kante) ausgeführt.

Bezüglich der rechnerischen Verwerthung der mikro-

---

1) Einzelne der untersuchten Glasprismen gestatteten aber auch eine directe *experimentelle* Prüfung dieser Voraussetzung. Dieselbe erfolgte auf mikrometrischem Wege durch Ausmessung des Abstandes zweier Spaltbilder, von denen das eine (die eigentliche Marke) durch normale Reflexion an der Fläche III (Fig. 1) entstanden ist und das andere einer mehrfachen inneren Reflexion seinen Ursprung verdankt. In Fällen nämlich, wo der Winkel α nahezu doppelt so gross ist als φ, ist das dreiseitige Prisma ein gleichschenkeliges und die an der Fläche III normal eintretenden Strahlen werden nach einer Reflexion an Fläche I von der Fläche II normal zurückgeworfen. Der Abstand, den das so entstandene zweite Bild vom ersteren besitzt, hängt allein von der Grösse der drei Winkel des Prismas ab. Denn da das zweite Bild nur eine geringe spectrale Färbung besitzt, was daher rührt, dass die Bedingung der Gleichheit der beiden Prismenwinkel nicht vollständig erfüllt ist, so ist klar, dass schon der Unterschied der Indices für die verschiedenen Farben nur einen sehr geringen Einfluss auf den Abstand ausüben kann, von einem Einfluss der Temperaturvariationen der Brechungsindices also gar keine Rede sein kann. Die Ausmessung des Abstandes ergab für diesen eine vollständige Constanz innerhalb der Genauigkeitsgrenze der mikrometrischen Messung

metrisch gemessenen Verschiebungen gilt dasselbe, was weiter oben über die Bestimmung der Dispersion gesagt wurde. Auch hier muss im Interesse der grösseren Genauigkeit und Bequemlichkeit ein besonderes Verfahren angewandt werden, denn es wäre sehr wenig rationell, wollte man die mikrometrisch ermittelten Temperaturvariationen der Einfallswinkel α einfach an diesen Winkeln selbst anbringen.

Der Weg ist durch die Analogie mit der Dispersionsbestimmung vorgeschrieben. Wir nennen t_2 die höhere, t_1 die niedere (Zimmer-) Temperatur. Die beobachtete Temperaturänderung des Einfallswinkels α wollen wir mit δ, und die den beiden Temperaturen zukommenden Brechungsindices bezogen auf Luft von derselben Temperatur wie das erwärmte Prisma mit N_1 und N_2 bezeichnen.

Eine der früheren völlig gleiche Behandlung der beiden Gleichungen

$$N_1 = \frac{1}{\sin\varphi} \sin(\alpha_0 + \beta)$$

$$N_2 = \frac{1}{\sin\varphi} \sin(\alpha + \beta + \delta)$$

ergibt dann für die zu bestimmende Differenz

$$\text{(III)} \qquad N_2 - N_1 = \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \cos\left(\alpha_0 + \beta + \frac{\delta}{2}\right) \sin\delta,$$

aus der sich die *Aenderung des relativen Index pro* 1° *C.* gültig für die Mitteltemperatur $t = \frac{1}{2}(t_2 + t_1)$ ableitet zu:

$$\text{(IV)} \qquad \Delta N = \frac{N_2 - N_1}{t_2 - t_1}.$$

§ 2. Reduction auf den leeren Raum.

Die Kenntniss des vorstehenden Ausdruckes ist überall da von grossem Interesse, wo, wie es in der Praxis meist der Fall ist, die Luft an den Temperaturvariationen des Glases Theil nimmt, u. a. wenn es darauf ankommt, die Veränderungen der Brennweite des Objectives eines astronomischen Fernrohres zu bestimmen, welche durch die veränderte Lichtbrechung des Glases und der Luft im Innern des Fernrohrtubus entstanden sind. Für den theoretischen Zusammenhang aber der Lichtbrechung mit der Dichte und für die richtige Erkenntniss des

thatsächlichen Verhaltens des Glases unter dem Einflusse der Temperatur ist aber eine andere Grösse maassgebend, die man erhält, wenn man die Brechungsindices des Glases auf Luft von constanter Temperatur, oder was das rationellste ist, direct auf den leeren Raum reducirt.

Wir bezeichnen zu dem Ende die den beiden Temperaturen zukommenden *absoluten* Brechungsindices mit $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$. Die Beziehung zwischen dem absoluten und dem relativen Brechungsindex des Glases wird dann durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\mathfrak{N}_1 = N_1 . n_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{N}_2 = N_2 n_2,$$

wo n_1 und n_2 die Brechungsindices der Luft gegen den leeren Raum bedeuten.

Durch Subtraction erhält man zunächst:

$$\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1 = N_2 n_2 - N_1 n_1$$

und wenn man rechts $N_1 n_2$ addirt und subtrahirt

$$= (N_2 - N_1) n_2 + N_1 (n_2 - n_1),$$

in welchem Ausdruck rechts der Factor n_2 des ersten Gliedes unbedenklich fortgelassen werden kann. Endlich ergibt sich für die *Aenderung des absoluten Brechungsindex pro 1° C.* und für die Mitteltemperatur $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ der Ausdruck:

$$\text{(V)} \qquad \Delta\mathfrak{N} = \Delta N + N . \Delta n.$$

In dieser Gleichung ist die Grösse Δn, die Aenderung des Brechungsindex der Luft für eine Temperaturzunahme von 1° C., noch unbekannt. Dieselbe lässt sich aber mit Hülfe des Satzes vom constanten Brechungsvermögen leicht berechnen, der bekanntlich für Gase mit grosser Annäherung zutrifft. Vermöge der Beziehung

$$\frac{n-1}{d} = \frac{n_0 - 1}{d_0} = \text{const.}$$

lässt sich nämlich zunächst schreiben

$$n - 1 = (n_0 - 1) \frac{1}{1 + \alpha t} \frac{b}{760}.$$

Hieraus erhält man dann die gesuchte Grösse Δn zu:

$$\text{(VI)} \qquad \Delta n = -(n_0 - 1) \frac{\alpha}{(1 + \alpha t)[1 + \alpha(t + 1)]} \cdot \frac{b}{760}.$$

In dieser Gleichung bezeichnet n_0 den Brechungsindex der trockenen atmosphärischen Luft für 0° und 760 mm Druck. α ist der Ausdehnungscoëfficient (0,00367), b der Barometerstand und t die Mitteltemperatur. In Bezug auf n_0 genügt es, für alle Farben $n_0 - 1 = 0{,}000294$ zu setzen.

Man kann sich die Berechnung der Grösse Δn für jeden einzelnen Fall dadurch sehr erleichtern, dass man für den Umfang der in Betracht kommenden Temperaturen und Barometerstände die Werthe für Δn tabellarisch zusammenstellt und den gesuchten Werth dieser Tabelle entnimmt. In dieser Weise bin ich bei der vorliegenden Untersuchung verfahren. Die nachfolgende Tabelle gibt einen Ueberblick über den Verlauf der Grösse Δn für einige Temperaturen und Barometerstände (mittlerer Barometerstand für Jena $b = 748$).

$-\Delta n_{(t,\,b)}$

t	$b = 730$	740	750	760	770
0°	0,1033	0,1047	0,1061	0,1074	0,1089
10°	0,0961	0,0974	0,0987	0,1000	0,1013
20°	897	909	921	0,0933	0,0946
30°	837	848	859	871	882
40°	785	796	807	818	829
50°	738	748	758	768	778
60°	694	704	713	723	732
70°	654	663	672	681	690
80°	617	626	635	643	651
90°	584	592	600	608	616
100°	554	561	568	576	583

Die Zahlen sind in Einheiten der fünften Decimale von n gerechnet. Der Grenzwerth für sehr hohe Temperaturen ist Null.

Die Benutzung der Tabelle vorausgesetzt, gestaltet sich die ganze Reduction zu einem sehr einfachen Rechenexempel.

Die so erhaltene Grösse $\Delta\mathfrak{N}$ stellt eine von den Druck- und Temperaturverhältnissen der umgebenden Luft *unabhängige Constante* dar, während ΔN mit diesen veränderlich ist und für jeden einzelnen Fall mit Hülfe der Gleichung

$$\Delta N = \Delta\mathfrak{N} - N \,.\, \Delta n$$

aus den mitgetheilten Daten berechnet werden kann.

Ob $\Delta\mathfrak{N}$ für alle Temperaturen gleich bleibt oder sich mit

ihr verändert, hängt ebenso wie die Art der Veränderung nur von der Natur der Substanz ab. Sehen wir aber davon ab und betrachten $\Delta\mathfrak{N}$ als angenähert constant, so ist die Art der Veränderung von ΔN vorzugsweise durch den Verlauf der negativen Grösse Δn bestimmt. Es kann also der bemerkenswerthe Fall eintreten ($\Delta\mathfrak{N}$ ist negativ, dem absoluten Werthe nach aber kleiner als das Glied $N.\Delta n$, z. B. bei dem Glase O. 1022), dass die anfangs positive Grösse ΔN für eine etwas höhere Temperatur Null wird und bei einem weiteren Anwachsen der Temperatur negative Werthe annimmt. In einem solchen Falle wird also je nach der gewählten Temperatur der relative Index entweder zunehmen oder abnehmen oder constant bleiben, während der absolute Index stetig abnimmt.

Man sieht aus den bisherigen Erörterungen, dass mit Rücksicht auf eine richtige Erkennung des thatsächlichen Verhaltens der Gläser der Reduction der Brechungsindices, bez. der Aenderungen derselben auf den leeren Raum ganz besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden musste. Bei Flüssigkeiten pflegt man fast allgemein von einer diesbezüglichen Reduction abzusehen, da die Werthe $\Delta\mathfrak{N}$ und ΔN in anbetracht der grossen Temperaturvariationen der Flüssigkeit gegenüber denen der Luft (Δn) sich nur wenig unterscheiden. Für die festen Körper aber würde durch eine solche Unterlassung der klare Einblick vollständig gestört werden, wie in einem weiter unten angeführten Falle thatsächlich geschehen ist.

§ 3. Das Beobachtungsverfahren.

In bezug auf die Justirung und Handhabung des Spectrometers sei auf die erwähnte Schrift[1]) verwiesen. Es erübrigt hier nur, eine Erörterung der für die Zwecke der Untersuchung geschaffenen besonderen Vorkehrungen hinzuzufügen.

Nachdem in bekannter Weise das Collimator-Fernrohr senkrecht zur Drehungsaxe des Theilkreises gestellt, der brechende Winkel (φ) und der Einfallswinkel (α_0) für gelbes Licht und für Zimmertemperatur ermittelt war, wurde das Prisma, wie oben p. 617 angegeben, mit der dritten Fläche ver-

1) Abbe, l. c.

sehen und nun das Spectrometer für die Temperaturuntersuchung vorgerichtet.

Zu dem Ende wurde zuerst das mit drei Stellschrauben versehene Tischchen des Erhitzungsapparates auf das von allen Nebentheilen befreite Tischchen des Spectrometers aufgesetzt und nach Augenmaass die Justirung vorgenommen. Da die drei radial verlaufenden Schlitze, in welche die drei Spitzen zu stehen kommen, ein für allemal so justirt waren, dass die Mitte des Tischchens mit der Drehungsaxe zusammenfiel, so bedurfte es jedesmal nur einer kleinen Verschiebung der drei Stellschrauben, um eine etwa vorhandene Höhenabweichung der drei Rinnen zu beseitigen.

Alsdann wurde das Prisma, dessen Hinterfläche zur Erhöhung der Reflexionsfähigkeit mit einem Quecksilberbeleg (einige Tropfen Quecksilber auf einem Stanniolstreifen verrieben und auf die Fläche gebracht) versehen war, lose auf den oberen Teller des Tischchens aufgesetzt. Der Teller war durch eine aufgeschraubte Metallplatte soweit erhöht, dass das Prisma gerade der Mitte des Objectivs gegenüberstand. Die Basisfläche des Prismas war entweder plan geschliffen oder kugelig ausgehöhlt, in welch' letzterem Falle das Prisma mit drei Punkten auf der Metallplatte zu stehen kam; in beiden Fällen erwies sich die Aufstellung als hinreichend sicher. Bei der Aufstellung des Prismas musste ferner darauf Bedacht genommen werden, dass durch die Drehung des Theilkreises keine seitlichen Verschiebungen der Prismenflächen gegen das Objectiv stattfanden, weil in einem solchen Falle stets andere Flächentheile zur Wirkung kommen und hierdurch leicht Fehler eintreten. Man kann diese Fehlerquelle aber dadurch vermeiden, dass man die Kante, in welcher die beiden Flächen II und III des Prismas zusammenstossen, mit der Drehungsaxe des Theilkreises zusammenfallen lässt.

Auf diese Weise vorgerichtet, konnte die genaue Justirung des Prismas (Ebene der drei Normalen parallel zur Ebene des Theilkreises) direct mit den drei Schrauben des Tellers des Erhitzungsapparates bewerkstelligt werden, ohne dass daraus ein Nachtheil für die Justirung des Tischchens selbst entstand. Die richtige Justirung des Prismas war erreicht, wenn die von den drei Flächen herrührenden Spaltbilder und die verschie-

denen Spectren bei einer Drehung des Theilkreises das Gesichtsfeld stets in gleicher Höhe hindurchgingen.

Schliesslich wurden die drei Rinnen mit Quecksilber gefüllt, neben das Prisma noch einige Stückchen Chlorcalcium gelegt und nun das überhängende Gehäuse soweit herabgelassen, dass eine völlige Trennung der beiden inneren Hohlräume erreicht war, ohne dass die freie Beweglichkeit des Tischchens eine Hemmung erfuhr. Alsdann war der Apparat zur Temperaturuntersuchung vorgerichtet.

Der Träger des Gehäuses wurde unmittelbar neben dem Spectrometer auf den gleichen Bock aufgestellt, auf welchem auch das Spectrometer stand. Dagegen fand die Kochflasche, zur Vermeidung einer directen Uebertragung von etwaigen durch das Kochen entstandenen Erschütterungen auf den Apparat, seitwärts auf einem besonderen Tisch ihren Platz.

In bezug auf die Justirung des Gehäuses sei noch bemerkt, dass durch ein leichtes Drehen desselben um die verticale Axe die von der Glasplatte herrührenden Reflexe möglichst an den Rand des Gesichtsfeldes gebracht werden.

Die Untersuchung wurde auf folgende Spectrallinien ausgedehnt:

H_α (*C*), N_a (*D*), H_β (*F*) und H_γ (*G'*).
$\lambda = 0{,}6563$ 0,5893 0.4862 0,4341

Ich hätte gern noch die rothe Kaliumlinie (0,7677) mit herangezogen, aber dieselbe ist meist so lichtschwach, dass das Auge bald ermüdet und dadurch die Genauigkeit der Einstellung auch für die übrigen Linien sehr geschädigt wird.

Die seitwärts vom Fernrohrocular hinter einem Schutzschirm aufgestellte Beleuchtungsvorrichtung bestand somit in einer Natriumflamme und einer Geissler'schen Wasserstoffröhre, letztere mit horizontaler Durchsicht hinter einem Linsensystem, welches die von der punktförmigen Lichtquelle der Röhre ausgehenden Strahlen convergirend zu dem Reflexionsprisma sandte und dieselben dort zu einem kreisförmigen Bilde vereinigte.

Die mikrometrische Durchmessung der Spectrums erfolgte stets in fünf oder sechs getrennten Versuchsreihen, wobei die Mikrometerschraube abwechselnd in der einen und in der anderen Richtung bewegt wurde. Auch kam die Schraube

jedesmal an anderen Stellen des Gewindes zur Geltung. Aus jeder einzelnen Reihe wurden dann die Abstände der Spectrallinien von der Marke, wie wir kurz die Einstellungsunterschiede bezeichnen wollen, gebildet und schliesslich die sämmtlichen Werthe durch Mittelbildung vereinigt. Dasselbe geschah bei höherer und niederer Temperatur.

Die Messung wurde gewöhnlich auf das zwischen der Zimmertemperatur und der Siedetemperatur des Wassers liegende Intervall beschränkt, in einigen Fällen auch Temperaturen unterhalb der Zimmertemperatur (im Winter durch Oeffnen der Fenster erreicht) und die Temperatur des siedenden Aethers (35°) zur Beobachtung benutzt.

§ 4. Grenzen der Genauigkeit. Die vollständigen Daten einer Versuchsreihe.

Es wird am besten sein, die Besprechung der Genauigkeit direct an eine der von mir vorgenommenen Versuchsreihen anzuknüpfen.

Zunächst seien die Constanten des Apparates angeführt. Der Theilkreis ist in $^1/_6{}^0$ getheilt, die beiden Mikrometermikroskope gestatten eine directe Ablesung bis auf einzelne Secunden genau. Die zur Bewegung des Theilkreises dienende Mikrometerschraube ergab aus einer grösseren Anzahl von Messungen folgenden Werth für die Mikrometerconstante: 1 Umdrehung = 10′ 1,6″ gültig für etwa 20 Umdrehungen. Die Trommel ist in 100 Theile getheilt, *ein Theil entspricht somit einem Winkelwerth von 6,016″ Secunden.*

Wir wählen als *Beispiel* folgende Versuchsreihe:

Baryt-Leichtflint. Schmelznummer des Glaswerkes: O. 527.

Brech. Winkel des Prismas $\varphi = 31^0\ 46'\ 24''$
Einfallswinkel für D $\alpha_0 = 55^0\ 51'\ 18''$ $N_D = 1{,}57175.$

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 738$ mm.

1. *Zimmertemperatur:* $t_1 = 17{,}5^0$ C.

Angaben der Trommeltheilung.

Marke	811,0	53,5	87,5	40,5	7,4
H_α	922,5	65,0	99,2	51,9	19,1
Na	1027,6	70,7	5,0	57,7	25,1
H_β	1287,2	29,8	63,6	16,7	83,6
H_γ	1502,4	44,6	79,0	31,6	98,7

Hieraus ergeben sich die folgenden Werthe für den Abstand der vier Spectrallinien von der Marke:

						Mittel	w. Fehler
H_α	111,5	11,5	11,7	11,4	11,7	111,56	± 0,04 = ± 0,24″
Na	216,6	17,2	17,5	17,2	17,7	217,24	± 0,12 = ± 0,72
H_β	476,2	76,3	76,1	76,2	76,2	476,20	± 0,02 = ± 0,12
H_γ	691,4	91,1	91,5	91,1	91,3	691,28	± 0,05 = ± 0,30

Für den Winkelabstand der Spectrallinien von der *D*-Linie (β) und die mittelst der obigen Gleichung (II) berechneten Unterschiede der Brechungsindices gelten folgende Zahlen:

Spectralbezirk	β		$N - N_D$
	in Trommelth.	in Winkelwerth	
$C - D$	− 105,68	− 10′ 35,9″	− 0,00329,4
$D - F$	258,96	25′ 38,1″	0,00800,7
$D - G'$	474,04	47′ 31,6″	0,01458,6

Die hieraus abgeleiteten optischen Constanten finden sich auf p. 629 in der Tabelle, in welcher die bezüglichen Werthe der sämmtlichen übrigen Körper zusammengestellt sind.

2. *Temperatur des siedenden Wassers:* $t_2 = 99,2°$.

Angaben der Trommeltheilung.

Marke	713,6	91,1	20,9	85,2	77,3
H_α	828,2	5,2	35,0	99,5	91,3
Na	934,8	11,4	41,1	6,0	97,5
H_β	1195,0	72,0	2,1	66,5	58,9
H_γ	1412,2	88,9	18,3	83,2	75,3

Abstand der Spectrallinien von der Marke.

						Mittel	w. Fehler
H_α	114,6	14,1	14,1	14,3	14,0	114,22	± 0,07 = ± 0,42″
Na	221,2	20,3	20,2	20,8	20,2	220,54	± 0,13 = ± 0,78
H_β	481,4	80,9	81,2	81,3	81,6	481,28	± 0,06 = ± 0,36
H_γ	698,6	97,8	97,4	98,0	98,0	697,96	± 0,13 = ± 0,78

Die vorstehenden Zahlen geben ein sehr deutliches Bild von der ausserordentlichen Genauigkeit der Beobachtungsmethode. Die fünf Versuchsreihen für jede der beiden Tempe-

raturen stimmen bis auf Zehntel-Trommeltheile unter sich überein. Der wahrscheinliche Fehler des Mittelwerthes ist meist geringer als $^1/_{10}$ Trommeltheil, im Winkelmaass gerechnet also ungefähr gleich $^1/_2$ Secunde. Die vorstehende Beobachtungsreihe ist zwar eine der besten der von mir erledigten, aber die übrigen stehen dieser nur wenig nach.

Die vorstehenden Angaben mögen zugleich zur Beurtheilung der Genauigkeit der in folgender Tabelle mitgetheilten Zahlenwerthe dienen. Die erste Columne enthält die durch die Temperaturerhöhung bewirkte Verschiebung der Spectrallinien (die Verschiebung findet in der Richtung nach dem blauen Ende des Spectrums statt und ist deshalb positiv zu rechnen), die zweite und dritte enthalten die Aenderungen der relativen Brechungsindices für das ganze Temperaturintervall, bez. für 1° C., und endlich sind in der letzten Columne die mit Hülfe der Reductionsformel (V) berechneten Werthe für $\Delta\mathfrak{N}$, die Aenderung des absoluten Brechungsindex für 1° C. Temperaturerhöhung, mitgetheilt. Die bezüglichen Werthe sind:

Linie	Verschiebung δ	$N_2 - N_1$	ΔN in Einheiten der 5. Decimale	$\Delta\mathfrak{N}$ in Einheiten der 5. Decimale
C	2,66 = 16,2″	− 0,00008,40	− 0,103	− 0,008
D	3,30 = 19,8″	10,23	0,125	0,014
F	5,08 = 30,7″	15,69	0,192	0,080
G′	6,68 = 40,3″	20,40	0,250	0,137

§ 5. Die übrigen Versuchsreihen.

Im ganzen wurden 12 verschiedene Glassorten aus dem glastechnischen Laboratorium untersucht, welche meist charakteristische Typen darstellen; ferner Quarz, Flussspath, Steinsalz und Sylvin.

Hr. Dr. Schott hatte die Freundlichkeit, mir folgende Angaben über die chemische Zusammensetzung der Gläser zu machen:

S. 57 (Fabrik-Nummer). *Schwerstes Silicatflint.*

Annähernd PbO 82 SiO_2 18 Proc.

O. 165. *Schweres Silicatflint.*

PbO	K_2O	SiO_2	As_2O_5	Mn_2O_3
69	2,5	28,36	0,1	0,04 Proc.

O. 544. *Gewöhnliches Silicatflint.*

PbO	K_2O	Na_2O	SiO_2	Mn_2O_3	As_2O_5
45,2	8,0	0,5	45,83	0,07	0,4 Proc.

O. 154. *Leichtes Silicatflint.*

PbO	K_2O	Na_2O	B_2O_3	SiO_2	Mn_2O_3	As_2O_5
33.0	8,0	3,0	1,5	54,22	0,08	0,2 Proc.

O. 658. *Leichtes Borosilicatflint.*

PbO 25, B_2O_3 31, SiO_2 32,7, kleinere Mengen Alkalien und Thonerde.

O. 527. *Baryt Leichtflint.*

BaO 20, PbO 10, ZnO 7, SiO_2 51,6, Rest Alkalien.

O. 211. *Schweres Bariumsilicat-Crown.*

BaO 29, ZnO 10,3, SiO_2 48,7, kleinere Mengen Alkalien und Borsäure.

O. 1022. *Gewöhnliches Silicat-Crown.*

K_2O	Na_2O	BaO	ZnO	B_2O_3	M_2O_3	As_2O_5	SiO_2
15,0	5,0	9,6	2,0	2,5	0,1	0,4	65,4 Proc.

S. 205. *Leichtes Borat-Crown.*

B_2O_3 69, Al_2O_3 18, Na_2O, Rest Baryt und etwas Arsensäure.

O. 627. *Borosilicat-Crown.*

K_2O	Na_2O	ZnO	B_2O_3	Mn_2O_3	As_2O_5	SiO_2
9,5	10,0	2,0	10,0	0,07	0,2	68,24 Proc.

S. 40. *Phosphat-Crown.*

P_2O_5 59,5, BaO 28, kleinere Mengen Borsäure und Arsensäure; ferner 3 Proc. Didymoxyd.

O. 225. *Leichtes Phosphat-Crown.*

P_2O_5 70,5, K_2O 12, Al_2O_3 10, kleinere Mengen Borsäure, Magnesium und Arsensäure.

Nach meinen Messungen ergaben sich zunächst für die *optischen Constanten* (Brechung und Dispersion) der verschiedenen Glassorten und der übrigen angegebenen Substanzen die in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellten Werthe. Unseren obigen Ausführungen entsprechend ist der Brechungsindex selbst nur für die D-Linie angegeben; zur Kennzeichnung der Dispersion dienen die Differenzen der Brechungsindices für die Intervalle $C-F$, $C-D$, $D-F$ und $F-G'$. Das erste Intervall umfasst den mittleren sichtbaren Theil des Spectrums und bezeichnet die *mittlere Dispersion* der Substanz. Diese

und der Brechungsindex für D bestimmen die Grösse der sogenannten *relativen Dispersion*, die sich durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\nu} = \frac{N_F - N_C}{N_D - 1}$$

darstellt. Die mit ν überschriebene Columne der Tabelle enthält die reciproken Werthe dieser Dispersionsgrösse, und wie man sieht, sind in den beiden Gruppen die einzelnen Substanzen in ihrer Reihenfolge so angeordnet, dass diejenigen mit grösserer relativer Dispersion (kleinerem ν) denen mit kleinerer relativer Dispersion (grösserem ν) vorangehen.

Bezeichnung	N_D	Mittl. Disper-sion $C-F$	$\nu = \frac{N_D-1}{N_F-N_C}$	Partielle Dispersion		
				$C-D$	$D-F$	$F-G'$
S. 57.	1,9625	0,04877	19,7	0,01336 0,274	0,03541 0,726	0,03235 0,663
O. 165.	1,7545	0,02738	27,6	0,00768 0,281	0,01970 0,720	0,01720 0,628
O. 544.	1,6130	0,01652	37,1	0,00472 0,286	0,01180 0,714	0,01004 0,608
O. 154.	1,5710	0,01324	43,1	0,00382 0,289	0,00942 0,711	0,00789 0,596
O. 658.	1,5452	0,01084	50,3	0,00320 0,296	0,00764 0,705	0,00622 0,574
O. 527.	1,5718	0,01130	50,6	0,00329 0,291	0,00801 0,709	0,00658 0,582
O. 211.	1,5727	0,00988	58,0	0,00295 0,298	0,00693 0,701	0,00560 0,567
O. 1022.	1,5173	0,00860	60,2	0,00254 0,295	0,00606 0,705	0,00475 0,552
S. 205.	1,5075	0,00838	60,6	0,00255 0,305	0,00583 0,696	0,00459 0,548
O. 627.	1,5128	0,00806	63,7	0,00241 0,299	0,00564 0.700	0,00449 0,557
S. 40.	1,5619	0,00845	66,5	0,00253 0,299	0,00592 0,701	0,00469 0,555
O. 225.	1,5160	0,00734	70,3	0,00219 0,299	0,00515 0,701	0,00402 0,548
Steinsalz v. Stassfurt	1,5440	0,01267	42,9	0,00367 0,290	0,00900 0,710	0,00748 0,590
Sylvin v. Stassfurt	1,4904	0,01110	44,2	0,00321 0,289	0,00789 0,711	0,00656 0,591

Bezeichnung	N_D	Mittl. Dispersion $C-F$	$\nu = \frac{N_D - 1}{N_F - N_C}$	Partielle Dispersion		
				$C-D$	$D-F$	$F-G'$
Quarz, extra-ord. Strahl	1,5533	0,00803	68,9	0,00243 0,303	0,00560 0,697	0,00438 0,546
Quarz, ord. Strahl	1,5442	0,00777	70,1	0,00236 0,304	0,00541 0,696	0,00425 0,547
Flussspath	1,4399	0,00452	96,1	0,00137 0,303	0,00315 0,697	0,00246 0,540

Die übrigen Intervalle dienen zur Charakteristik für den Verlauf der Dispersion in den verschiedenen Spectralregionen (partielle Dispersion). Die unterhalb dieser Zahlenwerthe stehenden und mit kleineren Ziffern angeführten Zahlen bedeuten die jedesmaligen Quotienten, die man erhält, wenn man die Differenz der Brechungsindices für das betreffende Theilintervall durch die mittlere Dispersion $C-F$ dividirt. Eine Zunahme dieser Quotienten gegenüber denjenigen anderer Substanzen deutet immer auf eine relative Steigerung der (partiellen) Dispersion in jener Spectralregion, mit anderen Worten, auf eine dort stattfindende Dehnung des Spectrums. So z. B. zeigt gleich die erste Glassorte (S. 57) im Vergleich zu allen folgenden Körpern eine auffallend starke relative Dispersionssteigerung im Blau (0,663), während das Roth (0,274) einen relativ geringen Spectralraum einnimmt. Etwas geringer, aber nicht minder charakteristisch für das optische Verhalten, sind die bei den übrigen Körpern auftretenden Schwankungen der bezüglichen Zahlenwerthe dieser partiellen Dispersionen.

Die Ergebnisse der *Temperaturuntersuchung* sind in den folgenden Tabellen enthalten.

Es bedeuten wieder, wie früher, die unter „Abstände" stehenden Zahlenwerthe die durch Messung mit der Mikrometerschraube ermittelten Einstellungsunterschiede zwischen Spectrallinie und Marke in Trommeltheilen. Die Verschiebung ist in Trommeltheilen und Winkelmaass angegeben. Endlich bedeutet ΔN die Aenderung des relativen, $\Delta \mathfrak{N}$ die Aenderung des absoluten Brechungsindex, in Einheiten der fünften Decimale und gültig für die Mitteltemperatur.

Die einzelnen Versuchsreihen sind in gleicher Reihenfolge

angeordnet wie in obiger Tabelle. Etwaige Bemerkungen sind an Ort und Stelle beigefügt. In denjenigen Fällen, in welchen die Temperaturvariation der Grösse $\Delta\mathfrak{N}$ festgestellt wurde, ist nur der Werth für $\Delta\mathfrak{N}_{0^0}$ angegeben und ausserdem die gefundene Temperaturformel.

S. 57. *Schwerstes Silicatflint.*

Brech. Winkel des Prismas $\varphi = 17^0\ 56'\ 52''$
Einfallswinkel für D $\alpha_0 = 37^0\ 12'\ 41''$.
Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. Barom. = 739 mm.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta\mathfrak{N}_{58,8^0}$
	18,5°	99,2°				
C	710,8	725,1	14,3	1′ 26,1″	1,336	1,204
D	887,7	904,4	17,0	1′ 42,3″	1,588	1,449
F	1360,0	1384,2	24,2	2′ 25,6″	2,231	2,090
G'	1795,9	1828,2	32,3	3′ 14,3″	2,954	2,810

O. 165. *Schweres Silicatflint.*

$\varphi = 29^0\ 10'\ 25''$
$\alpha_0 = 58^0\ 47'\ 15''$.
Die Marke liegt zwischen C und D. $b = 750$ mm.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta\mathfrak{N}_{56,7^0}$
	13,8°	99,6°				
C	− 66,3	− 43,6	22,7	2′ 16,5″	0,829	0,700
D	179,9	205,0	25,1	2′ 31,0″	0,906	0,775
F	825,2	859,0	33,8	3′ 23,3″	1,182	1,051
G'	1406,5	1449,2	42,7	4′ 16,8″	1,443	1,311

O. 544. *Gew. Silicatflint.*

$\varphi = 33^0\ 1'\ 56''$
$\alpha_0 = 61^0\ 32'\ 57''$.
Die Marke liegt zwischen C und D. $b = 735$.

Linie	Abstände		Verschiebung δ		ΔN	$\Delta\mathfrak{N}_{55,1^0}$	$\Delta\mathfrak{N}_{0^0}$
	11,1°	99,1°					
C	−148,8	−136,4	12,8	1′ 14,6″	0,360	0,244	0,113
D	35,5	49,3	13,8	1′ 23,0″	0,397	0,281	0,158
F	504,1	522,1	18,0	1′ 48,3″	0,506	0,389	0,264
G'	911,2	933,8	22,6	2′ 15,8″	0,621	0,503	0,377

$\Delta\mathfrak{N}_0$ wurde durch weitere Beobachtung der Abstände bei 24,0° erhalten. Es ist:

$$\Delta\mathfrak{N}_t = \Delta\mathfrak{N}_0 + 0{,}0023 \,.\, t.$$

O. 154. *Leichtes Silicatflint.*

$\varphi = 35^\circ\ 11'\ 35''$
$\alpha_0 = 64^\circ\ 52'\ 56''$.

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 738$.

Linie	Abstände 17,9°	Abstände 99,2°	Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{56,4^\circ}$
C	144,1	156,8	12,7	1′ 16,4″	0,336	0,225
D	321,0	335,2	14,2	1′ 25,5″	0,372	0,261
F	765,7	783,2	17,5	1′ 45,3″	0,446	0,334
G′	1148,2	1169,1	20,9	2′ 5,7″	0,520	0,407

O. 658. *Leichtes Borosilicatflint.*

$\varphi = 29^\circ\ 40'\ 23''$
$\alpha_0 = 49^\circ\ 54'\ 18''$.

Die Marke liegt zwischen *D* und *F*. $b = 738$.

Linie	Abstände 19,3°	Abstände 99,2°	Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{59,2^\circ}$
C	− 262,2	− 270,1	7,9	0′ 47,5″	0,376	0,267
D	− 177,1	− 185,8	8,6	0′ 51,7″	0,408	0,299
F	26,2	16,3	9,9	0′ 59,5″	0,466	0,356
G′	192,8	181,7	11,1	1′ 6,8″	0,520	0,410

O. 527. *Baryt Leichtflint*, ausführlich im vorigen Paragraphen enthalten.

O. 211. *Schweres Barium Silicat-Crown.*

$\varphi = 31^\circ\ 31'\ 43''$
$\alpha_0 = 55^\circ\ 19'\ 32''$.

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 737$.

Linie	Abstände 16,6°	Abstände 99,1°	Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{57,8^\circ}$
C	13,7	17,2	3,5	0′ 21,0″	0,132	0,021
D	106,5	110,5	4,0	24,1″	0,151	0,040
F	326,0	331,7	5,7	34,3″	0,215	0,103
G′	504,8	511,6	6,8	40,9″	0,255	0,142

O. 1022. *Gew. Silicat-Crown.*

$\varphi = 33^\circ\ 5'\ 40''$
$\alpha_0 = 55^\circ\ 56'\ 41''$.

Die Marke liegt zwischen *D* und *F*. $b = 743$.

Linie	Abstände 19,0°	Abstände 99,7°	Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{59,3^\circ}$
C	− 128,4	− 128,9	− 0,5	− 0′ 3,0″	− 0,020	− 0,129
D	− 43,1	− 42,9	0,2	0′ 1,2″	0,004	− 0,105
F	158,1	159,7	1,4	0′ 8,4″	0,050	− 0,060
G′	321,2	324,0	2,8	0′ 16,8″	0,101	− 0,010

S. 205. *Leichtes Borat-Crown.*

$\varphi = 33^0\ 4'\ 58''$
$\alpha_0 = 55^0\ 22'\ 30''$.

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 747$.

Linie	Abstände 20,5°	Abstände 99,5°	Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{60,0^0}$
C	73,1	74,2	1,1	0′ 6,6″	0,040	− 0,066
D	157,0	157,9	0,9	0′ 5,4″	0,033	− 0,074
F	349,7	351,7	2,0	0′ 12,0″	0,075	− 0,033
G'	502,6	505,4	2,8	0′ 16,8″	0,106	− 0,003

O. 627. *Borosilicat-Crown.*

$\varphi = 33^0\ 14'\ 50''$
$\alpha_0 = 56^0\ 2'\ 5''$

Die Marke liegt zwischen C und D. $b = 757$.

Linie	Abstände 5,8°	Abstände 99,9°	Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{52,8^0}$	$\Delta \mathfrak{N}_{0^0}$
C	− 65,0	− 57,6	7,4	0′ 44,5″	0.233	0,119	0,065
D	16,1	24,1	8,0	0′ 48,1″	0,251	0,137	0,105
F	206,0	215,4	9,4	0′ 56,5″	0,293	0,178	0,130
G'	357,5	368,1	10,6	1′ 3,8″	0,329	0,213	0,175

Die Werthe für $\Delta \mathfrak{N}_0$ wurden durch Beobachtung der Abstände für die weiteren Temperaturen: 9,0°, 35,0°, 18,7°, 21,1° und 100,0° erhalten. Die Temperaturvariation wird dargestellt durch

$$\Delta \mathfrak{N}_t = \Delta \mathfrak{N}_0 + 0{,}0008 \,.\, t.$$

S. 40. *Didymhaltiges Phosphat-Crown.*

$\varphi = 29^0\ 35'\ 1''$
$\alpha_0 = 50^0\ 27'\ 14''$

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 749$.

Linie	Abstände 21,0°	Abstände 99,6°	Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{60,3^0}$
C	378,4	379,2	− 4,2	−0′ 25,3″	− 0,204	− 0,314
D	445,5	441,5	− 4,0	−0′ 24,1″	− 0,194	− 0,305
F	603,3	600,5	− 2,8	−0′ 16,8″	− 0,134	− 0,246
G'	729,0	726,4	− 2,6	−0′ 15,6″	− 0,124	− 0,237

O. 225. *Leichtes Phosphat-Crown.*

$\varphi = 35^0 \ 2' \ 28''$

$\alpha_0 = 60^0 \ 30' \ 28''$.

Die Marke liegt am rothen Ende des Spectrums. $b = 751$.

Linie	Abstände 16,6°	99,7°	Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{58,1^0}$
C	31,8	28,8	− 3,0	−0′ 18,0″	− 0,093	− 0,202
D	119,3	116,7	− 2,6	−0′ 15,6″	− 0,080	− 0,190
F	326,2	324,3	− 1,9	−0′ 11,4″	− 0,057	− 0,168
G'	489,4	488,4	− 1,0	−0′ 6,0″	− 0,031	− 0,142

Steinsalz von Stassfurt.

$\varphi = 26^0 \ 17' \ 20''$

$\alpha_0 = 43^0 \ 8' \ 43''$.

Die Marke liegt im Blau. $b = 743$.

Linie	Abstände 18,2°	99,4°	Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{58,8^0}$
C	− 441,6	− 502,9	− 61,3	− 6′ 8,8″	− 3,639	− 3,749
D	− 365,3	− 426,6	− 61,2	− 6′ 8,5″	− 3,629	− 3,739
F	− 177,4	− 237,4	− 60,0	− 6′ 1,0″	− 3,537	− 3,648
G'	− 20,7	− 79,9	− 59,2	− 5′ 56,0″	− 3,473	− 3,585

Mit diesen Daten stimmen die Angaben von Stefan (l. c.) sehr gut überein:

Linie	12,2°—34°	18,8°—91,6°	20,5°—93,7°
B	—	− 3,74	− 3,74
D	− 3,72	− 3,76	− 3,70
F	—	− 3,65	− 3,62

Sylvin von Stassfurt.

$\varphi = 30' \ 1' \ 49''$

$\alpha_0 = 48^0 \ 14' \ 3''$.

Die Marke liegt am rothen Ende des Spectrums. $b = 744$.

Linie	Abstände 19,6°	99,4°	Verschiebung δ		ΔN	$\Delta \mathfrak{N}_{59,5^0}$
C	233,8	160,6	− 73,2	− 7′ 20,3″	− 3,575	− 3,681
D	316,3	243,7	− 72,6	− 7′ 16,7″	− 3,535'	− 3,641
F	520,3	448,0	− 72,3	− 7′ 14,9″	− 3,498	− 3,605
G'	690,9	619,2	− 71,7	− 7′ 11,3″	− 3,449	− 3,557

Stefan gibt an:

Linie	15°—42,7°	21°—94°
B	—	− 3,49
D	− 3,43	− 3,46
F	—	− 3,46

Quarz, ord. Strahl senkrecht zur optischen Axe.

Die optische Axe liegt parallel zur brechenden Kante des Prismas (vgl. p. 618).

$$\varphi = 29^0\ 58'\ 20''$$
$$\alpha_0 = 50^0\ 29'\ \ 6''.$$

Die Marke liegt am rothen Ende des Spectrums. $b = 743$.

Linie	Abstände 19,8°	99.4°	Verschiebung $\varDelta$		$\varDelta N$	$\varDelta \mathfrak{N}_{59,6°}$
C	107,3	95,8	− 11,5	− 1′ 9,2″	− 0,540	− 0,649
D	170,8	159,5	− 11,3	− 1′ 8,0″	− 0,529	− 0,638
F	316,7	306,2	− 10,5	− 1′ 3,2″	− 0,489	− 0,599
G′	431,9	421,9	− 10,0	− 1′ 0,2″	− 0,466	− 0,577

Quarz, ausserord. Strahl, senkrecht zur opt. Axe. Dasselbe Prisma.

C	350,5	336,5	− 14,0	− 1′ 24,3″	− 0,651	− 0,761
D	416,5	402,6	− 13,9	− 1′ 23,6″	− 0,644	− 0,754
F	468,9	555,8	− 13,1	− 1′ 18,8″	− 0,604	− 0,715
G′	688,8	676,1	− 12,7	− 1′ 16,4″	− 0,582	− 0,694

Zum Vergleich der vorstehenden Daten mit den Resultaten anderer Beobachter seien zunächst die Messungen von Fizeau (l. c.) angeführt:

		ord. Strahl	ausserord. Strahl
für $t = 20^0$	$\varDelta \mathfrak{N}_D =$	− 0,537	− 0,628
$t = 30^0$		− 0,548	− 0,644
$t = 40^0$		− 0,559	− 0,661.

Das von Fizeau angewandte Verfahren gründet sich bekanntlich auf die Messung der durch die Temperatur bewirkten Verschiebung von Newton'schen Streifen. Die Methode setzt die Kenntniss der Ausdehnungscoëfficienten des Quarzes senkrecht und parallel zur optischen Axe voraus. Hr. Dufet[1]) hat nun aber nachgewiesen, dass, wenn man statt der von Fizeau zur Berechnung der Temperaturvariationen benutzten Ausdehnungscoëfficienten die durch die Arbeiten von Benoit[2])

1) l. c. p. 47.

2) Benoit, Mesures de dilatations par la méthode de Fizeau. Mem. du bureau international des poids et mesures **6.** p. 190. 1888.

genauer bekannt gewordenen Werthe benutzt, die obigen Werthe sich nicht unbeträchtlich verschieben. Auf diese Weise neu berechnet erhielt Dufet aus den Fizeau'schen Beobachtungen:

(im Mittel) $-0{,}600$ $-0{,}714$,

wobei noch als besonders bemerkenswerth hervorzuheben ist, dass eine Abhängigkeit dieser Werthe von der Temperatur, wie sie in den obigen Angaben auftritt, jetzt nicht mehr vorhanden ist.

Als Resultat seiner eigenen Messungen, die ebenfalls mit Hülfe eines Interferenzverfahrens gewonnen sind, gibt Dufet an:

$$\Delta \mathfrak{N}_t = -(0{,}625 + 0{,}00005\,t) \qquad -(0{,}722 + 0{,}00037\,t)$$

Hieraus geht hervor, dass die Veränderung der Grösse $\Delta \mathfrak{N}$ mit der Temperatur zwar im Sinne einer Zunahme des absoluten Werthes erfolgt, aber doch erheblich geringer ist, als es nach den früheren Fizeau'schen Zahlen den Anschein hatte.

Die in obiger Tabelle (für die D-Linie) angeführten Werthe sind, wie man sieht, in *sehr guter* Uebereinstimmung mit den vorstehenden Resultaten.

Grössere Abweichungen zeigen die von Hrn. G. Müller[1] gefundenen Temperaturvariationen, welche durch directe spectrometrische Bestimmung der Brechungsindices bei verschiedenen Temperaturen erhalten wurden. Doch sind die Unterschiede zwischen seinen Resultaten und den Fizeau'schen nicht so gross, wie Hr. Müller annimmt. Die Angaben des Hrn. Müller bedürfen nämlich, bevor man sie mit den Fizeau'schen Zahlen zusammenstellt und vergleicht, noch der Reduction auf den leeren Raum oder auf Luft von constanter Temperatur, ein Umstand, der von Hrn. Müller übersehen wurde. Führt man nach den oben besprochenen Grundsätzen diese Reduction aus, so erhält man statt der Angaben von Müller

$-0{,}447$ $-0{,}471$ (Mittel der für verschiedene Strahlen gemachten Beobachtungen und gültig für eine Mitteltemperatur von 10° C.)

die folgenden Werthe:

$-0{,}601$ und $-0{,}626$,

1) l. c.

welche also von den Fizeau'schen sich nur wenig unterscheiden.

Die gleiche Correctur ist an den von Hrn. Müller mitgetheilten Temperaturvariationen einiger Gläser und des ordentlichen Strahles von Kalkspath anzubringen. Gegenüber dem von Fizeau für Kalkspath ord. Strahl gefundenen Werth 0,057, der auch durch die Vogel'schen Messungen bestätigt wird, ist der von Hrn. Müller angegebene Werth 0,234 viel zu gross, während die Reduction auf den leeren Raum für $\Delta\mathfrak{N}$ den mit den obigen Angaben fast identischen Werth 0,077 ergibt.

Flussspath.

$$\varphi = 25^0\ 20'\ 43''$$
$$\alpha_0 = 37^0\ 51'\ 57''.$$

Die Marke liegt auf der rothen Seite des Spectrums. $b = 748$.

Linie	Abstände 21,5°	99,6°	Verschiebung δ		ΔN	$\Delta\mathfrak{N}_{60,5^0}$	$\Delta\mathfrak{N}_{20,1^0}$ (5,0—35,2°)
C	60,1	43,9	−16,2	−1′ 37,5″	−1,118	−1,220	−1,421
D	85,5	69,5	−16,0	−1′ 36,3″	−1,104	−1,206	−1,420
F	144,1	128,6	−15,5	−1′ 33,3″	−1,067	−1,170	−1,347
G′	190,0	174,9	−15,1	−1′ 30,9″	−1,039	−1,142	—

Fizeau erhielt für 33,5° den Werth − 1,36 und nach den Stefan'schen Messungen ist $\Delta\mathfrak{N}$ für eine Mitteltemperatur von 57,3°.

$$D - 1{,}24;\quad F - 1{,}23;\quad H - 1{,}24.$$

Man sieht bei einem Vergleich der Werthe untereinander, dass eine nicht unbeträchtliche Veränderung von $\Delta\mathfrak{N}$ mit der Temperatur stattfindet. Dieselbe erfolgt aber in umgekehrtem Sinne wie bei Quarz. Hier nimmt der absolute Werth der Grösse $\Delta\mathfrak{N}$ mit wachsender Temperatur ab, während für Quarz eine geringe Zunahme constatirt wurde.

§ 6. Discussion der Beobachtungsresultate.

Wir stellen zunächst die Ergebnisse der Messungen in nachfolgender Tabelle übersichtlich zusammen. Und um endlich auch einen bequemen Ueberblick über den relativen Verlauf der Temperaturvariationen von Farbe zu Farbe erhalten, sind die sämmtlichen beobachteten Werthe $\Delta\mathfrak{N}$ in Curven graphisch

dargestellt (Fig. 2 Taf. VIII). In dieser Figur gelten die reciproken Werthe der Quadrate der Wellenlängen als Abscissen. Als Ordinaten sind die beobachteten Werthe $\Delta\mathfrak{N}$ eingezeichnet, und zwar so, dass die positiven Grössen von dem Nullstrich nach oben, die negativen von demselben Nullstrich nach unten gezählt sind.

Was auf den ersten Blick in die Augen fällt, ist der übereinstimmende Charakter in dem Verlauf sämmtlicher Curven. Man sieht, dass alle Curven, unbekümmert um den Nullstrich, nach dem blauen Ende des Spectrums mehr oder weniger ansteigen, sowohl bei den Curven oberhalb, als auch bei denjenigen unterhalb des Nullstrichs. Wir können also den *Satz* aussprechen, *dass für alle von uns untersuchten Substanzen eine Steigerung des Dispersionsvermögens mit wachsender Temperatur eintritt.* Denn da, wo das Brechungsvermögen mit der Temperatur zunimmt, sind die bezüglichen Temperaturvariationen im Blau grösser als im Roth, und in Fällen, wo die Brechungsindices mit der Temperatur abnehmen, ist die Abnahme im Blau kleiner als im Roth; d. h. also, in allen Fällen wird das Spectrum gedehnt. Auch die als Specialfall immerhin bemerkenswerthe Erscheinung, dass für eine der untersuchten Glassorten (O. 527) im Roth negative, im Blau positive Aenderungen vorliegen und für einen mittleren Spectralbezirk der Einfluss der Temperatur auf den Brechungsindex ganz verschwindet, ist wie alle anderen im Sinne einer Dispersionszunahme.

Dieselbe Erscheinung hat Vogel (l. c. 1885) für einige von ihm untersuchte Gläser und für den ordentlichen und ausserordentlichen Strahl von Kalkspath beobachtet. Dagegen schien nach den Untersuchungen von Stefan (1871) für die Körper Flussspath, Sylvin und Steinsalz jede Dispersionsänderung ausgeschlossen zu sein und für *Quarz* hatte Hr. Müller (1885) sogar eine geringe Abnahme der Dispersion aus seinen Beobachtungen abgeleitet.

Aenderungen des Brechungsindices und der Dispersion mit der Temperatur (vgl. Fig. 2 Taf. VIII).

enennung	Mittel-temperatur	C	D	F	G'	relative Steigerung d. Dispersion $\frac{-\Delta \nu}{\nu} \cdot 100$
		in Einheiten der 5. Decimale				
. Schwerstes ilicatflint	58,8°	1,204	1,447	2,090	2,810	0,0166
5. Schweres ilicatflint	56,7°	0,700	0,775	1,051	1,311	0,0118
4. Gewöhn-s Silicatflint	55,1°	0,244	0,281	0,389	0,503	0,0083
54. Leichtes ilicatflint	58,4°	0,225	0,261	0,334	0,407	0,0078
58. Leichtes rosilicatflint	59,2°	0,267	0,299	0,356	0,410	0,0077
527. Baryt ,eichtflint	58,3°	−0,008	0,014	0,080	0,137	0,0079
11. Schweres Silicat-Crown	57,8°	0,021	0,040	0,103	0,142	0,0082
22. Gewöhn-Silicat-Crown	59,3°	−0,129	−0,105	−0,060	−0,010	0,0082
05. Leichtes rat-Crown	60,0°	−0,066	−0,074	−0,033	−0,003	0,0041
. Borosilicat-Crown	52,8°	0,119	0,137	0,178	0,213	0,0072
Didymhaltiges sphat-Crown	60,3°	−0,314	−0,305	−0,246	−0,237	0,0086
25. Leichtes sphat-Crown	58,1°	−0,202	−0,190	−0,168	−0,142	0,0049
lz von Stassfurt	58,8°	−3,749	−3,739	−3,648	−3,585	0,0148
von Stassfurt	59,5°	−3,681	−3,641	−3,605	−3,557	0,0143
z ord. Strahl kr. zur Axe	59,6°	−0,649	−0,638	−0,599	−0,577	0,0076
z ausserord. senkr. zur Axe	59,6°	−0,761	−0,754	−0,715	−0,694	0,0071
'lussspath	60,5°	−1,220	−1,206	−1,170	−1,142	0,0137
ath ord. Strahl ch Vogel)	103°	0,071	0,081	0,091	0,100	0,0137
ath ausserord. Strahl	103°	1,012	1,020	1,073	1,090	0,0078

Bestimmte, im folgenden näher ausgeführte Gründe hatten mich veranlasst, diese letzteren vier Körper einer erneuten experimentellen Untersuchung zu unterwerfen, und Dank der hohen Leistungsfähigkeit der angewandten Methode hat sich meine Vermuthung, dass auch bei diesen Körpern eine Dispersionsänderung im Sinne einer Zunahme vorhanden sein *müsse*, in unzweideutiger Weise bestätigt.

Die Dispersionszunahme mit wachsender Temperatur scheint sogar sämmtlichen durchsichtigen festen Körpern eigen zu sein, denn die gleiche Erscheinung hat kürzlich Offret[1]) an zehn ein- und zweiaxigen Krystallen (in der Anmerkung p. 610 namhaft gemacht) ebenfalls beobachtet. Flüssigkeiten und Gase zeigen bekanntlich das entgegengesetzte Verhalten, die Dispersion nimmt ab und bleibt nur in wenigen Fällen constant.

Wir stehen somit vor einer Erscheinung, welche mit Rücksicht auf den theoretischen Zusammenhang von Brechungsvermögen und Dichte nicht weniger auffallend ist als das anfangs erwähnte Auftreten von positiven Temperaturvariationen, die uns aber den Schlüssel zu der Erklärung gegeben hat. Ich werde im nächsten Theile versuchen nachzuweisen, dass die Erscheinung als eine Wirkung der anomalen Dispersion aufzufassen ist, hervorgerufen durch das mit der Temperatur wachsende Absorptionsvermögen der durchsichtigen festen Körper.

Ehe wir im einzelnen auf diese Erklärung selbst eingehen, wollen wir vorher noch einen kurzen Blick auf die Stärke der Dispersionszunahme für die einzelnen Körper werfen. Schon aus dem grösseren oder geringeren Abfall der einzelnen Curven in obiger Figur geht hervor, dass die Zunahme der Dispersion nicht für alle Körper die gleiche ist. Dieselbe ist offenbar am stärksten bei den Flintgläsern, am geringsten bei den Phosphat- und Boratgläsern und bei Quarz. Die relative Stärke dieser Dispersionssteigerung, bezogen auf die p. 629 erwähnte Grösse $1/\nu$, welche uns als Maass der Dispersion diente, wird durch den Ausdruck $-\Delta\nu/\nu$ dargestellt, unter $\Delta\nu$ die Aenderung von ν pro 1° C. Temperaturerhöhung verstanden. Eine einfache Rechnung ergibt für diesen letzteren Ausdruck:

1) l. c.

$$\Delta \nu = \frac{\nu}{\mathfrak{N}_D - 1}\left[\Delta \mathfrak{N}_D - \nu(\Delta \mathfrak{N}_F - \Delta \mathfrak{N}_C)\right],$$

nach welcher Gleichung die sämmtlichen mit 100 multiplicirten Werthe der obigen Tabelle berechnet worden sind. Da $\Delta\nu$ in allen Fällen, wenn auch sehr klein (für 1° C. im Mittel gleich 0,01 Proc.), negativ ist, so erscheinen die obigen Zahlen überall mit dem positiven Vorzeichen behaftet. Die für die einzelnen Körper vorhandenen Unterschiede in den stattfindenden Dispersionserhöhungen treten noch stärker hervor, wenn wir nicht, wie in der Tabelle geschehen, die relativen, sondern die absoluten Beträge der Dispersionssteigerungen ausrechnen, welche durch den Ausdruck $-\Delta\nu/\nu^2$ erhalten werden.

II. Theil.

Schlussfolgerungen.

In dem vorstehenden I. Theil habe ich die Ergebnisse einer auf zwölf verschiedene Glassorten und mehrere durchsichtige Mineralien ausgedehnten Experimentaluntersuchung mitgetheilt. Es soll jetzt versucht werden, eine Erklärung für die gefundenen Resultate zu geben.

Man hat bisher, wenn von den Temperaturvariationen der Brechungsindices eines Körpers die Rede war, dieselben immer durch die Veränderungen der Dichte oder des Volumens, welche der Körper durch den Einfluss der Temperatur erleidet, zu erklären gesucht. Bei der Natur der in Frage kommenden Einwirkung erscheint es aber als höchst unwahrscheinlich, dass die Volumänderung die einzige Wirkungsäusserung der Temperatur sei. Ebensowenig wie die durch Wärme bewirkte Dilatation eines Körpers mit derjenigen Dilatation zu identificieren ist, die man erhält, wenn man den Körper mechanischen (Zug-) Kräften unterwirft, ebenso wenig dürfen wir von vornherein eine Uebereinstimmung in Bezug auf das optische Verhalten erwarten, wenn die gleiche Volumänderung durch die eine oder die andere der beiden Ursachen hervorgerufen wird. Auf einen diesbezüglichen Unterschied in dem Verhalten von Quarz hat vor Kurzem Herr Pockels [1]) aufmerksam gemacht. Durch

1) Pockels Ann. **37.** 305. 1889.

den Einfluss der Wärme werden die kleinsten Theilchen des Körpers nicht allein in immer grösseren Abstand von einander gebracht, sondern auch in einen lebhafteren Schwingungszustand versetzt, und es können gerade hierdurch Kräfte geweckt oder verstärkt werden, die nunmehr ihrerseits einen Einfluss auf die Lichtgeschwindigkeit ausüben. Auch spielt der Aggregatzustand dabei eine nicht unwesentliche Rolle und es ist klar, dass bei den festen Körpern, ganz besonders bei den Krystallen, wegen des complicirten Aufbaues derselben, die in Betracht kommenden Molecularkräfte recht verwickelter Natur sein können.

Unter diesen ist keine für die Brechungs- und Dispersionsverhältnisse eines Körpers von solcher Wichtigkeit wie das *Absorptionsvermögen.* Seit der Entdeckung der sogenannten anomalen Dispersion ist bekannt, welche enormen Modificationen in dem Verlauf der Brechungsindices von Farbe zu Farbe statthaben können, wenn kräftig wirkende Absorptionen vorhanden sind, und man weiss auch, dass die als farblos oder durchsichtig bezeichneten Körper durchaus nicht dieser Absorptionswirkung entbehren (vergl. den nächsten Paragraphen). Die Lage dieser Absorptionsgebiete ist jedoch dem beobachtenden Auge entrückt und nur die letzten Ausläufer dieser Absorptionswirkung ragen bis in das sichtbare Spectrum hinein. Aber auch bei diesen sogenannten farblosen Körpern tritt die innige Beziehung zwischen dem Absorptions- und Dispersionsvermögen deutlich zu Tage, wie schon daraus erhellt, dass fast alle Körper mit relativ hoher Dispersion wenig durchlässig für violette und ultraviolette Strahlen sind. Es ist sogar nicht unwahrscheinlich, dass der ganze moleculare Vorgang, dem die Dispersion ihren Ursprung verdankt, nur auf einer einfachen Absorptionswirkung kurzwelliger Strahlen beruht.

Es ist bemerkenswerth, dass in keiner der bisherigen Arbeiten über den Einfluss der Temperatur auf die Lichtbrechung fester durchsichtiger Körper auch nur die Möglichkeit einer Aenderung des Absorptionsvermögens zur Sprache gebracht worden ist. Wäre das geschehen, so würde das früher bezeichnete Verhalten des Glases schon lange den Charakter einer auffälligen und unerklärbaren Erscheinung verloren haben.

Unsere Behauptung, die wir im Stande sind in einigen besonders eclatanten Fällen direct durch das Experiment zu erhärten, im übrigen durch eine Reihe von Schlussfolgerungen, die sich aus unseren Beobachtungen ergeben und im Wesen der anomalen Dispersion begründet sind, ausserdem noch durch eine bisher noch nicht erkannnte Gesetzmässigkeit in dem Verhalten der durchsichtigen festen Körper zu dem Satze vom constanten Brechungsvermögen zu unterstützen, ist demnach folgende:

Zur Erklärung für das Verhalten der Brechungsindices durchsichtiger fester Körper unter dem Einfluss der Temperatur ist die Annahme einer neben der Volumänderung herlaufenden Vergrösserung des Absorptionsvermögens im blauen und ultrablauen Theile des Spectrums nicht nur nothwendig, sondern auch vollständig ausausreichend. Die beiden Ursachen sind in ihren Wirkungen einander entgegengesetzt, die Abnahme der Dichte vermindert den Index, die sich steigernde Absorption im Blau erhöht denselben wieder; jenachdem nun die eine oder andere der beiden Wirkungen überwiegt, haben wir es mit einer Abnahme oder mit einer Zunahme des Brechnungsindex zu thun (vergl. Fig. 2 p. 661); *wenn die beiden Wirkungen sich gerade aufheben, bleibt der Brechungsindex anscheinend ganz befreit von dem Einfluss der Temperatur.*

Bei den relativ sehr geringen Dichteänderungen der festen Körper sind von vornherein alle drei Fälle möglich und nur dem Umstand, dass die Ausdehnungscoefficienten des Glases beträchtlich kleiner sind, als die der meisten übrigen festen Körper, ist es zuzuschreiben, dass bei den Gläsern die *positiven* Temperaturvariationen der Brechungsindices überwiegen. Auch unter den Krystallen giebt es solche mit positiven und andere mit negativen Temperaturvariationen, doch treten die ersteren meist da auf, wo auch die kubischen Ausdehnungscoefficienten sehr klein sind (Kalkspath, Beryll u. A.).

Eine Sonderstellung kann somit den Gläsern nach unserer Erklärung nicht mehr zugeschrieben werden, anomal bleibt die Erscheinung, welche das Auftreten positiver Temperaturvariationen der Brechungsindices darbietet, nur in dem Sinne, in welchem man auch die Erscheinung der „anomalen Dispersion“ auffasst. Aber auch in Bezug auf die übrigen Körper er-

scheint die Erklärung von Bedeutung, weil dadurch es möglich ist, die Abweichungen in dem Verhalten dieser Körper von dem Satze der Proportionalität zwischen Brechungsvermögen und Dichte auf eine andere Weise als bisher zu deuten.

Von besonderem Interesse ist in dieser Hinsicht das Verhalten der *Metalle*. Nach den Untersuchungen von Herrn Kundt[2]) nimmt der Brechungsindex der Metalle ebenfalls mit der Temperatur zu. Auch ist diese Zunahme (pro 1° C. 0,00370) mit Rücksicht auf den Ausdehnungscoefficienten der Metalle, der nur wenig denjenigen der Gläser überschreitet, so enorm gross, dass hier jeder etwaige Zusammenhang zwischen Dichte und Brechungsvermögen verschwindet. Vielleicht genügt schon die Annahme einer Veränderlichkeit des ausserordentlich hohen Absorptionsvermögens mit der Temperatur, um das Verhalten der Metalle in derselben Weise zu erklären, wie dasjenige der Gläser. Eine Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten von der Farbe, also eine Aenderung der Dispersion, hat Hr. Kundt nicht feststellen können.

§ 1. Directe Versuche zum Nachweis einer Steigerung des Absorptionsvermögens des Glases mit wachsender Temperatur.

Im Anschluss an die vorliegende Untersuchung habe ich es unternommen, die hauptsächlichsten Glastypen aus dem Glastechn. Laboratorium zu Jena einer quantitativen photometrischen Prüfung zu unterziehen, wobei insbesondere auch die Veränderungen, welche das Absorptionsvermögen dieser Körper durch die Temperatur erleidet, berücksichtigt werden sollen. Doch sind diese Messungen, welche auf das sichtbare Spectrum beschränkt bleiben, und zu welchen das Glan'sche Photometer benutzt wird, noch nicht so weit vorgeschritten, um über dieselben jetzt schon Bericht erstatten zu können.

Ich werde mich deshalb hier darauf beschränken, durch einige qualitative Versuche nachzuweisen, dass in der That eine Veränderung in der Absorptionswirkung des Glases mit

1) A. Kundt, Wied. Ann. **36.** p. 824. 1889.

der Temperatur stattfindet, die in einigen Fällen so auffällig zu Tage tritt, dass sie ohne Weiteres mit dem blossen Auge erkannt werden kann.

Zu dem Ende wurden Stücke der einzelnen Glassorten nebeneinander in eine Porzellanschale gelegt. und diese durch einen Bunsen'schen Brenner auf 200°, 300° und höher bis zur Schmelztemperatur des Glases, welche ungefähr bei 400° liegt, erhitzt. Machten sich schon bei gewöhnlicher (Zimmer-) Temperatur die Unterschiede in der Absorptionsfähigkeit der einzelnen Glassorten durch eine mehr oder weniger stark ausgesprochene Gelbfärbung bemerkbar, so traten diese Unterschiede bei erhöhter Temperatur immer schärfer hervor. Während das fast farblose Borosilicat-Crown O. 144 (ähnlich O. 627) wenig oder gar keine Aenderung für den blossen Anblick darbot, erschien das bei gewöhnlicher Temperatur fast vollkommen farblose Phosphatglas O. 168 (ähnlich O. 225) bei erhöhter Temperatur intensiv gelb, und bei denjenigen Gläsern, welche schon bei gewöhnlicher Temperatur eine mehr oder weniger starke Gelbfärbung besitzen, so z. B. bei dem Boratglas O. 134 und bei sämmtlichen Flintgläsern, erhöht sich diese Gelbfärbung in geradezu schlagender Weise.

Letzteres ist namentlich der Fall bei dem stark brechenden Silicatflint S. 57. Hier genügte schon die Siedehitze des Wassers, um eine deutlich wahrnehmbare Steigerung der Gelbfärbung herbeizuführen und umgekehrt nahm bei der Abkühlung — der Versuch wurde mit fester Kohlensäure, in Aether gelöst, ausgeführt —, die Färbung ab, das Glas erschien merklich blasser. Wurde dann die Erwärmung von S. 57 in der oben beschriebenen Weise auf höhere Temperaturen ausgedehnt, so nahmen die erwähnten Glasstücke allmählich die Farbe von dunklem Bernstein an, und wenn diejenige Temperatur erreicht war, wo ein Erweichen des Glases eintrat, sah das Glas dunkelroth bis braun aus. Mit dem Spectroscop in diesem Zustand untersucht, ergab sich das Resultat, dass schon bei geringer Dicke der durchstrahlten Schicht die ganze blaue Seite des Spectrums bis auf einen kleinen Theil im Roth absorbirt war. Beim Abkühlen trat wieder die ursprüngliche helle Gelbfärbung ein. Auch konnte der Versuch mit dem gleichen Erfolg beliebig oft wiederholt werden. Daraus

geht also hervor, dass der Vorgang *nicht durch chemische Veränderungen veranlasst, sondern rein physikalischer Natur ist.*

Noch eine andere Erscheinung, die sich bei diesen Erhitzungsversuchen darbot, erscheint mir erwähnenswerth, da dieselbe geeignet ist, eine Erklärung für das von F. Vogel[1]) beobachtete Anwachsen der Temperaturvariationen der Brechungsindices von Flintgläsern für höher gelegene Temperaturen zu geben, die Erscheinung nämlich, dass die Zunahme der Gelbfärbung des erhitzten Glases S. 57 viel schneller bei *höheren* Temperaturen erfolgt als bei niederen, mit anderen Worten, dass die Temperaturvariationen der Extinctionscoefficienten mit der Temperatur einen Zuwachs erleiden. —

Die beschriebenen Versuche stehen, wie Hr. Dr. Schott mir freundlichst mittheilte, in vollständigem Einklang mit den Erfahrungen des Glaswerks. Mehr oder weniger zeigen fast alle Gläser, wenn sie eben unter die Temperatur des Selbstleuchtens in den Schmelzhäfen erkaltet sind, eine grössere Absorptionsfähigkeit für durchfallende Strahlen, als im völlig abgekühlten Zustande. Auch bei anderen festen Körpern hat man die Erscheinung der Absorptionssteigerung mit wachsender Temperatur schon früher beobachtet, so insbesondere beim Schwefel[2]), beim Phosphor, Zinkoxyd, Bleioxyd etc. und einer Anzahl von mineralischen Substanzen, z. B. dem Rubin-Spinell[3]). Alle Substanzen nehmen nach dem Erkalten die ursprüngliche Farbe wieder an. Auch bei Gasen tritt in einigen Fällen eine erhebliche Steigerung des Absorptionsvermögens ein, so z. B. beim Jodgas, bei welchem bekanntlich die Erscheinung der anomalen Dispersion zuerst beobachtet wurde.

Ich hoffe die bei den Gläsern beobachtete Steigerung des Absorptionsvermögens mit der Temperatur durch die in Aussicht genommenen photometrischen Untersuchungen im einzelnen noch etwas genauer verfolgen zu können, im Uebrigen aber können die erhaltenen Resultate schon jetzt als eine

---

1) F. Vogel, Wied. Ann. **25.** p. 87. 1885.

2) Hierüber und über die optischen Constanten des prismatischen Schwefels bei verschiedener Temperatur vgl. die Arbeit von A. Schrauf. Z. f. Krystallogr. **18.** p. 113. 1890.

3) Brewster, Optik **1.** p. 121. 1835.

directe experimentelle Bestätigung der Schlussfolgerungen der folgenden Paragraphen angesehen werden.

Bei der gegenwärtigen Untersuchung kam mit Ausnahme der Glassorte S. 40 nur optisches, von färbenden Beimengungen und Verunreinigungen möglichst befreites Glas zur Verwendung. Es war aber von grossem Interesse, den Einfluss solcher Beimengungen bei verschiedenen Temperaturen zu erforschen. Aus diesem Grunde wurde das Glas S. 40, dem 3 proc. Didymoxyd zugesetzt war, der Prüfung unterworfen (siehe oben p. 633) Das sonst farblose Glas hatte durch den Zusatz des Didymoxyds eine schwach rosa Färbung angenommen, und zeigte das characteristische Absorptionsspectrum des letzteren. Die Erhitzungsversuche ergaben folgendes Resultat. Die rosa Färbung machte bei höherer Temperatur einer mehr grünlichen Platz, die schmalen Absorptionsstreifen im Grün verschwanden und der breite scharf markirte Streifen bei *D* erfuhr eine geringe seitliche Verschiebung nach dem rothen Theile des Spectrums. [1]) Für die Temperaturvariationen der Brechungsindices scheinen aber diese Veränderungen von geringerer Bedeutung zu sein, als diejenigen, welche in dem Absorptionsvermögen des Glases selbst statt haben und die als eine specifische Eigenschaft desselben, wenigstens eines grösseren Bestandtheils anzusehen sind.

§ 2. Die Absorptionswirkung der sogenannten durchsichtigen Körper, hergeleitet aus dem Verlauf der Dispersionscurve.

Ehe wir dazu übergehen, die Veränderungen im Verlauf der Dispersionscurve mit der Temperatur zu besprechen, wollen wir versuchen, etwas genauer darzulegen, welchen Einfluss bei constanter Temperatur etwa vorhandene Absorptionen auf den Verlauf der Refractionscurve ausüben, und wie man im Stande ist, aus dem Verlauf der Refractionscurve allein sichere Schlüsse auf die Existenz von ausserhalb des sichtbaren Spectrums liegenden Absorptionsstreifen zu ziehen.

Da für die von uns untersuchten Körper nur ultrarothe und ultrablaue Absorptionen in Betracht kommen so haben

---

2) Ueber Beobachtungen dieser Art vgl. Rizzo, Atti di Torino. **16.** p. 442. 1890—91. Brewster, l. c.

wir für jedes der beiden Absorptionsgebiete unsere Aufmerksamkeit nur auf denjenigen Theil der Refractionscurve zu richten, welcher von der Mitte des betreffenden Absorptionsstreifens dem sichtbaren Spectrum zugewandt ist. Die Erscheinung der „anomalen Dispersion" macht sich also in folgender Weise bemerkbar. Die ultrarothen Absorptionen bewirken eine Senkung der Refractionscurve, die ultrablauen eine Hebung derselben; auf der rechten Seite der unten stehenden Fig. 1 findet also eine Erhöhung, auf der linken eine Verminderung der Brechungsindices statt und zwar ist für jeden einzelnen Punkt der modificirten Refractionscurve die Abweichung von der Refractionscurve des absorptions*freien* Körpers um so grösser, je näher der Strahl dem rothen oder blauen Ende des Spectrums gelegen ist. Mit anderen Worten, unter dem Einfluss jeder einzelnen Absorption sowohl, wie auch unter dem vereinigten beider Absorptionen wird eine Dehnung des Spectrums herbeigeführt, oder was dasselbe sagt, eine *Steigerung der Dispersion.* Ueberwiegt dabei die Absorptionswirkung im Blau, so ist natürlich die Dispersionssteigerung dort auch grösser als im Roth und umgekehrt ist es bei einer überwiegenden Absorption im Roth. Die Resultate, die wir auf diese Weise aus dem Verlauf der Refractionscurve für die Existenz von entfernten und selbst weit entlegenen Absorptionsgebieten gewinnen, können somit als *ebenso zuverlässig betrachtet werden, als die auf directen photometrischen Methoden beruhenden Messungen.*

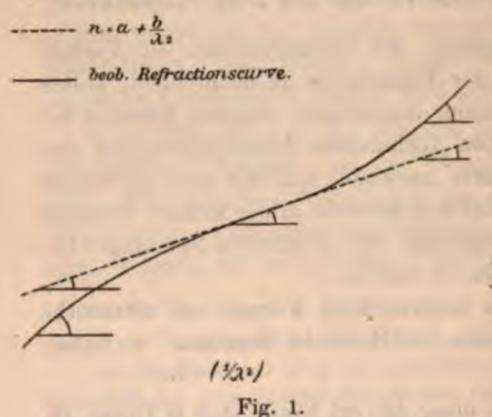


Fig. 1.

Nach dem Vorgange von Sellmeyer bezeichnen wir als Refractionscurve diejenige Curve, deren Abscissen die reciproken Werthe der Quadrate der Wellenlängen und deren Ordinaten die Brechungsindices bedeuten. Da diese Curve für die meisten durchsichtigen Körper sich angenähert durch die Cauchy'sche Dispersionsformel $n = a + b/\lambda^2$ dar-

stellen lässt, welche Gleichung in Bezug auf die gewählten Abscissen ($1/\lambda^2$) eine gerade Linie mit constantem Neigungswinkel gegen die Abscissenaxe bedeutet (siehe Fig. 1), so kann man durch Bildung des Neigungswinkels für jeden einzelnen Spectralbezirk die Constanz desselben prüfen und damit den Verlauf der Refractionscurve von Farbe zu Farbe genau feststellen. Der Neigungswinkel selbst wird durch folgende Beziehung erhalten:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{n_2 - n_1}{\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}} = \frac{\delta n}{\delta 1/\lambda^2},$$

in welchem Ausdruck n_2 und λ_2 auf Strahlen kürzerer, n_1 und λ_1 auf Strahlen grösserer Wellenlänge sich beziehen.

Dieses zuerst von Sellmeyer[1]) zur Unsersuchung der Absorptionswirkung durchsichtiger Körper angewandte Verfahren wurde bei der gegenwärtigen Arbeit verwerthet. Die Resultate der Rechnung sind in den beiden folgenden Tabellen zusammengestellt. Als Einheit für die Wellenlänge gilt das Tausendstel mm. Die erstere Gruppe enthält diejenigen Körper, deren Refractionscurven nach neueren Messungen weit über die Grenzen des sichtbaren Spectrums bekannt sind, die zweite enthält die 12 von mir untersuchten Glassorten. Die zur Berechnung der Neigungstangenten benutzten Indices von Quarz, Flusspath, Steinsalz und Flintglas, letzteres nach Maassgabe seiner Brechung und Dispersion ($N_D = 1.5797$ $\gamma = 41.3$)[2]) ein leichtes Silicatflint, wurden den Angaben von Ketteler, Theoretische Optik p. 543 u. ff. entnommen; für Kalkspath wurden die Sarasin'schen Werthe[3]) zu Grunde gelegt. Die sämmtlichen Werthe wurden in Curven aufgetragen und diesen dann die in der Tabelle stehenden Angaben entnommen. Für die Gläser endlich wurde unter Benutzung der Productionsliste des Glastechn. Laboratoriums, in welcher die Brechungsindices auch für A angegeben sind, die Neigungstangente im Ganzen für 4 Spectralbezirke berechnet.

---

1) Sellmeyer, Pogg. Ann. **143.** p. 272. 1871.
2) Langley, Wiedem. Ann. **22.** p. 598. 1884.
3) Sarasin, Arch. des sc. phys. **8.** p. 392. 1882.

Die Neigungstangenten der Refractionscurven.[1]

λ	Steinsalz	Flintglas	Kalkspath ord. Strahl	Quarz ord. Strahl	Flussspath
5,0	10^{-4}.1820	—	—	—	—
3,5	482	—	—	—	—
2,5	160	10^{-4}.1400	—	—	—
2,0	102	488	—	10^{-4}.640	—
1,5	74	195	—	214	—
1,0	65	92	—	70	—
0,8	64	75	10^{-4}. 83	50	10^{-4}.28
0,7	65	72	74	44	25
0,6	67	71	71	41	24
0,5	69	75	70,5	40	24
0,45	72	80	71	40	24
0,40	—	87	73,5	40	24
0,35	—	100	79,5	41	24,5
0,30	—	—	90	44	26
0,25	—	—	113	50	28
0,20	—	—	195	60	34
0,185	—	—	—	—	37

Dasselbe für die verschiedenen Glassorten.

Bezeichnung	$A-C$ $\lambda = 0{,}712$	$C-D$ 0,623	$D-F$ 0,538	$F-G'$ 0,460
S. 57	10^{-4}.229,7	10^{-4}.239,2	10^{-4}.262,6	10^{-4}.302,2
O. 165	134,1	137,9	146,1	160,3
O. 544	84,8	85,3	87,6	93,7
O. 154	69,6	68,8	69,8	73,5
O. 658	—	57,4	56,6	57,8
O. 527	60,2	59,2	59,4	61,3
O. 211	53,9	52,5	51,9	52,8
O. 1022	—	45,5	44,9	44,1
S. 205	49,1	45,3	43,5	43,3
O. 627	45,0	42,7	41,4	41,4
S. 40	47,7	44,5	43,5	43,3
O. 225	42,1	39,8	38,1	37,8

Die Tabelle gewährt einen ausserordentlich interessanten Einblick in die vorliegenden Verhältnisse. Sehen wir von den Einzelheiten ab, so tritt der gesetzmässige Verlauf der erhaltenen Werthe für die Neigungstangente überall klar zu Tage. Man sieht, dass in allen Fällen die anfängliche Abnahme der Neigungstangente vom rothem zum blauen Ende des Spectrums

1) Ueber den Verlauf von tang α im *Ultraroth* für Flussspath und einige Gläser vgl. weiter unten p. 665.

durch ein Minimum in eine Zunahme übergeht, wie namentlich die Werthe für Steinsalz, Flintglas und Kalkspath etc. zu erkennen geben. Für die von uns untersuchten Flintgläser tritt schon gleich zu Anfang eine Steigerung der Neigungstangente ein, das Minimum ist bereits überschritten. In keinem einzigen Falle aber geht die Zunahme in eine Abnahme über. Hieraus folgt, dass die sämmtlichen Refractionscurven im wesentlichen den *gleichen* Verlauf besitzen, derselbe möge in Fig. 1 p. 648 durch die ausgezogene Linie dargestellt sein. Diese Gesetzmässigkeit, welche sich auch bei farblosen Flüssigkeiten bestätigt findet, kann nach meinen Rechnungen als ein *sehr empfindliches Prüfmittel für die Genauigkeit von sprectrometrischen Messungen* benutzt werden.[1])

Mit Rücksicht auf den übereinstimmenden Verlauf der sämmtlichen Refractionscurven lässt sich also sagen, dass bei allen durchsichtigen festen Körpern sowohl ultrarothe als auch ultrablaue Absorptionen vorhanden sind. Selbst für die als sehr durchlässig bekannten Körper Kalkspath, Quarz und Flussspath (für ultraviolette) und Steinsalz (für ultrarothe Strahlen) weist der Gang der Neigungstangente darauf hin, dass auch hier an den äussersten bis jetzt erreichten Grenzen kräftig wirkende Absorptionsstreifen zur Geltung kommen. Ein principieller Unterschied dieser Körper untereinander und der Gläser ist nicht vorhanden.

Mit diesem Ergebniss unserer Betrachtung stimmen auch die Resultate, die man anderwärts durch directe photometrische Prüfung über die Absorptionswirkung der durchsichtigen Körper gewonnen hat, vollständig überein.[2]) Ein besonderes Interesse bieten ferner die neuerdings von Arons und Rubens[3]) an einigen Gläsern vorgenommenen Messungen des Brechungsindices für sehr grosse (electrische) Wellenlängen.

1) In der That ergibt sich bei denjenigen spectrometrischen Bestimmungen anderer Beobachter, die durch Ermittelung der einzelnen Brechungsindices erhalten waren, statt wie bei uns durch mikrometrische Ausmessung von *Winkeldifferenzen* (vgl. I. Theil p. 613), nicht überall die gleiche Regelmässigkeit im Verlaufe von tang α, wie bei den vorliegenden Messungen, obschon manchmal die Indices angeblich bis auf 6 Dezimalen genau mitgetheilt sind.

2) vgl. insbes. Eder, Handb. d. Photographie. **2.** p. 284. 1890.

3) Arons und Rubens, Wied. Ann. **44.** p. 206. 1891.

Es bleibt noch zu bemerken, dass für die Mehrzahl der durchsichtigen festen Körper der sichtbare Theil des Spectrums mehr unter dem Einflusse der blauen als der rothen Absorptionen zu stehen scheint, denn fast überall, ausgenommen die Phosphat- und Boratgläser, welche einen besonders nahegelegenen Absorptionsstreifen im Roth besitzen, liegt das Minimum der Neigungstangente, dessen Lage den Wendepunkt der Refractionscurve bezeichnet, auf der rothen Seite des Spectrums. Damit im Zusammenhang stehen die Resultate aller bisherigen photometrischen Untersuchungen farbloser Gläser, die Beobachtung nämlich, dass die Absorptionswirkung, welche sich auf das ganze sichtbare Spectrum erstreckt, für die stärker brechbaren Strahlen eine grössere ist, als für die schwächer brechbaren.[1])

§ 3. Veränderung der Neigungstangente mit der Temperatur und die Schlussfolgerungen, die sich hieraus für die Abhängigkeit der Absorptionswirkung von der Temperatur ergeben.

Wenn es nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen richtig ist, dass man die Veränderung der Neigungstangente von einem Spectralbezirk zum anderen als einen Prüfstein für das Vorhandensein von Absorptionen betrachten darf, die sich ohne besondere Hülfsmittel der Beobachtung entziehen, so wird man mit demselben Recht und derselben Sicherheit der Schlussfolgerung auch aus den Veränderungen der Neigungstangente mit der Temperatur auf Veränderungen des Absorptionsvermögens schliessen dürfen.

Unter diesem Gesichtspunkte betrachten wir eine Zu- oder Abnahme der Neigungstangente als das Kriterium des mit steigender Temperatur zu- oder abnehmenden Absorptionsvermögens. Von dem Einfluss der Dichteänderung auf die Neigungstangente können wir bei dieser Betrachtung absehen, denn die dadurch bewirkte Verringerung (vergl. § 4 weiter unten) ist im Vergleich zu der beobachteten Dispersionssteigerung, oder wie wir hier sagen, Steigerung der Neigungstangente, verschwindend klein und kann somit vernachlässigt werden.

---

1) Vergl. H. Krüss. Naturw. Verein Hamburg. 1890.

Daraus ergibt sich zunächst, dass die bei den durchsichtigen festen Körpern beobachtete Dispersionszunahme[1]) *mit steigender Temperatur als die Folge des mit der Temperatur wachsenden Absorptionsvermögens dieser Körper zu betrachten ist.*

Um ferner zu erkennen, von welcher Seite des Spectrums diese Steigerung der Absorption ausgeht, müssen wir die Aenderungen der Neigungstangente für die einzelnen Spectralbezirke etwas genauer betrachten. Denn es muss für den Verlauf dieser Werthe einen wesentlichen Unterschied machen, ob der Absorptionsstreifen im Blau oder der im Roth, oder beide gleichzeitig eine Steigerung erfahren.

Wir können von vornherein erwarten, dass bei den Flintgläsern, deren Absorptionsstreifen im Blau dem sichtbaren Ende des Spectrums beträchtlich näher gelegen ist, als bei den übrigen Substanzen, auch der Einfluss einer Absorptionssteigerung nicht allein entsprechend *stärker* hervortreten wird, sondern auch, dass dieser Einfluss *mehr den blauen, als den mittleren und rothen Theilen* des Spectrums zu gute kommen muss. Dagegen sind bei den übrigen Substanzen, infolge der grösseren Entfernung des Absorptionsstreifens, bei gleicher Zunahme des Absorptionsvermögens nur *kleinere* Werthe für die Zunahme der Neigungstangente zu erwarten und ausserdem muss der Einfluss für alle Theile des sichtbaren Spectrums *angenähert constant* sein.

Wir benutzen zur Berechnung der Aenderung der Neigungstangente folgenden Ausdruck, der sich aus dem obigen Ausdruck für tang α in leicht ersichtlicher Weise ableitet:

$$\Delta \operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{\delta \frac{1}{\lambda^2}} (\Delta \mathfrak{N}_2 - \Delta \mathfrak{N}_1)$$

und gültig ist für einen Temperaturzuwachs von 1° C.

In der nachstehenden Tabelle sind die für die drei Spectralbezirke $C-D$, $D-F$, $F-G'$ gefundenen Werthe zusammengestellt.

Durch die Tabelle wird in erster Linie bestätigt, dass für sämmtliche bis jetzt untersuchten festen durchsichtigen Substanzen und für jeden Spectralbezirk des sichtbaren Systems

1) Vergl. Theil I. p. 638.

eine Zunahme der Dispersion eintritt. Wie man sieht, besitzen nämlich alle Werthe der Tabelle das positive Vorzeichen, mit Ausnahme eines einzigen (S. 205, $C - D$), von dem weiter unten noch näher die Rede sein wird.

Aenderung der Neigungstangente mit der Temperatur.

Benennung	$C - D$	$D - F$	$F - G'$
S. 57	10^{-6}.0,439	10^{-6}.0,474	10^{-6}.0,670
O. 165	0,134	0,204	0,241
O. 544	0,066	0,080	0,106
O. 154	0,064	0,054	0,068
O. 658	0,048	0,042	0,050
O. 527	0,041	0,049	0,053
O. 211	0,034	0,047	0,036
O. 1022	0,043	0,033	0,046
S. 205	− 0,014	0,031	0,028
O. 627	0,025	0,034	0,029
S. 40	0,013	0,044	0,008
O. 225	0,021	0,016	0,024
Steinsalz	0,018	0,067	0,060
Sylvin	0,068	0,028	0,045
Quarz *o*	0,020	0,029	0,020
e	0,012	0,029	0,020
Flussspath	0,025	0,026	0,026
Kalkspath *o*	0,018	0,007	0,008
e	0,014	0,039	0,016

Man sieht aber auch, dass die Zahlen der Tabelle unseren eben ausgesprochenen Erwartungen vollständig entsprechen. In der That sind bei den zuerst stehenden Flintgläsern (S. 57, O. 165, O. 544 und O. 527) die für die drei Spectralbezirke gefundenen Werthe $\Delta \tang \alpha$ nicht allein viel *grösser* als die Werthe für die anderen Körper, sondern sie zeigen auch eine nicht unbeträchtliche Zunahme nach der stärker brechenden Seite des Spectrums.

Bei den übrigen Substanzen ist dagegen von einem regelmässigen Verlauf der bezüglichen Werthe $\Delta \tang \alpha$ nichts zu bemerken. In diesen Fällen sind die drei nebeneinander stehenden Werthen jedesmal als angenähert constant zu betrachten. Die etwa vorhandene Gesetzmässigkeit wird hier durch die Fehler der Beobachtung verdeckt, und es hätte, um dieselbe zu erkennen, einer Untersuchung über einen weit grösseren Raum auch des unsichtbaren Spectrums bedurft. Das von uns untersuchte Gebiet aber begreift für die meisten der durch-

sichtigen Substanzen gerade denjenigen Theil der Refractionscurve, wo die Neigungstangente von Farbe zu Farbe nur sehr geringe Aenderungen erleidet und in dem auch das Minimum gelegen ist. Es wäre gewiss von Interesse, zu untersuchen, ob in dem Verlauf der Grösse $\Delta \tang \alpha$ und demjenigen der Neigungstangente mit Rücksicht auf die Lage des Minimums ein Zusammenhang besteht, welcher gestattet, Schlüsse über die Veränderung der Absorptionswirkung im Blau und Roth mit der Temperatur zu ziehen.

Auch bei den untersuchten Borat- und Phosphatgläsern (S. 205, S. 40 und O. 225) vermögen die vorstehenden Tabellenangaben keinen Aufschluss über etwaige Veränderungen der diesen Gläsern eigenthümlichen stärkeren Absorption im Roth zu geben (vgl. p. 652). Die Werthe $\Delta \tang \alpha$ sind auch hier klein im Vergleich zu denjenigen der Flintgläser und nahezu constant. Der bei dem leichten Borat-Crown S. 205 für den Spectralbezirk $C - D$ gefundene negative Werth macht allein eine Ausnahme. Wenn hier kein grösserer Beobachtungsfehler vorliegt, muss man annehmen, dass eine *Verminderung* der Absorptionswirkung im Roth durch die Erhöhung der Temperatur stattgefunden hat.

Dagegen ist bei den Flintgläsern das Resultat unserer Betrachtung in jeder Beziehung klar und eindeutig. Hier weist der Verlauf der Grösse $\Delta \tang \alpha$ direct darauf hin, dass die Absorptionszunahme von dem im *ultrablauen* Theile des Spectrums befindlichen Absorptionsstreifen ausgegangen ist. Innerhalb der Reihe der Flintgläser selbst herrscht die grösste Gesetzmässigkeit. In der Reihenfolge, in welcher dieselben aufgezählt sind, nimmt die Gelbfärbung dieser Gläser ab, d. h. der ultrablaue Absorptionsstreifen rückt immer weiter fort vom sichtbaren Ende des Spectrums, oder was auf dasselbe hinauskommt, er wird bei gleicher Lage der Mitte des Absorptionsstreifens immer geringer an Intensität. In der gleichen Reihenfolge aber werden auch die Werthe $\Delta \tang \alpha$ immer kleiner, und auch das Ansteigen derselben nach dem blauen Ende erfolgt immer langsamer (vergl. Tabelle). Die Flintgläser leiten, wie man sieht, allmählich zu den übrigen Gläsern und den Krystallen über, die in noch weiter entlegenen Gebieten des ultrablauen Spectrums Absorptionswirkungen ausüben.

Wir fassen die Resultate unserer Ueberlegung in folgendem *Satz* zusammen:

Die bei den durchsichtigen festen Körpern beobachtete Dispersionssteigerung ist, wenigstens für die Mehrzahl der Flintgläser, die directe Folge einer durch den Einfluss der Temperatur gesteigerten Absorptionswirkung im Ultrablau; dieser gegenüber kommen etwaige Veränderungen des Absorptionsvermögens im Ultraroth für den Bereich des mittleren Spectrums wenig oder gar nicht in Betracht. Bei den übrigen Körpern können wir aus den Veränderungen, welche die Neigungstangente der Refractionscurve unter dem Einfluss der Temperatur erleidet, allein keine Entscheidung darüber treffen, ob die Dispersionssteigerung von einer Zunahme des ultrarothen oder des ultrablauen Absorptionsvermögens herrührt.

Erst die im folgenden Paragraphen angestellte Betrachtung macht es wahrscheinlich, dass auch hier ebenso wie bei den Flintgläsern das letztere stattfindet. Die Betrachtung bezieht sich auf das Verhalten der untersuchten Körper zu dem bekannten Satze der Proportionalität zwischen Brechungsvermögen und Dichte. Ich habe nämlich gefunden, dass hier eine hervorstechende Eigenthümlichkeit der durchsichtigen festen Körper vorliegt, die bisher noch gar keine Beachtung gefunden hat, die mir aber, da meine Aufmerksamkeit zuerst hierauf gelenkt wurde, die gesuchte Erklärung zuerst nahe gelegt hat.

§ 4. Das Verhalten der durchsichtigen festen Körper zu dem Satze der Proportionalität zwischen Brechungsvermögen und Dichte. — Dilatometrische Messungen.

Man hat bekanntlich den Zusammenhang zwischen dem Brechungsvermögen und der Dichte eines Körpers bei verschiedenen Temperaturen durch folgende Ausdrücke zu realisiren gesucht:

$$\frac{n-1}{d} = \text{const.} \qquad \frac{n^2-1}{d} = \text{const.} \qquad \frac{n^2-1}{n^2+2}\,\frac{1}{d} = \text{const.}$$

Von einem gesetzmässigen Zusammenhang kann schon wegen der Verschiedenheit der dafür aufgestellten Ausdrücke keine Rede sein, wenn auch der letzte (Lorentz'sche) Ausdruck den Vorzug der am weitesten — namentlich in neueren chemischen Untersuchungen — ausgedehnten Anwendbarkeit

besitzt. Auch hat es sich als ziemlich nebensächlich herausgestellt, ob das „von der Dispersion befreite“ Glied (a) der Cauchy'schen Dispersionsformel oder irgend ein dem sichtbaren Spectrum entnommener Brechungsindex der Rechnung zu Grunde gelegt wird. Die Formeln sind *Näherungsformeln*, eine vollständige Uebereinstimmung mit der Erfahrung ist weder bei den Gasen noch bei den Flüssigkeiten, noch bei den festen Körpern vorhanden.

Was die letzteren anbetrifft, so sind nach meinen Rechnungen, obschon die Aenderungen der Dichte und daher auch die Aenderungen der Brechungsindices im Vergleich zu den bei den Flüssigkeiten stattfindenden Veränderungen sehr klein sind, doch die Abweichungen, welche zwischen den beobachteten Aenderungen der Indices und den mit Hülfe der obigen Formeln aus den Ausdehnungscoefficienten abgeleiteten Werthen bestehen, in Bezug auf die Veränderungen selbst, in allen Fällen sehr gross, ja meist ebenso gross und oft grösser als diese. Es kann deshalb für die festen Körper eine Wiedergabe der beobachteten Aenderungen durch eine der obigen Formeln auch nicht angenähert erzielt werden[1]). Man vergleiche auch die im § 2 des I. Theiles gegebenen Erörterungen.

Dennoch bleibt, wie wir gleich zeigen werden, die angenäherte Gültigkeit der obigen Formeln auch für die festen Körper bestehen, nur erscheint hier der Einfluss der Dichte stark verdeckt durch den Einfluss des geänderten Absorptionsvermögens.

Ich möchte zunächst durch die folgende kleine Zusammenstellung, in welcher einige durchsichtige feste Körper nach der Grösse ihres cubischen Ausdehnungscoefficienten geordnet sind, zeigen, dass in der gleichen Reihenfolge die Aenderungen der Brechungsindices stattfinden. Dieselben sind zuerst positiv und wachsen dann nach der negativen Seite immer mehr an. Auch innerhalb der Gruppe der Körper Quarz, Flussspath,

---

1) Es ist dieser Umstand von besonderer practischer Bedeutung, wenn es sich darum handelt, die Veränderungen der Brennweite eines Fernrohrobjectivs zu bestimmen, welche durch die Veränderungen der Brechungsindices des Glases hervorgerufen werden. Bisher hat man vielfach die aus den obigen Formeln sich ergebenden Werthe hierzu verwerthet und ist deshalb oft zu abweichenden Resultaten gelangt.

Sylvin und Steinsalz ist diese Uebereinstimmung in der Reihenfolge vorhanden, und man kann somit, wenn man sich auf die obigen Körper mit negativen Werthen $\Delta\mathfrak{N}$ beschränkt, sagen, dass diejenigen Körper, welche die relativ grösste Dichteänderung aufweisen, auch die stärkste Abnahme des Brechungsindex besitzen [1]).

Substanz	cub. Ausdehnungs-coefficient	$\Delta\mathfrak{N}_D$ in Einh. der 5. Dec.	
Kalkspath [2])	10^{-8} . 1447	*o. w*	0,08
		e.	1,02
Glas	1500—3000	2,0 bis	— 0,3
Quarz	3530	*o.*	— 0,63
		e.	— 0,74
Flussspath	5730		— 1,2
Sylvin	11400		— 3,6
Steinsalz	12100		— 3,7

Aus meinen Rechnungen hat sich aber noch eine andere für unsere Darstellung des Sachverhaltes viel wichtigere Gesetzmässigkeit ergeben: *Es zeigt sich nämlich, dass der Sinn der Abweichungen bei sämmtlichen durchsichtigen festen Körpern der gleiche ist,* mag man es mit grösseren oder kleineren Ausdehnungscoefficienten, mit positiven oder negativen Aenderungen

1) Hrn. Stefan ist bei Gelegenheit einer ähnlichen Betrachtung (Wien. Ber. **63.** p. 1. 1871.) diese Regelmässigkeit durch ein Versehen leider entgangen. Der Umstand nämlich, dass er irrthümlich die linearen Ausdehnungscoefficienten von Sylvin und Steinsalz (nach Fizeau) mit den cubischen von Flussspath (nach Kopp) und Quarz zusammengestellt und verglichen hat, hat ihn zu Resultaten geführt, die von den obenstehenden ganz abweichen und die die Sache natürlich viel verwickelter erscheinen lassen, als sie in der That ist.

2) Kalkspath zeigt in Bezug auf Ausdehnung ein bemerkenswerthes Verhalten, denn in der Richtung der optischen Axe findet eine verhältnissmässig sehr starke Ausdehnung, senkrecht dazu eine etwa fünfmal geringere Zusammenziehung statt. Diese axialen Ausdehnungen sind aber für die Werthe $\Delta\mathfrak{N}$ von nebensächlicher Bedeutung, wie schon daraus hervorgeht, dass der für den ord. Strahl erhaltene Werth $\Delta\mathfrak{N}$ keine Aenderung erfährt, wenn der ord. Strahl statt senkrecht zur optischen Axe parallel zu dieser durch den Krystall hindurch geht. Ich habe dieses Resultat aus Beobachtungen von Offret (l. c.) entnommen, das gleiche Verhalten zeigt auch Beryll (nach demselben Beobachter), ein Körper, der, wenn auch in viel geringerem Maasse, in Bezug auf Ausdehnung und Zusammenziehung sich dem Kalkspath gerade entgegengesetzt verhält.

der Brechungsindices zu thun haben. *In allen Fällen, die bis jetzt untersucht sind* (auch die Beobachtungen anderer Beobachter habe ich darauf hin geprüft) *bleibt ein positiver Rest übrig, wenn man die aus der Dichteänderung berechneten Aenderungen der Brechungsindices von den beobachteten Werthen* $\varDelta \mathfrak{N}$ *subtrahirt.* Hierbei ist es im Wesentlichen gleichgültig, welchen der obigen drei Ausdrücke wir der Rechnung zu Grunde legen.

Zur Durchführung dieser Rechnung bedurfte ich der cubischen Ausdehnungscoefficienten der untersuchten Körper. Für einige derselben waren die betreffenden Werthe aus anderweitigen Messungen hinlänglich bekannt. Die übrigen Zahlen für die Gläser habe ich selbst bestimmt und zwar mit Hülfe der dilatometrischen Methode. Ich benutzte zu diesem Zwecke das im Jahre 1884 von Hrn. Professor Abbe construirte *Dilatometer,* das im Princip auf die von Fizeau angegebene Methode hinausläuft, aber doch in manchen wichtigen Punkten sich von jenem unterscheidet, vor allem eine viel bequemere und sichere Messung der Streifenverschiebung gestattet.[1]) Die Resultate der dilatometrischen Messungen sind in der zweitnächsten Tabelle mit aufgenommen. Die Zahlen gelten ungefähr für dieselbe Mitteltemperatur (50—60°), für welche auch die spectrometrischen Messungen ausgeführt wurden.

Unter Benutzung der so erhaltenen Werthe für die cubischen Ausdehnungscoefficienten (3α) wurde zunächst der *Dichteeinfluss* berechnet. Man erhält denselben durch Anwendung der folgenden Gleichungen, die sich aus den obigen Formeln in leicht ersichtlicher Weise ableiten:

$$\text{(I)} \quad \varDelta' n = -(n-1) \,.\, 3\alpha$$

$$\text{(II)} \quad \varDelta'' n = = \frac{n+1}{2n} (n-1) \,.\, 3\alpha$$

$$\text{(III)} \quad \varDelta''' n = -\frac{n^2+2}{3} \, \frac{n+1}{2n} (n-1) \,.\, 3\alpha.$$

1) Eine Beschreibung des Abbe'schen *Dilatometers* und der Methode findet sich in Wied. Ann. Bd. **38.** p. 453. 1889 in einer Arbeit von Weidmann, in welcher auch Versuche an einigen Gläsern mitgetheilt sind. Eine ausführliche Darlegung meiner eigenen Untersuchungen möchte ich mir für einen späteren Aufsatz vorbehalten; es sei noch bemerkt, dass auf Grund des Studiums der Wirkungsweise des mehr provisorischen Apparates in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena nunmehr ein definitives Instrument gebaut und aufgestellt worden ist, welches demnächst ebenfalls beschrieben werden soll.

Die Art wie sich die einzelnen Ausdrücke von einander unterscheiden, ist aus der Form, in welcher dieselben geschrieben sind, leicht zu erkennen. In Gleichung (II) ist nämlich $(n+1)/2n$ stets < 1, deshalb ist auch der absolute Betrag von $\Delta'' n < \Delta' n$. Desgleichen zeigt die Betrachtung des Productes $(n^2+2)/3 \,.\, (n+1)/2n$ in (III), welches sich folgendermassen schreiben lässt $\frac{1}{6}(n^2+n+2+2/n)$, dass dieser Ausdruck immer > 1 sein muss. Folglich gibt $\Delta'' n$ den kleinsten, $\Delta''' n$ den grössten Betrag für den Dichteeinfluss.

Die drei Grössen sind aber nicht so sehr verschieden von einander, dass dadurch die Gültigkeit des oben Gesagten aufgehoben werden kann. Die Reste behalten für alle untersuchten Körper stets das positive Vorzeichen, unbekümmert um die Wahl des Ausdrucks für Δn. Ich habe mich darauf beschränkt, das diesbezügliche Verhalten der drei Ausdrücke untereinander nachstehend durch ein Beispiel zu erläutern.

Schwerstes Silicatflint. S. 57 (siehe Fig. 2).

$$3a = 10^{-8} \,.\, 2804.$$

Linie	$\mathfrak{N}$	Einfluss d. Dichte (Einheiten d. 5. Dec.)		
		$\Delta' n$	$\Delta'' n$	$\Delta''' n$
C	1,9492	− 2,662	− 2,013	− 3,893
D	1,9625	− 2,699	− 2,037	− 3,973
F	1,9980	− 2,799	− 2,100	− 4,194
G'	2,0303	− 2,889	− 2,156	− 4,400

Linie	$\Delta \mathfrak{N}$ beobachtet	Restbetrag = Absorptionswirkung nach		
		(I)	(II)	(III)
C	1,204	3,866	3,215	5,095
D	1,449	4,148	3,484	5,420
F	2,090	4,889	4,187	6,281
G'	2,810	5,699	4,964	7,208

In der folgenden Tabelle habe ich für die übrigen Substanzen der Kürze halber nur die Reste zusammengestellt, welche sich bei Benutzung von Formel (I) ergeben haben. Die Unterschiede, welche die einzelnen Körper in Bezug auf die Grösse der Reste erkennen lassen, treten bei Berechnung nach Gleichung (III) stärker hervor, schwächer nach Gleichung (II).

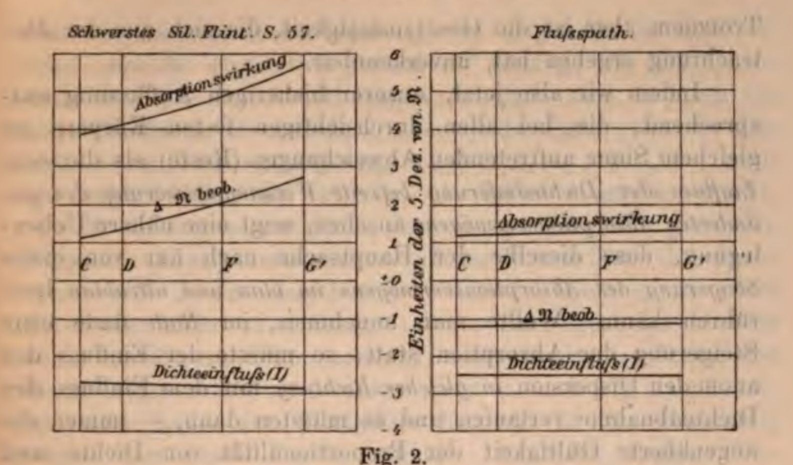


Fig. 2.

Ausdehnungscoefficienten
und die nach Abzug des Dichteeinflusses bleibenden Reste.
(Vgl. die Tabelle p. 639.)

Benennung	cub. Ausdehnungscoeff.	*C*	*D*	*F*	*G'*
		in Einheiten der 5. Decimale von 𝔑			
S. 57	10^{-8}. 2804	3,866	4,148	4,889	5,699
O. 165	2410	2,500	2,593	2,917	3,219
O. 544	2363	1,681	1,731	1,865	2,003
O. 154	2367	1,569	1,614	1,709	1,801
O. 658	1571	1,119	1,155	1,225	1,288
O. 527	2696	1,521	1,553	1,641	1,716
O. 211	2357	1,364	1,390	1,469	1,521
O. 1022	2863	1,345	1,376	1,438	1,502
S. 205	2024	0,956	0,953	1,006	1,046
O. 627	2393	1,346	1,366	1,426	1,467
S. 40	2613	1,147	1,163	1,237	1,259
O. 225	2792	1,232	1,252	1,287	1,324
Steinsalz	12117	2,799	2,853	3,052	3,207
Sylvin	11408	1,877	1,951	2,080	2,202
Quarz *o*	3530	1,264	1,283	1,341	1,378
e		1,184	1,199	1,258	1,294
Flusspath	5734	1,260	1,282	1,336	1,374
Kalkspath [1]) *o*	1447	1,018	1,034	1,058	1,078
e		1,713	1,724	1,783	1,805

Für die richtige Erkennung der Grössenverhältnisse der Reste bleibt also, infolge des hypothetischen Characters der Formeln für den Dichteeinfluss, eine gewisse Unsicherheit.

1) Die Werthe für Kalkspath sind aus den Beobachtungen von F. Vogel (l. c.) abgeleitet.

Trotzdem aber ist die Gesetzmässigkeit, die sich aus der Betrachtung ergeben hat, unverkennbar.

Indem wir also jetzt, unserer bisherigen Auffassung entsprechend, die bei allen durchsichtigen festen Körpern in gleichem Sinne auftretenden Abweichungen (Reste) als die *vom Einfluss der Dichteänderung befreite Wirkungsäusserung des geänderten Absorptionsvermögens* ansehen, zeigt eine nähere Ueberlegung, dass dieselbe der Hauptsache nach nur von einer *Steigerung des Absorptionsvermögens im blau und ultrablau* herrühren kann. Wollte man annehmen, im *Roth* finde eine Steigerung der Absorption statt, so müsste der Einfluss der anomalen Dispersion *in gleicher Richtung* mit dem Einfluss der Dichteabnahme verlaufen und es müssten dann, — immer die angenäherte Gültigkeit der Proportionalität von Dichte und Brechungsindex vorausgesetzt — wenigstens für die rothen und ultrarothen Theile des Spectrums negative Reste auftreten. Nach unseren Ergebnissen sind aber innerhalb des sichtbaren Spectrums die beiderseitigen Wirkungen direct einander entgegengesetzt. Aehnlich liegt die Sache bei Annahme einer Verminderung der Absorptionswirkung im Blau. Auch im Roth kann keine merkliche Abnahme der Absorption stattgefunden haben; das Auftreten von positiven Resten liesse sich dadurch schon erklären, aber gleichzeitig würde sich dann auch die Dispersion vermindern, was nach unserer Untersuchung wiederum ausgeschlossen ist.

Wir sehen somit, dass die auf das Verhalten der durchsichtigen festen Körper zum „Satze vom constanten Refractionsvermögen" gegründeten Schlussfolgerungen für sämmtliche Körper genau das gleiche Resultat ergeben haben, das wir früher (§ 3) aus dem Verhalten des Neigungswinkels der Refractionscurve und (§ 1) aus directen photometrischen Versuchen für die Flintgläser erhalten hatten. Ich muss indessen hierbei erwähnen, dass die in § 3 angestellte Betrachtung über die Veränderungen von tang α streng genommen erst jetzt, nachdem der Einfluss der anomalen Dispersion von dem Dichteeinfluss befreit worden ist, also bei den Resten der letzten Tabelle, hätte zur Sprache gebracht werden müssen. Bei der Unsicherheit aber, mit welcher der Einfluss der Dichte auf das Brechungsvermögen bekannt ist, und bei dem sehr geringen

Einfluss, den die Dichteänderung, den obigen Gleichungen zufolge, auf die Dispersion auszuüben vermag, ist das nebensächlich. An den Ausführungen des § 3 wird dadurch im wesentlichen nichts geändert. Es würde sogar jetzt die Zunahme der Neigungstangente, wie leicht zu sehen ist, noch ein wenig stärker hervortreten, als früher angegeben wurde.

Es ist ferner ersichtlich, dass die grössere oder geringere Nähe des Absorptionsstreifens auf der blauen Seite des Spectrums sich in den Angaben der letzten Tabelle nicht allein durch ein mehr oder weniger steiles Ansteigen der Werthe nach der blauen Seite, sondern auch durch die Grösse des Restbetrages selbst zu erkennen giebt (s. auch Fig. 2). Innerhalb der Reihe der Flintgläser herrscht in der Beziehung wieder eine grosse Regelmässigkeit. Auch die übrigen Substanzen gewähren einen interessanten Vergleich.

Ob nun bei sämmtlichen durchsichtigen festen Körpern eine Zunahme der Absorption im Blau bei unveränderter Lage der Mitte des Absorptionsstreifens oder ob nur ein einfaches Vorrücken des Absorptionsstreifens in der Richtung vom blauen zum rothen Ende des Spectrums stattfindet und ob in diesem letzteren Falle der Absorptionsstreifen im Roth eine Verschiebung in gleichem Sinne erleidet, muss vorläufig dahin gestellt bleiben. Im Resultat kommt es auf dasselbe hinaus, ob die Steigerung des Absorptionsvermögens, welche vom Blau ausgeht, in der einen oder der anderen Weise bewirkt wird. —

Unsere Aufgabe betrachten wir hierdurch als gelöst. Wir haben die bei den durchsichtigen festen Körpern beobachteten (positiven und negativen) Temperaturvariationen der Brechungsindices als eine Differenzwirkung zweier entgegengesetzt wirkenden Kräfte: Dichte und Absorptionsvermögen hingestellt, und glauben hierdurch für das Verhalten dieser Körper eine naturgemässe und ausreichende Erklärung gegeben zu haben.

Auch die *Veränderungen* der Temperaturvariationen der Brechungsindices mit der Temperatur, auf welche ich in der vorliegenden Untersuchung nur wenig Rücksicht genommen habe (s. p. 631, 633, 636 und 646), erklären sich auf eine ebenso ungezwungene Weise. Wenn das Absorptionsvermögen für höhere Temperaturen stärker wächst als für niedere, wie

oben für das Flintglas S. 57 angegeben ist, so wird bei unveränderlichem Ausdehnungscoefficienten der Substanz die beobachtete Temperaturvariation in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur dem Einfluss der Absorptionswirkung folgen. Aber auch die Ausdehnungscoefficienten zeigen in den untersuchten Fällen eine Zunahme derselben mit wachsender Temperatur. Diese Steigerung bedingt somit für sich allein das entgegengesetzte Verhalten von $\Delta\mathfrak{N}$. Bei dem Zusammenwirken ist es also mehr Sache des Zufalls, ob die Temperaturvariation mit der Temperatur zu oder abnimmt oder constant bleibt.

Nachträgliche Bemerkung. In einem während des Drucks dieser Arbeit erschienenen Aufsatz des Hrn. Rubens (diese Ann. Bd. 45. p. 238) sind für eine grössere Anzahl durchsichtiger Substanzen die Brechungsindices für ultrarothe Strahlen mitgetheilt. Die nach einer sehr sinnreichen Methode ausgeführten Messungen sind zum Theil an Substanzen vorgenommen, die auch von mir untersucht wurden, nämlich: Steinsalz, Flussspath, Quarz und acht verschiedene Gläser aus dem Glastechnischen Laboratorium von Schott und Gen. Wir können deshalb bei denjenigen Substanzen, für welche nach den bisherigen Messungen die Neigungstangente der Refractionscurve nicht über das rothe Ende des sichtbaren Spectrums hinaus ermittelt werden konnte (Flussspath siehe oben Tabelle p. 650 und die Gläser ibid), unter Benutzung der Rubens'schen Angaben den Verlauf der Grösse tang α noch ein gutes Stück in das Ultraroth hinein verfolgen.

In Anbetracht der Methode besitzen die Messungen natürlich nicht den gleichen Grad der Genauigkeit wie unsere mikrometrisch vorgenommenen Dispersionsbestimmungen, und es kommen in dem Verlauf der Neigungstangente Unregelmässigkeiten vor, die durch Beobachtungsfehler entstanden sind (vergl. die Anm. 1 p. 651). Diese Abweichungen lassen sich aber leicht graphisch ausgleichen und man kann dann der Zeichnung die bestimmten Wellenlängen zugehörigen Werthe entnehmen, wie in der folgenden Tabelle für Flussspath, ferner für das sog. schwerste Silicatfint S. 163 ($N_D = 1,8904$ $\nu = 22,3$), das mittlere Phosphat-Crown S. 179 ($N_D = 1.5620$ $\nu = 66,8$)

und das Borat-Crown S. 204 ($N_D = 1{,}5101$ $\nu = 59{,}0$) geschehen ist.

λ	Flussspath	Schwerstes Silicatflint S. 163 ähnlich S. 57	Mittleres Phosphat-Crown S. 179 ähnlich S. 40	Borat-Crown S. 204 ähnlich S. 205
3,0	10^{-4} . 865	—	—	—
2,5	362	—	—	—
2,0	175	10^{-4} . 570	10^{-4} . 800	10^{-4} . 860
1,5	82	316	200	265
1,0	38	206	62	80
0,8	28	190	50	50
0,7	25	192	47	39
0,6	24	198	44	35
0,5	24	214	43	33

Das Resultat der vorstehenden Tabelle entspricht vollständig unseren früheren Ausführungen. Man sieht, dass bei diesen Substanzen nicht allein ein sehr starkes Anwachsen der Neigungstangente jenseits des Roth stattfindet, auch die Zunahme selbst vollzieht sich je nach dem Grade der Durchlässigkeit für ultrarothe Strahlen in verschiedener Weise, wie eine graphische Darstellung der sämmtlichen Werthe (als Abscissen λ, als Ordinate tang α) besonders anschaulich zu erkennen giebt. Die neuen Zahlen bestätigen insbesondere unsere frühere Angabe, dass die Phosphat- und Boratgläser eine viel stärkere Absorptionswirkung im Roth ausüben als die übrigen Gläser. Sie zeigen ferner, dass Flussspath zwar viel durchlässiger für ultrarothe Strahlen ist als Quarz und die Gläser, aber doch eine bedeutend grössere Absorptionswirkung ausübt als Steinsalz. Die Reihenfolge, in welcher sich demnach die verschiedenen Körper nach dem Grade ihrer Durchlässigkeit für ultrarothe Strahlen anordnen, ist folgende: Steinsalz, Flussspath, Flintglas, Quarz, Phosphat-Crown und Borat-Crown. Hiermit stimmen auch die Absorptionsmessungen des Hrn. Rubens (l. c. p. 258) im Wesentlichen überein.

Jena, Laboratorium der optischen Werkstätte von Carl Zeiss, Febr. 1892.

II. *Ueber den Einfluss des Druckes auf die Viscosität von Flüssigkeiten; von R. Cohen.*

(Hierzu Tafel VIII Fig. 3—8.)

Versuche von Röntgen[1]) und Warburg und Sachs[2]) haben übereinstimmend zu dem bemerkenswerthen Resultate geführt, dass die Viscosität des Wassers durch Compression verringert wird, während dieselbe für Aether, Benzol und vermuthlich die meisten anderen Flüssigkeiten zunimmt mit wachsendem Druck. Die angeführten Versuche sind bei Temperaturen zwischen 12° und 40° und bis zu Drucken von 150 Atm. angestellt. Im Folgenden theile ich die Resultate von Versuchen mit über die Abhängigkeit der Viscosität vom Druck im Intervall von 1—600 Atm. bei Temperaturen von 1°, 15° und 23° für Wasser, NaCl-Lösungen von vier verschiedenen Concentrationen und Terpentinöl.

Zur Druckerzeugung diente die von Cailletet zur Verflüssigung der Gase construirte Compressionspumpe; der zur Verfügung stehende Hohlraum des eisernen Compressionscylinders hatte eine Höhe von ca. 62 cm und eine Weite von 3,5 cm. Die Viscosität wurde nach der Methode der Strömung durch Capillaren bestimmt, d. h. es wurde die Zeit gemessen, die ein gegebenes Volumen Flüssigkeit zum Ausfliessen aus einer gegebenen Capillare braucht. Der von F. Müller in Bonn aus Glas gefertigte Apparat hatte nach einem Vorschlag von Hrn. Professor Röntgen die in Fig. 3 dargestellte Form und die folgenden ungefähren Dimensionen: äusserer Durchmesser 2 cm, Gesammtlänge 42,5 cm, Länge der Capillare 20 cm, Radius der Capillare 0,012 cm. Es wurden verschiedene Apparate benutzt, die sich in den Dimensionen kaum voneinander unterschieden. Das Volumen Flüssigkeit, dessen Ausflusszeit gemessen wurde, war durch die Enden der bei a und a' eingeschmolzenen, rechtwinklig gebogenen Platindrähte begrenzt, die bis in die Mitte der beiden Einschnürungen des

1) Röntgen, Wied. Ann. 22. p. 510. 1884.

2) Warburg u. Sachs, Wied. Ann. 22. p. 518. 1884.

Apparates reichten. Der ganze Apparat war festgebunden an eine vernickelte Stange, die um eine horizontale Axe drehbar an das Verschlussstück des Compressionscylinders verschraubt war. War der Apparat mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, die bei d durch etwas destillirtes Quecksilber abgeschlossen wurde, so wurde er ganz in destillirtes Quecksilber, welches den Compressionscylinder anfüllte, untergetaucht; dann strömte die Flüssigkeit, nachdem das eindringende Quecksilber bei a' angekommen war, bis zu dem Zeitmoment, wo es bei a anlangte, aus unter dem mittleren Ueberdruck einer Quecksilbersäule von $(d' + d)/2$ Höhe gegen eine Wassersäule von der gleichen Höhe, wenn wir mit d und d' die Abstände der Punkte a und a' von dem oberen Ende der Capillare bezeichnen.

Die beiden Zeitmomente, in denen das Quecksilber a und a' erreichte, wurden dadurch bemerkbar gemacht, dass das Quecksilber mit dem betreffenden Platindraht einen electrischen Contact herstellte. Dazu war an die Platindrähte je ein Kupferdraht angelöthet, der isolirt durch das Quecksilber und das Verschlussstück geführt war. An der Stelle, wo die Drähte durch das Verschlussstück gingen, waren sie conisch gefeilt und mit Marineleim überzogen, dann in innen und aussen conisch verlaufende und ebenso mit Marineleim überzogene 0,5 cm dicke Hartgummistücke eingelassen, welche zur Isolirung von dem messingenen Verschlussstück dienten. Letzteres, das durch die oben erwähnte vernickelte Stange, sowie durch die Verschraubung mit dem Compressionscylinder in Verbindung mit dem den Apparat umgebenden Quecksilber stand, diente als Stromzuführung. Die erwähnte Art Drähte aus dem Innern isolirt ins Freie zu führen, erwies sich als vorzüglich und erlaubte Drucke bis zu 600 Atm. anzuwenden, ohne dass Undichtigkeiten zu bemerken gewesen wären. Erst nach hunderten von Versuchen, in denen zeitweilig Drucke bis zu 900 Atm. angewandt wurden und die Temperatur um mehr als 20° geändert worden war, zeigte das Verschlussstück von den Durchbohrungen ausgehende, strahlenförmig verlaufende Sprünge und musste durch ein neues ersetzt werden. In den ersten Versuchen mit Wasser bis zur Versuchsnummer 219 befand sich im Stromkreis von drei Daniell'schen Elementen

ausser dem, wie leicht verständlich, eingeschaltenen Apparat ein gewöhnliches electrisches Läutewerk, das mit Herstellung des Contactes zu functioniren begann; und zwar wurde das Quecksilber, um seine Oberfläche möglichst sauber zu erhalten, mit dem Zinkpol verbunden. Da bei der Untersuchung von Salzlösungen diese Beobachtungsmethode nicht anwendbar war (es wäre Zersetzung eingetreten), so wurde sie durch die folgende ersetzt. Die secundäre Spirale eines kleinen Inductoriums, wie es zu medicinischen Zwecken verwandt wird, das durch drei Daniell erregt wurde, war durch ein Böttcher'sches Telephon von 145,5 Ohm Widerstand mit Schallbecher geschlossen und der Apparat als Nebenschluss zum Telephon geschaltet. Der auch bei den bestleitenden Salzlösungen kräftige Ton des Telephons setzte momentan aus, wenn das Quecksilber den betreffenden Platindraht im Apparat erreichte. Dabei hat die Methode den Vortheil, dass nur ein Theil des Stromes bis zur Herstellung des Contactes, von wo ab der Strom natürlich unterbrochen wurde, durch den Apparat geht und so die Flüssigkeit erwärmen kann. Bei den Versuchen mit Wasser nach Nr. 219 wurde dieselbe Beobachtungsmethode angewandt.

Die Druckmessung geschah an dem zur Compressionspumpe gehörigen, in 20 Atm. getheilten Bourdon'schen Manometer.

Der ganze Compressionscylinder stand in einem Fass von 38 cm Radius und 90 cm Höhe, das mit Wasser gefüllt war. Die Temperatur wurde an einem in $^1/_{10}$ Grade getheilten Thermometer, das in unmittelbarer Nähe des Compressionscylinders hing, vor und nach jedem Versuche nach kräftigem Umrühren abgelesen. Zu den Versuchen in der Nähe von 0° wurde das Wasser zwischen den einzelnen Versuchen durch Eis abgekühlt, da die Jahreszeit die Anwendung einer grösseren Menge Schnee nicht gestattete; während des Versuches selbst wurden die Eisstücke aus dem Fasse entfernt. Sowohl bei diesen Versuchen, wie bei denen bei Temperaturen in der Nähe von 25°, wurde der ganze Beobachtungsraum nahe auf der gewünschten Temperatur erhalten. Es unterschieden sich die beiden Temperaturbestimmungen zu Anfang und Ende eines Versuches bei niederer Temperatur um höchstens $^2/_{10}$°; bei den übrigen Versuchen selten um $^1/_{10}$°.

Zur Zeitmessung diente ein Chronometer von Lenbach
ı München, das halbe Secunden schlug.

Ich wende mich zu der Besprechung der Fehlerquellen,
›weit sie

I. von der Compression herrühren.

1. Es wird das Volumen zwischen a und a' kleiner.

2. Der Radius der Capillare wird verkleinert.

3. Die Dichte des Wassers und des Quecksilbers wird
ɪrgrössert und dadurch die Druckdifferenz, unter welcher das
'asser ausfliesst, geändert.

4. Die Temperatur im Compressionscylinder steigt infolge
ɪr Compressionswärme.

5. Die Entfernung der beiden Platindrähte kann durch den
ruck geändert werden.

II. Von der Unzuverlässigkeit des Manometers.

III. Von der Art der Zeitmessung mit Hülfe des elec-
ischen Contactes.

ad I 1. Um die Volumenverkleinerung zu finden, dürfen
r annehmen, der Apparat bestehe massiv aus Glas. Setzen
r den Elasticitätsmodul $= 6500$, die Constante μ nach
ɔrnu [1]) $= 0{,}24$, so ergibt sich für den Quotienten aus dem
ɔlumen nach und vor der Compression $V'/V = 0{,}9985$ für
nen Druck von 600 Atm. Die beobachteten Ausflusszeiten
gen für Wasser alle unter 5000 Secunden; corrigiren wir
e Ausflusszeit 5000 Secunden durch Multiplication mit
$'/V$, so ergibt sich 4992,5; d. h. die Grösse des Fehlers liegt
denfalls unter $- 7{,}5$ Secunden oder ist $< 0{,}15$ Proc.

ad I 2. Dieselbe Rechnung ergibt für das Verhältniss der
erten Potenzen der Radien vor und nach der Compression
f 600 Atm. $r^4/r'^4 = 1{,}002$. Die Grösse des Fehlers für
00″ + 10″ oder $< 0{,}20$ Proc.; der Fehler hat den entgegen-
nn wie der vorhergehende.

ad I 3. Nehmen wir für die Compressibilität des Queck-
bers den Werth $3 . 10^{-6}$, für Wasser $50 . 10^{-6}$, so würde bei
ıer Druckdifferenz von ca. 35 cm Quecksilber, wie sie bei
n Versuchen statt hatte, durch die Dichteänderung die
ısflusszeit von 5000″ bei einer Compression auf 600 Atm.

---

1) Compt. rend. **69.** p. 333.

grösser werden um 2″,5, der Fehler ist also positiv und < 0,05 Proc.

ad I 4. Um ein Urtheil zu bekommen über die Zeit, in der sich eine Temperaturdifferenz zwischen dem Innern des Compressionscylinders und dem im Fasse enthaltenen Wasser ausgleicht, wurden besondere Versuche angestellt. An die Stelle des Apparates wurde ein dickwandiges, unten geschlossenes Glasrohr gebracht, das zur Hälfte Quecksilber, zur Hälfte Wasser enthielt. In das Wasser tauchte die eine Löthstelle eines Eisen-Neusilberthermoelementes, während die andere Löthstelle da angebracht war, wo sich während der Versuche das zur Temperaturmessung dienende Thermometer befand. Nach einer Compression auf 500 Atm. blieb nach 12 Minuten eine Temperaturerhöhung von 0,05° zurück. Die Zeit, die zwischen der Compression und dem Eintritt des ersten Contactes bei den definitiven Versuchen verstrich, während die zwischen *a* und *d* enthaltene Flüssigkeitsmenge ausfloss, betrug mindestens 15 Minuten, meistens 25 Minuten und mehr. Eine Temperaturerhöhung um 0,05° würde bei 18° die Ausflusszeit von 5000″ reduciren auf 4994″, wenn wir die Formel von Grotrian für die Abhängigkeit des Reibungscoëfficienten von der Temperatur zu Grunde legen. Der Fehler wäre also − 6″ oder < 0,12 Proc.

Stellen wir kurz zusammen, so ergeben die eben besprochenen Umstände Fehler von folgendem Sinn und Grösse im Maximum:

1. − 0,15 Proc.
2. + 0,20 „
3. + 0,05 „
4. − 0,12 „

Es heben sich also die betreffenden Fehler gerade auf in den betrachteten Fällen; sie wurden nicht weiter berücksichtigt.

ad I 5. Die Uebereinstimmung der mit verschiedenen Apparaten ausgeführten Versuche spricht dafür, dass keine merkliche Verbiegung der Platindrähte durch den hohen Druck stattgefunden hat.

ad II. Das Manometer wurde nicht durch besondere Versuche controlirt.

ad III. Im allgemeinen darf man annehmen, dass in dem

Augenblick, wo das eindringende Quecksilber den Platindraht berührt, auch der electrische Contact stattfindet; dafür spricht wenigstens die Uebereinstimmung der Beobachtungen untereinander und mit den von anderen Beobachtern gefundenen Werthen. Es verdient jedoch der folgende Umstand einer Erwähnung. Die Flüssigkeit tritt am oberen Ende der Capillare tropfenweise aus. Bei Vorversuchen, bei denen die Platindrähte a und a' an den engsten Stellen des Apparates selbst eingeschmolzen waren und senkrecht in denselben hineinragten, blieb fast regelmässig ein Tropfen Wasser an der Einschmelzstelle hängen, nachdem das Quecksilber schon über den Draht hinausgestiegen war, und es trat nun nur periodisch electrischer Contact ein. Der Klöppel des Läutewerkes führte regelmässig etwa alle 7 Secunden einen Schlag auf die Glocke aus. Ich erkläre mir dieses Klopfen durch die Annahme, dass in dem Moment, wo sich am oberen Ende der Capillare ein Tropfen ablöst, unten das nachdringende Quecksilber die am Platindraht hängende dünne Flüssigkeitsschicht durchbricht und Contact herstellt; unmittelbar darauf, während sich oben ein neuer Tropfen bildet, legt sich auch unten der Tropfen wieder um den Draht und verhindert den Contact. Es ist daher bei den Apparaten, die zu den definitiven Versuchen gedient haben, der Draht, wie angegeben, rechtwinklig gebogen, sodass nur die Spitze desselben sich in der Mitte der engsten Stelle befindet. Von sechs in der angegebenen Weise construirten Apparaten zeigte nur einer, bei dem die Verhältnisse zufällig besonders ungünstig ausgefallen sein müssen, die erwähnte Erscheinung; er wurde daher nicht benutzt. Uebrigens mag bemerkt werden, dass aus diesem Grunde auch bei schlecht leitenden Flüssigkeiten die zweite Beobachtungsmethode (Telephon im Nebenschluss) der ersteren (Läutewerk) vorzuziehen ist, da die unvergleichlich grösseren Potentialdifferenzen bei Anwendung eines Inductoriums um so sicherer im richtigen Moment den Contact herstellen werden. Es geht aus dem Mitgetheilten jedenfalls hervor, dass bei der Anwendung von electrischen Contacten zu ähnlichen Zwecken wie dem vorliegenden Vorsicht geboten ist.

Weitaus die grösste Fehlerquelle bei allen Versuchen über Strömung durch Capillaren liegt, wie bekannt, in dem

Umstand, dass sich Staubtheilchen in der Capillare absetzen und so den Durchmesser derselben verkleinern können. Wenn auch meine Versuchsanordnung in dieser Beziehung vortheilhaft genannt werden kann, so musste doch eine Reihe von Versuchen, die viel zu grosse Zahlen für die Ausflusszeiten lieferten, aus diesem Grunde verworfen werden.

Zur Controle, dass die Methode bei 1 Atm. Druck mit den älteren Beobachtungen übereinstimmende Resultate liefert, mögen folgende Angaben dienen. Aus den Dimensionen eines Apparates, die durch Ausmessen mit Quecksilber bestimmt wurden, und der Druckdifferenz ergab sich berechnet für 15,25° der Reibungscoefficient des Wassers 0,00001182, nach Poiseuille ist er 0,00001164, nach Grotrian[1]) 0,00001158. Da die Berechnung des Reibungscoefficienten aus den Dimensionen des Apparats nur eine ungenaue sein kann, so erachte ich die Uebereinstimmung der absoluten Coefficienten als genügend.

Eine bessere Uebereinstimmung mit den von anderen Beobachtern erhaltenen Resultaten darf in der Abhängigkeit der Viscosität von der Temperatur für Wasser bei 1 Atm. Druck erwartet werden.

Es fanden für das Verhältniss der Viscosität des Wassers bei 10° zu der bei 20°: Poiseuille[2]) 1,296, Graham[3]) 1,315 und 1,302, Rellstab[4]) 1,324, Sprung[5]) 1,301.

Aus meinen Beobachtungen ergibt sich der Werth 1,307.

Berechnet man ferner z. B. aus der von mir für 15° bestimmten Ausflusszeit nach der Grotrian'schen Formel[6]) die Ausflusszeit für 23°, so ergibt sich 2601,8″, gefunden wurde 2604″.

Die von Sprung[7]) für Na Cl-Lösungen erhaltenen Curven, welche die Abhängigkeit der Viscosität vom Procentgehalt darstellen, dürften nicht genau genug festgelegt sein, um durch

---

1) Grotrian, Pogg. Ann. **160.** p. 238. 1877.
2) Poiseuille, Compt. rend. **15.** p. 1167.
3) Graham, Phil. Mag. (4) **24.**
4) Rellstab, Transpir. homol. Flüssigk. Diss., Bonn 1868.
5) Sprung, Pogg. Ann. **159.** p. 1. 1876.
6) Grotrian, Pogg. Ann. **160.** p. 238. 1877.
7) Sprung, Pogg. Ann. **159.** p. 13. 1876.

Extrapolation mit meinen Beobachtungen streng vergleichbare Werthe zu erhalten. Angenähert erhalte ich aus den Sprung'schen Curven für 10° für das Verhältniss der Ausflusszeit einer 25,7 procent. und einer 8 procent. NaCl-Lösung den Werth 1,69, während meine Beobachtungen den Werth 1,77 ergeben würden.

Ich gehe über zu der Mittheilung der Resultate, zunächst der für Wasser.

Das benutzte Wasser war destillirt und nicht von Luft befreit. Das letztere erwähne ich besonders, weil Warburg und Sachs aus einigen Versuchen geschlossen haben, dass lufthaltiges Wasser durch eine einmalige Compression eine dauernde Aenderung seiner Viscosität erfährt, während luftfreies Wasser dieses Verhalten nicht zeigt. Ich habe einige Versuche angestellt, in denen das Wasser sofort nach dem Einsetzen des Apparates 10 Min. auf 600 Atm. comprimirt wurde; es wurde dann der Druck nachgelassen und nun die Ausflusszeit bei 1 Atm. beobachtet. In den Grenzen der Versuchsfehler ergab sich dieselbe Ausflusszeit, wie ohne vorherige Compression. Da es ohne eine wesentliche Complication des Apparates nicht thunlich war, das Wasser im Apparat auszukochen und ich die erwähnte Erscheinung selbst nicht habe constatiren können, so habe ich lufthaltiges Wasser verwenden zu dürfen geglaubt.

In den im Folgenden mitgetheilten Tabellen ist in der ersten Columne die Nummer des Versuchs angegeben, τ bedeutet die Temperatur in Celsiusgraden, p den Druck in Atmosphären, t die beobachtete Ausflusszeit. Nach den Beobachtungen wurde in grossem Maassstabe für 1 Atm. 300 Atm. und 600 Atm. die Abhängigkeit der Ausflusszeit von der Temperatur graphisch dargestellt, und aus den so erhaltenen Curven durch Abstecken und Interpoliren für die zwischenliegenden Drucke die Ausflusszeiten auf Temperaturen τ' reducirt. Die so erhaltenen Werthe sind unter t' aufgeführt; die Columne T' enthält die Mittelwerthe der t' und die letzte Columne die procentischen Aenderungen der Ausflusszeit: $[(T_1 - T_p) / T_1]\,100$, wenn wir den Druck durch den Index bezeichnen.

Tabelle I.

Wasser. Apparat I. $\tau' = 15^0$.

Nr.	τ	p	t	t'	T'	$\frac{T_1 - T_p}{T_1}$ 10
114	15,4	1	2804	2842		
115	15,4	1	2800	2838		
116	15,4	1	2800	2838		
117	15,4	1	2800	2838		
119	15,4	1	2797,5	2835,5	2836,25	
120	15,4	1	2800	2838		
121	15,4	1	2797,5	2835,5		
122	15,4	1	2792,5	2830,5		
123	15,4	1	2795	2833		
162	15,4	1	2796	2834		
124	15,4	100	2780	2817,5		
125	15,4	100	2775,5	2813		
126	15,4	100	2778	2815,5	2816,0	0,71
127	15,4	100	2778,5	2816		
128	15,4	100	2777,5	2815		
151	15,4	100	2781,5	2819		
109	15,4	200	2760	2797		
110	15,4	200	2772	2809		
111	15,4	200	2756	2793		
112	15,4	200	2759	2796	2800,58	1,26
113	15,35	200	2772	2809		
150	15,4	200	2762,5	2799,5		
129	15,4	300	2752,5	2788,5		
130	15,4	300	2756,5	2792,5		
131	15,4	300	2755,5	2791,5	2794,42	1,47
132	15,4	300	2764,5	2800,5		
133	15,4	300	2767,5	2803,5		
149	15,4	300	2754	2790		
104	15,4	400	2736	2771,5		
105	15,4	400	2745	2780,5		
106	15,4	400	2737	2772,5	2775,5	2,14
107	15,4	400	2734	2769,5		
108	15,4	400	2741	2776,5		
153	15,4	400	2747	2782,5		
134	15,4	500	2739	2774		
135	15,45	500	2736	2775,5		
136	15,50	500	2739,5	2783,5	2778,5	2,03
137	15,45	500	2743	2782,5		
138	15,45	500	2745	2784,5		
152	15,4	500	2736	2771		
163	15,4	700	2733	2767,5	2772,5	2,24
164	15,4	700	2743	2777,5		
165	15,5	900	2722	2765	2761,75	2,63
166	15,45	900	2720	2758,5		

Apparat II.

Nr.	τ	p		t'	T'	$\frac{T_1 - T_p}{T'} 100$
175	14	1	2702	2607		
176	13,9	1	2704	2599,5	2600,62	
182	13,9	1	2701,5	2597		
189	14	1	2694	2599		
178	13,9	100	2680,5	2577,5		
186	14	100	2681	2587,5	2587,5	0,51
191	14,05	100	2686,5	2597,5		
180	13,9	200	2669,0	2558	2568,25	1,25
188	13,95	200	2665	2568,5		
181	13,9	300	2658,5	2559		
184	13,9	300	2654,5	2555	2559,5	1,60
193	14,05	300	2650,5	2564,5		
179	13,9	400	2634	2536		
187	13,9	400	2636,5	2538,5	2544,17	2,17
196	14,25'	400	2625	2558		
177	13,9	500	2631	2534,5		
185	13,95	500	2619,5	2527,5	2535,5	2,50
195	14,20	500	2614,5	2544,5		
183	13,9	700	2631,5	2537	2538,5	2,40
190	14	700	2626	2540		

Apparat III.

Die mit einem * bezeichneten Versuche sind im Mittelwerth nicht berücksichtigt.

Nr.	τ	p	t	τ'	t'	T'	$\frac{T_1 - T_p}{T_1} 100$
306	0,60	1	4924,5	1°	4869,0		
305	0,70	1	4890,5	1°	4849		
301	1,20	1	4818	1°	4846		
311	1,80	1	4671	1°	4782		
292	1,50	1	4713,5	1°	4783	4814,33	
286	2,05	1	4648,5	1°	4794,5		
290	2,3	1	4590	1°	4770,5		
283	5,65	1	4174	1°	4820,5		
285	5,70	1	4161	1°	4814,5		
197	14,35	1	3205	15°	3143		
200	14,4	1	3208	15°	3151		
201	14,4	1	3203	15°	3146	3147,40	
208	14,4	1	3208	15°	3151		
202	14,45	1	3203	15°	3146		
258	23,25	1	2588	23°	2603,5		
253	22,95	1	2604	23°	2601	2603,12	
266	23,30	1	2579	23°	2597,5		
261	23,25	1	2595	23°	2610,5		

Nr.	τ	p	t	τ'	t'	T	$\frac{T_1 - T_p}{T_1} 100$
297	0,8	100	4742	1°	4715		
298	1,0	100	4740	1°	4740	4713	2,10
313	2,3	100	4508,5	1°	4684		
214	14,4	100	3184,5	15°	3128		
215	14,4	100	3190	15°	3134	3132,5	0,47
216	14,4	100	3191	15°	3135		
256	23,25	100	2578	23°	2593,5		
264	23,30	100	2572,5	23°	2591	2591	0,465
265	23,30	100	2570	23°	2588,5		
307	0,3	300	4695,5	1°	4617,5		
309	0,5	300	4684	1°	4621		
303	0,6	300	4707	1°	4659,5		
299	1,10	300	4616,5	1°	4629		
300	1,2	300	4609,5	1°	4634,5	4630,4	3,82
293	1,5	300	4636,5*	1°	4699,5*		
295	1,65	300	4643,5*	1°	4725,5*		
296	1,75	300	4601*	1°	4695,5*		
312	1,9	300	4507,5	1°	4621		
209	14,4	300	3161	15°	3106,5		
210	14,4	300	3153,5	15°	3099		
211	14,4	300	3152,5	15°	3098	3100,3	1,49
212	14,4	300	3149	15°	3094,5		
213	14,4	300	3158	15°	3103,5		
255	23,25	300	2567,5	23°	2583		
259	23,3	300	2569,5	23°	2588	2583,33	0,76
263	23,25	300	2563,5	23°	2579		
308	0,45	600	4575,5	1°	4510,5		
302	0,55	600	4594,5	1°	4541		
294	1,6	600	4440,5	1°	4511,5		
288	1,95	600	4382,5	1°	4495	4512,0	6,28
289	2,15	600	4352	1°	4488,5		
282	5,55	600	3977	1°	4516		
284	5,6	600	3976,5	1°	4521,5		
198	14,35	600	3127,5	15°	3070,5		
199	14,35	600	3128,5	15°	3071,5	3073,83	2,33
203	14,45	600	3127	15°	3079,5		
254	23,15	600	2570,5	23°	2579,5		
257	23,25	600	2555,5	23°	2570,5	2577	1,01
260	23,30	600	2563	23°	2581		
204	14,50	900	3103	15°	3060,5	3060,5	2,76

Im allgemeinen ist die Uebereinstimmung eine gute zu nennen; nur bei den Beobachtungen bei tiefer Temperatur kommen Differenzen der auf 1° reducirten Werthe bis zu 2 Proc. vor, der Grund liegt in der Schwierigkeit, die Temperatur über eine Stunde lang constant zu halten. Bei den übrigen Beobachtungen sind Differenzen von 1 Proc. selten, sodass die Mittelwerthe auf 0,5 Proc. genau sein dürften.

Ich habe darauf verzichten müssen, die Curven, welche die Abhängigkeit der Ausflusszeit von der Temperatur darstellen, wieder zu geben, da ein zu grosser Maassstab erforderlich gewesen wäre. Dagegen sind in Fig. 4 die Curven gezeichnet, welche für die Temperaturen 1°, 15° und 23° die Abhängigkeit der procentischen Aenderung $[(T_1 - T_p)/T_1]\,100$ (Ordinate) vom Druck (Abscisse) darstellen. Der Einfluss des Druckes zeigt sich in hohem Maasse von der Temperatur abhängig; bei 1° ist der Einfluss einer Compression auf 600 Atm. in Procenten ausgedrückt, mehr als sechsmal so gross als bei 23°.

Betrachten wir die Curven in ihrer Gesammtheit, so ist bei keiner derselben ein Minimum der Viscosität zu beobachten; bis zu 500 Atm. verursacht die Compression noch immer eine zunehmende Verminderung der Viscosität; aber die Abnahme der Viscosität wird mit zunehmendem Druck beständig kleiner, sodass z. B. bei 23° eine Druckzunahme von 1 auf 100 Atm. ungefähr dieselbe procentische Aenderung der Viscosität hervorbringt, wie die Zunahme des Druckes von 100 auf 600 Atm.

Durch die weitaus grösste Zahl von Versuchen ist die Curve für 15° festgelegt. Dass trotz der guten Uebereinstimmung der Beobachtungen untereinander bei dem Zeichnen der Curve einige Willkür bleibt, kann nicht Wunder nehmen, wenn man bedenkt, wie stark sich kleine Aenderungen in den beobachteten Werthen bei der Berechnung der procentischen Aenderungen geltend machen.

In Fig. 5 sind als Abscissen Temperaturen, als Ordinaten die aus Fig. 4 entnommenen procentischen Aenderungen der Viscosität für 600 Atm., 300 Atm. und 100 Atm. gewählt. Die drei Curven schliessen in der Nähe von 23° eng zusammen, und lassen, nach ihrem Verlauf zu urtheilen, die Möglichkeit offen, dass sie bei wesentlich höherer Temperatur die Abscissenaxe schneiden werden, d. h. dass von da ab die Viscosität des Wassers mit zunehmendem Druck zunehmen wird. Nach den Versuchen von Warburg und Sachs muss diese Temperatur dann jedenfalls über 40° liegen.

Meine Beobachtungen sind mit den Resultaten von Röntgen und Warburg und Sachs nicht direct vergleichbar, da die

Versuchstemperaturen etwas andere sind. Ein angenäherter Werth für die procentische Aenderung der Viscosität mit dem Druck lässt sich für jede Temperatur aus Fig. 5 entnehmen. Ich gebe im Folgenden eine Zusammenstellung der Werthe von $\alpha = (T_p - T'_1)/T'_1 \, 1/p$, wo p den Druck in Atm. bezeichnet, wie sie sich aus den Versuchen von Röntgen (R)[1]), Warburg und Sachs (W. u. S.)[2]) und den meinigen (C) berechnen. Dazu reducirte ich die Beobachtungen von Röntgen zunächst auf gemeinsame Temperatur nach der in der Arbeit selbst benutzten Formel von Slotte[3]), berechnete für jeden Druck, der zwischen 19 und 27 Atm. variirte, das zugehörige α und nahm aus den so für 6,5° und 11,6° gefundenen Werthen das Mittel. Bei Warburg und Sachs ist ohnehin das α, wie es sich aus Versuchen bei 50, 100 und 150 kg/qcm Druck ergibt, berechnet; es war nur durch Multiplication mit 1,03 auf Atm. umzurechnen, und aus den bei benachbarten Temperaturen angestellten Versuchsreihen das Mittel zu nehmen. Endlich erhalte ich nach meinen Versuchen aus der procentischen Aenderung der Viscosität für die betreffenden Temperaturen nach der in Fig. 5 für 100 Atm. gezeichneten Curve α durch Division mit $100\,p = 10000$.

$\alpha \cdot 10^6$.

Temperatur	R.	W. u. S.	C.
6,5	334	—	140
11,6	154	226	90
20°—21,4°	—	144	40
30°—40°	—	90	—

Es ergibt sich also auch aus den Beobachtungen von Röntgen einer- und Warburg und Sachs andererseits eine deutliche Abnahme des Einflusses, welchen der Druck ausübt, mit steigender Temperatur. Eine Uebereinstimmung der Werthe von α dem absoluten Betrage ist kaum zu erwarten, da es nur angenähert berechnet werden konnte aus Versuchen, die untereinander, namentlich bei Warburg und Sachs, bedeutende Differenzen aufweisen.

1) l. c. p. 514.
2) Sachs, Dissert. Freiburg i. Br. 1883. p. 31.
3) Slotte, Wied. Ann. **14.** p. 21.

Salzlösungen.

Nach den erhaltenen Resultaten war es offenbar von Interesse, das Verhalten von Salzlösungen bei verschiedener Concentration zu untersuchen. Da die ausströmende Flüssigkeit, ohne den Apparat wesentlich complicirter zu machen, nicht leicht aufgefangen werden konnte, so war ich in der Wahl der Substanzen, die ohne Schaden für die Compressionspumpe untersucht werden konnten, beschränkt. Die folgenden Tabellen geben die Resultate für wässerige NaCl-Lösungen von vier verschiedenen Concentrationen wieder. Davon wurden zwei bei drei verschiedenen Temperaturen untersucht. Der über den Tabellen angegebene Procentgehalt wurde bei Herstellung der Lösung aus der mit dem Pyknometer bestimmten Dichte berechnet, am Schluss der Versuche durch Eindampfen direct bestimmt. Eine Aenderung in der Concentration der Lösungen während der Dauer der Versuche war nicht zu constatiren.

Tabelle II.

NaCl-Lösung 25,7 Proc.

Nr.	τ	p	t	τ'	t'	T	$\frac{T_p - T_1}{T_1}100$
314_{III}	1,6	1	9330	2°	9223	9286	
316_{III}	2,7	1	9162	2°	9349		
227_{IV}	14,40	1	6369,5	14,5°	6350	6357,38	
229_{IV}	14,5	1	6357,5	14,5°	6357,5		
346_{III}	14,5	1	6360	14,5°	6360		
347_{III}	14,5	1	6362	14,5°	6362		
267_{III}	22,5	1	5178,5	22,5°	5178,5	5174	
268_{III}	22,5	1	5173	22,5°	5173		
274_{III}	22,5	1	5170,5	22,5°	5170,5		
234_{IV}	14,3	300	6544	14,5°	6504	6508	2,37
226_{IV}	14,35	300	6546	14,5°	6516		
228_{IV}	14,5	300	6504	14,5°	6504		
232_{IV}	14,5	300	6508	14,5°	6508		
315_{III}	2,2	600	9623	2°	9676,5	9676,5	4,2
230_{IV}	14,5	600	6636,5	14,5°	6636,5		
231_{IV}	14,5	600	6663,5	14,5°	6663,5	6644	4,5
233_{IV}	14,5	600	6632	14,5°	6632		

Nr.	τ	p	t	τ'	t'	T	$\frac{T_p - T_1}{T_1'}$ 10
269_{III}	22,5	600	5407	22,5°	5407		
276_{III}	22,5	600	5419	22,5°	5419	5412	4,59
275_{III}	22,55	600	5403,5	22,5°	5410		
			NaCl-Lösung 13,8 Proc.				
238_{IV}	13,8	1	4234	14,5°	4144,5		
243_{IV}	14,05	1	4217	14,5°	4159,5	4160,5	
237_{IV}	14,2	1	4212	14,5°	4173,5		
239_{IV}	14,25	1	4196,5	14,5°	4164,5		
247_{IV}	13,8	300	4283	14,5°	4192,5		
246_{IV}	13,9	300	4277	14,5°	4199,5	4191,38	0,74
244_{IV}	14,05	300	4242,5	14,5°	4184,5		
245_{IV}	14,1	300	4241	14,5°	4189		
242_{IV}	14,1	600	4281	14,5°	4228,5		
241_{IV}	14,15	600	4268	14,5°	4222	4230,33	1,68
236_{IV}	14,2	600	4280	14,5°	4240,5		
			NaCl-Lösung 8 Proc.				
317_{III}	3,85	1	4826	2°	5071,5		
319_{III}	4,85	1	4767	2°	5079	5077,17	
321_{III}	4,6	1	4735.5	2°	5081		
249_{III}	13,9	1	3686,5	14,5°	3629,5		
250_{III}	13,9	1	3685	14,5°	3628	3639,5	
344_{III}	14,5	1	3653	14,5°	3653		
345_{III}	14,6	1	3638	14,5°	3647,5		
279_{III}	22,5	1	3034	22,5°	3034	3029,75	
277_{III}	22,6	1	3018	22,5°	3025,5		
318_{III}	4,0	600	4755	2°	4991	4991,5	− 1,69
320_{III}	4,55	600	4691	2°	4992		
341_{III}	14,3	600	3669	14,5°	3650		
342_{III}	14,4	600	3671,5	14,5°	3662	3655	+ 0,42
343_{III}	14,4	600	3662,5	14,5°	3653		
280_{III}	22,5	600	3054	22,5°	3054		
281_{III}	22,5	600	3043	22,5°	3043	3050,67	+ 0,69
278_{III}	22,6	600	3048	22,5°	3055		
			NaCl-Lösung 4 Proc.				
346_{III}	2,5	1	4712	2°	4780	4787	
366_{III}	3,45	1	4597	2°	4794		
365_{III}	3,0	600	4552,5	2°	4670,5	4658	− 2,69
368_{III}	3,15	600	4510	2°	4645,5		

In Fig. 6 sind in derselben Weise wie in Fig. 4 für Wasser, die Curven gezeichnet, welche die Abhängigkeit der procentischen Aenderung der Viscosität vom Druck darstellen; die gestrichelten beziehen sich auf die Temperatur 2°, die ausgezogenen auf 14,5°; der Procentgehalt der Lösung ist bei jeder Curve angegeben; die Curven für reines Wasser sind mit 0 Proc. bezeichnet. Mit zunehmender Temperatur und zunehmendem Procentgehalt breiten sich also die Curven, indem sie sich mehr und mehr zu geraden Linien strecken, fächerförmig über die beiden, positiven Abscissen entsprechenden, Quadranten aus. Die gesättigte Lösung (25,7 procent.) verhält sich dem reinen Wasser gerade entgegengesetzt (die Viscosität nimmt zu mit dem Druck und zwar nahezu dem Druck proportional), während eine verdünnte NaCl-Lösung (z. B. von 4 Proc. bei 2°) in ihrem Verhalten ganz dem reinen Wassers bei einer etwas höheren Temperatur (im gewählten Beispiel etwa bei 13°) entspricht. Wir erhalten also dieselbe Abhängigkeit der Viscosität vom Druck einmal, wenn wir Wasser bei einer bestimmten Temperatur, und zweitens, wenn wir eine NaCl-Lösung von passender Concentration bei einer etwas tieferen Temperatur betrachten. Je concentrirter die Lösung wird, desto mehr streckt sich die Curve, welche die Abhängigkeit der Aenderung der Viscosität vom Druck darstellt, bis sie bei der gesättigten Lösung nahezu geradlinig wird.

Die zweite Schlussfolgerung, die wir der Figur entnehmen, ist die folgende: Mit steigender Concentration nimmt der Einfluss der Temperatur ab. Während bei einer 8 procent. Lösung eine Temperatursteigerung von 2° auf 14,5° den Sinn der Aenderung der Viscosität mit dem Druck umkehrt (bei 2° vermindert der Druck die Viscosität, bei 14,5° vermehrt er sie), schliessen bei der gesättigten Lösung die Curven für 2° und 14,5° dicht zusammen; die Temperatur äussert nur einen sehr geringen Einfluss.

In etwas anderer Weise stellen Fig. 7 und Fig. 8 das Verhalten dar. In Fig. 7 sind die procentischen Aenderungen der Viscosität für 600 Atm. als Ordinaten, die Temperaturen als Abscissen gewählt. Danach wäre z. B. für eine 8 procent. Lösung bei 11° der Einfluss eines Druckes von 600 Atm. Null; bei tieferer Temperatur nimmt die Viscosität mit zu-

nehmender Dichte ab, bei Temperaturen über 11° zu. Je grösser die Concentration wird, desto mehr strecken sich die Curven. Es macht sich also das anomale Verhalten des Wassers, sowohl was die starke Abhängigkeit von der Temperatur, als auch was die besondere Art der Abhängigkeit vom Druck betrifft, am meisten geltend bei Lösungen von geringer Concentration und tiefer Temperatur.

Die Curve Fig. 8 stellt die Abhängigkeit der procentischen Aenderung der Viscosität für 600 Atm. vom Procentgehalt (Abscissen) für 2° und 22,5° dar. Während bei 22,5° eine Aenderung des Procentgehaltes um gleichviel auch eine immer gleiche Aenderung in der procentischen Aenderung der Viscosität bedingt, ist bei 2° eine kleine Aenderung des Procentgehaltes bei Lösungen bis zu etwa 10 Proc. von unverhältnissmässig grösserem Einfluss als bei grösserer Concentration. Mit anderen Worten: die beiden Erscheinungen, das Verhalten des Wassers und das einer gesättigten Lösung addiren sich zu einander bei Lösungen mittlerer Concentration. Des weiteren lässt sich aus der Fig. 8 entnehmen, dass es für jeden Procentgehalt zwischen 5 und 12 Proc. eine bestimmte Temperatur zwischen 2° und 22,5° geben muss, bei welcher der Einfluss eines Druckes von 600 Atm. Null ist.

NaCl löst sich im Wasser unter Volumenzunahme, die Löslichkeit nimmt also zu mit wachsendem Druck. Es erschien nicht ausgeschlossen, dass ein Salz, das sich mit Volumenverminderung löst, dessen Löslichkeit also durch wachsenden Druck verringert wird, auch in bezug auf den Einfluss des Druckes auf die Viscosität sich wesentlich anders verhalten würde. Indessen zeigten einige orientirende Versuche mit einer 26 procent. NH_4Cl-Lösung dem Sinne und der Grössenordnung nach ein den NaCl-Lösungen analoges Verhalten. Ich sah deshalb von einer genaueren Untersuchung ab.

Dagegen erschien es mir wünschenswerth, irgend einen anderen Körper zu untersuchen, der keine Lösung und kein Leiter der Electricität sei. Dazu wählte ich aus Gründen, die lediglich durch die Einzelheiten der Versuchsanordnung bedingt wurden, französisches Terpentinöl. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Tabelle III.

Terpentinöl. Dichte 0,866 bei 18°.

Nr.	τ	p	t	τ'	t'	T	$\frac{T_p - T_1}{T} 100$
325	6,65	1	5804,5	7°	5774,5	5737,5	
328	6,95	1	5770	7°	5762,5		
329	7,1	1	5664	7°	5679		
336	8,3	1	5541,5	7°	5734,5		
354	12,55	1	5200	15°	4983	5022,5	
349	14,7	1	5161	15°	5134,5		
353	15,3	1	4923,5	15°	4950		
332	7,25	100	6622,5	7°	6649,5	6623	15,4
331	7,35	100	6558,5	7°	6596,5		
326	6,75	300	8863,5	7°	8826,5	8636,5	50,5
330	7,4	300	8387	7°	8446,5		
350	14.85	300	7461,5	15°	7439	7439	48,10
333	7,65	600	11551	7°	11679,5		
334	8,15	600	11110,5	7°	11337,5	11508,5	100,6
351	14,95	600	9928	15°	9918	9918	97,5

Der Einfluss der Compression ist hier unvergleichlich grösser; während sich die Viscosität der gesättigten NaCl-Lösung bei einer Compression auf 600 Atm. um höchstens 4,6 Proc. ändert, haben wir es beim Terpentinöl mit Aenderungen bis über 100 Proc. zu thun. Dass nicht etwa das Terpentinöl durch den hohen Druck dauernd chemisch verändert wurde, bewiesen Versuche, in denen die Ausflusszeit bei 1 Atm. nach vorheriger Compression bestimmt und derselbe Werth wie ohne Compression erhalten wurde. Wie bei der gesättigten NaCl-Lösung ist die Aenderung der Viscosität nahezu dem angewandten Druck proportional; der Einfluss der Temperatur ist auch hier gering, aber er macht sich in entgegengesetztem Sinne geltend. Während bei der NaCl-Lösung der Einfluss des Druckes bei tiefer Temperatur geringer war als bei höherer, ist es hier umgekehrt; die Aenderung der Viscosität für 600 Atm. beträgt bei 15° 97,5 Proc., bei 7° 100,6 Proc. Nach den Versuchen von Warburg und Sachs scheint sich Aether in dieser Beziehung wie Terpentinöl zu verhalten, Benzol dagegen wie die NaCl-Lösung. Wir haben es hier also nicht etwa mit einer charakteristischen Eigenschaft der einfachen Flüssigkeiten im Gegensatz zu Lösungen zu thun.

Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so ergibt sich:

1. Wie schon Röntgen und Warburg und Sachs fanden, wird die Viscosität des Wassers bis zu Temperaturen von 40° durch Druck vermindert.

2. Bis zu 900 Atm. und Temperaturen von 25° ist ein Minimum der Viscosität nicht zu beobachten, die Aenderung der Viscosität ist aber nicht dem Druck proportional, sondern wächst langsamer.

3. Der Einfluss des Druckes auf die Viscosität ist beim Wasser stark veränderlich mit der Temperatur und ist im Temperaturintervall 0—23° in der Nähe von 0° am grössten. Ob bei Temperaturen über 40° die Viscosität des Wassers durch Druck wächst, ist nicht entschieden.

4. Bei concentrirten wässerigen NaCl- und NH_4Cl-Lösungen nimmt die Viscosität der Lösung durch Druck zu und es ist die procentische Aenderung nahe dem Druck proportional. Der Einfluss der Temperatur ist gering.

5. Je verdünnter eine NaCl-Lösung ist, desto mehr macht sich das anomale Verhalten des Wassers geltend, sowohl was den Einfluss der Temperatur, als auch den Einfluss weiterer Drucksteigerung betrifft. Von einer 5procent. Lösung an aufwärts bis zu einer 10procent. gibt es für jede Concentration eine bestimmte Temperatur zwischen 2° und 22,5°, bei welcher der Einfluss eines Druckes von 600 Atm. auf die Viscosität Null ist (cf. Fig. 6).

6. Bei Terpentinöl ist die Aenderung der Viscosität mit dem Druck über 20 mal so gross als bei der gesättigten NaCl-Lösung und nahe dem Druck proportional. Der Sinn der Aenderung ist der gleiche. Der Einfluss der Temperatur ist gering und macht sich im entgegengesetzten Sinne geltend, wie bei einer NaCl-Lösung.

Würzburg, Physikal. Institut. Febr. 1892.

III. *Ueber den Begriff der Localisirung der Energie; von Willy Wien.*

Die umfassende Bedeutung, welche der Begriff der Energie durch das Gesetz ihrer Erhaltung gewonnen hat, macht denselben zu einer zweckmässigen Grundlage für die Darstellung der Naturvorgänge. Während in der reinen Mechanik, bei welcher man es nur mit der Verfolgung bekannter Bewegungen zu thun hat, der Werth des Energiebegriffes nicht so deutlich hervortritt, zeigt er sich unentbehrlich überall da, wo die Bewegungen, falls wir auch genügende Veranlassung haben, solche zu vermuthen, doch ihrer Art nach verborgen sind. Die analytischen Methoden, welche zur Behandlung dieser Erscheinungen ausgebildet wurden, ruhen, wie es nothwendig ist, auf den Grundlagen der Newton'schen Mechanik, unterscheiden sich von ihr aber dadurch, dass sie die Energie als grundlegend betrachten, welche durch die feststehende Eigenschaft ihrer Unzerstörbarkeit vorzugsweise geeignet ist, die Darstellung mannigfaltiger Einzelvorgänge in zusammenfassender Weise zu ermöglichen.

Bei der Ausbildung des Energiebegriffes hat man sich noch nicht veranlasst gesehen, alle Folgerungen zu ziehen, welche durch ihre Eigenschaften bedingt werden. Während man die Constanz der Materie so auffasste, dass ein materieller Theil seine Lage nur auf stetigem Wege verändern könne, ist diese Vorstellung auf die Energie nicht ausgedehnt worden. Nachdem man aber in neuester Zeit an dem Glauben an unvermittelte Fernkräfte zu rütteln begonnen hat, ist kein principielles Hinderniss vorhanden, auch der Energie nur eine stetige Ausbreitung von Ort zu Ort zuzuschreiben. Sie würde dadurch vollständig in Parallele zur Materie treten, und in der That ist bei vielen Naturvorgängen, wie bei Strahlungen und geleiteter Wärme, die Vorstellung stetiger Fortbewegung der Energie schon lange unerlässlich gewesen.

Die Frage nach der Richtung der Energiebewegung und der Geschwindigkeit ihrer Ausbreiung ist hier schon seit lange Gegenstand weitläufiger Untersuchungen. Die Gesetze für die Bewegung der Energie waren in diesen Fällen noch leicht zu übersehen und es bedurfte zu ihrer Festlegung keiner weiteren Formulirungen. Ein weitergehendes Bedürfniss solcher Vorstellungen ist neuerdings namentlich in der Electricitätslehre herangetreten. So sind die Vorgänge in einem constanten galvanischen Strome oder einem veränderlichen electromagnetischen Felde auf Grund der reinen Maxwell'schen Theorie ohne Zuhülfenahme dieser Betrachtungsweise sehr schwer anschaulich zu machen. Mit ihr kann man einen constanten galvanischen Strom als eine stationäre Bewegung der Energie auffassen, indem die Kraftlinien aus der electromotorischen Stelle austreten, durch den Aether nach der Oberfläche des Stromkreises wandern, durch sie eintreten und im Innern des Leiters in Wärme verwandelt werden. Diese Vervollständigung der Maxwell'schen Anschauungen ist von Poynting[1]) gegeben und durch die Experimente von H. Hertz nahegelegt worden. Von ihm ist auch darauf aufmerksam gemacht, dass der Begriff der Energiebewegung zum Zwecke der Anwendung aut diese Fragen einer genauen Analyse zu unterwerfen sei.[2])

Ein sich periodisch veränderndes electromagnetisches Feld ist der Sitz von Energiestrahlung. Aber die Art ihrer Vertheilung ist hier schon zu verwickelt, als dass man mit den einfachen Vorstellungen, wie wir sie aus der Lichtstrahlung gewonnen haben, zu einer übersichtlichen Auffassung der Thatsachen gelangen könnte.

Es erscheint deshalb wichtig, zu erforschen, in welchen Fällen der Energiebegriff die Vorstellung der Localisirung zulässt. Es liegt in der Natur der Sache, dass hierbei immer der ganze Energiewerth, also die Summe der potenziellen und kinetischen Energie genommen werden muss. Die nothwendige Unterscheidung beider Arten ist für die Anwendung des Energiebegriffes insofern ungünstig, als man, falls beide vorhanden sind, durch Kenntniss der Gesammtenergie, auch wenn diese

1) J. H. Poynting, Phil. Transact. 1885. **2.** p. 343.
2) Gött. Nachr. 19. März 1890.

wie wir immer voraussetzen, in analytisch entwickelter Form gegeben ist, von den thatsächlichen Vorgängen noch nichts bestimmtes weiss, da die Darstellung der wirklichen Bewegung noch die Kenntniss der Differenz beider Energieformen erfordert. Ist das System unvollständig, so genügt auch dies nicht in allen Fällen, sondern nur solange das Princip der kleinsten Wirkung gilt.[1])

Wenn man die Gesammtenergie betrachtet, so wird sich zeigen, dass man von einer stetigen Ausbreitung derselben sprechen kann in allen Fällen, wo man es mit stetigen Massen und Druckkräften zu thun hat. Sie bleibt auch noch bestehen, wenn conservative Kräfte auf stetige Massen wirken und man sich auf die Betrachtung dieser letzteren beschränkt. Dagegen hört diese Auffassung auf bei Kräften, welche auf discrete Massen wirken.

Während die electrischen und magnetischen Kräfte sich auf Druckkräfte zurückführen lassen und in den Rahmen unserer Auffassung passen, ist dies bei der Schwerkraft, sobald man das vollständige, aus discreten Massen bestehende System betrachtet, nicht mehr der Fall. Eine Zurückführung auf Druckkräfte ist hier nicht zulässig, denn gleichartige Massen üben hier anziehende Kräfte aus, und der Energievorrath, welcher bei gleichen, sich abstossenden Electricitätsmengen positiv ist, würde durch die Darstellung anziehender Kräfte das negative Vorzeichen erhalten müssen, was dem physikalischen Sinne widersprechen würde.

§ 1.

Allgemeine Grundbegriffe.

Die Bewegung der Energie ist eine Abstraction von der Bewegung der materiellen Körper. Es müssen daher zunächst immer bestimmte Angaben über die kinetischen Verhältnisse des zu betrachtenden Systems vorliegen. Wir werden die kinetische Energie mit L, die potenzielle mit F bezeichnen. Wir setzen

$$\frac{\partial (F+L)}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} \tag{1}$$

1) Vgl. v. Helmholtz, Ueb. die phys. Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung. Crelle Journ. **100.** p. 137 ff.

und betrachten einen beliebig geschlossenen Raum innerhalb des Systems, so wird

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t}(F + L)\,dx\,dy\,dz \qquad (2)$$
$$= -\int ds\,\{\mathfrak{u}\cos nx + \mathfrak{v}\cos ny + \mathfrak{w}\cos nz\}$$

wenn das Integral links über den Raum, rechts über seine Oberfläche erstreckt wird und $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ die Richtung der Normale desselben bezeichnen, welche nach dem Innern des Raumes genommen werden muss.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Zerlegung unsere Voraussetzung stetiger Energieausbreitung ausspricht. Denn in diesem Falle kann eine Aenderung des Energiewerthes in dem Raume nur durch seine Oberfläche hindurch eintreten; sie muss also als Oberflächenintegral sich darstellen lassen. Diese Möglichkeit ist an die Existenz der Gleichung (1) gebunden. Die Grössen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ sind *gerichtete* Grössen. Wir wollen sie als die *Componenten der strömenden Energie* bezeichnen.

Aus Gleichung (1) ersieht man, dass dieselben die Dimension der Energie multiplicirt mit einer Geschwindigkeit besitzen, also in den bekannten Symbolen

$$\left[m\,\frac{l^3}{t^3}\right].$$

In sehr vielen Fällen, bei Messung der Strahlungen, der Erwärmung durch electrische Vorgänge u. s. w. ist es die strömende Energie, welche gemessen wird. Aus diesem Grunde hat sie Anspruch auf besonderes physikalisches Interesse. In manchen Fällen ist eine weitere Zerlegung der $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ denkbar. Wenn man nämlich sicher ist, dass der Energievorrath des Systems zuvörderst Null sein kann und von einer bestimmten Quelle her sich eine bestimmte Energiemenge durch den Raum hin verbreitet. Man kann dann nach der Geschwindigkeit dieser Ausbreitung fragen. Zu dem Zwecke müssen sich die Grössen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ in Ausdrücke von der Form

$$\mathfrak{r}\frac{d\xi}{dt},\ \mathfrak{r}\frac{d\eta}{dt},\ \mathfrak{r}\frac{d\zeta}{dt}$$

zerlegen lassen, wo

$$\frac{d\xi}{dt},\ \frac{d\eta}{dt},\ \frac{d\zeta}{dt}$$

Geschwindigkeiten sind. Dann bezeichnet $\mathfrak{r}$ die Dichtigkeit der Energie.

In diesem Falle kann man eine Darstellungsmethode wählen, welche zunächst zwar nur secundäre Bedeutung hat, aber doch geeignet ist, die Festlegung der Begriffe zu erläutern. Wir haben

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$$

als gegebene Function von $x, y, z. t$ zu betrachten, welche wir erhalten haben, indem wir $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ und

$$\mathfrak{r} = \tfrac{1}{2} h \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \tag{3}$$

(wo h die Dichtigkeit der stetigen Masse bezeichnet), bildeten. Dabei muss die Gleichung gelten:

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Diese Gleichung spricht die Erhaltung der Energie in der Form der Continuitätsgleichung aus.

Man kann nun die Geschwindigkeiten $d\xi/dt$, $d\eta/dt$, $d\zeta/dt$ betrachten als diejenigen, mit denen ein bestimmter Energietheil sich fortbewegt. Dann sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines Energietheiles, zur Zeit t. Man kann also die x, y, z durch die ξ, η, ζ ersetzen. Dann gewinnt man durch Integration:

$$\begin{aligned} \xi &= \Psi_1 (t, c_1, c_2, c_3) \\ \eta &= \Psi_2 (t, c_1, c_2, c_3) \\ \zeta &= \Psi_3 (t, c_1, c_2, c_3), \end{aligned}$$

wo die c unabhängig sind von t. Nennen wir nun die Coordinaten zur Zeit t_0 a, b, c, so gewinnen wir diese Grössen als Funktionen von t_0 und den c und umgekehrt die letzteren ausgedrückt durch t_0 und a, b, c; setzen wir diese Werthe in die obigen Gleichungen, so können wir den Ort bestimmen, an welchem sich der Energietheil, zur Zeit t, befindet, der zur Zeit t_0 am Orte a, b, c war. Dabei muss die Gleichung gelten:

$$\frac{d(\mathfrak{r} D)}{dt} = 0,$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial a} & \frac{\partial \xi}{\partial b} & \frac{\partial \xi}{\partial c} \\ \frac{\partial \eta}{\partial a} & \frac{\partial \eta}{\partial b} & \frac{\partial \eta}{\partial c} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial a} & \frac{\partial \zeta}{\partial b} & \frac{\partial \zeta}{\partial c} \end{vmatrix}$$

§ 2.

Hydrodynamik.

Von den Vorgängen der reinen Mechanik sind für uns zunächst die Bewegungen der Flüssigkeiten von Interesse, weil bei ihnen die Voraussetzung stetiger Energieausbreitung ohne weiteres erfüllt ist. Die allgemeinen Gleichungen lauten bekanntlich:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{h}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{h}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{d y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{h}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} + \frac{\partial (hw)}{\partial z} = 0,$$

wenn u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit, V die Potentialfunction der äusseren Kräfte, h die Dichtigkeit und p den Druck bezeichnen. Dabei ist p eine Function von h.

Um nun die Grössen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ zu bilden, multipliciren wir die erste Gleichung mit u, die zweite mit v, die dritte mit w und addiren sie. Ferner setzen wir

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

bilden das Raumintegral über einen geschlossenen Raum und integriren partiell nach x, y und z. Dann erhalten wir

$$\iiint h\left\{u\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial t}\right\} dx\,dy\,dz =$$

$$\int ds\left\{u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz\right\}\left[p - hV + \frac{h}{2}q^2\right]$$

$$+ \iiint\left\{p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + V\frac{\partial h}{\partial t}\right.$$

$$\left. - \frac{q^2}{2}\frac{\partial h}{\partial t}\right\} dx\,dy\,dz.$$

Zieht man die Raumintegrale zusammen, so werden die-
lben

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t}\left\{\tfrac{1}{2}(hq^2) - \frac{\partial}{\partial t}(Vh) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \times dx\, dy\, dz.$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}(hq^2)\right) = \frac{\partial L}{\partial t},$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t}(Vh) + p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

ie gewonnene Umformung ist also die durch die Gleichungen
) und (2) vorgeschriebene. Es wird daher

$$) \quad \begin{cases} \mathfrak{u} = -u(p - hV + \tfrac{1}{2}hq^2) \\ \mathfrak{v} = -v(p - hV + \tfrac{1}{2}hq^2) \\ \mathfrak{w} = -w(p - hV + \tfrac{1}{2}hq^2) \end{cases}$$

Man ersieht aus diesen Gleichungen, dass die Energie hier
ımer dieselbe Bewegungsrichtung hat wie die Flüssigkeit
lbst. Die Componenten der strömenden Energie sind die-
lben für eine elastische, wie für eine incompressible
üssigkeit.

Man kann noch eine Umformung vornehmen, welche es
stattet, die Strömungscomponenten direct aus den als be-
nnt vorausgesetzten Componenten der translatorischen und
tatorischen Bewegung der Flüssigkeit zu entnehmen.

Man kann nämlich nach Clebsch[1]) die allgemeinen Ge-
hwindigkeitscomponenten einer Flüssigkeit schreiben:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \chi \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \chi \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \chi \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

ınn gilt für p die Gleichung:

$$\frac{p}{h} = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} + \tfrac{1}{2}\chi^2\left\{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

1) Crelle, **56.** p. 1.

Hieraus ergeben sich dann

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{u} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}F_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x}F_2\right)h \\ \mathfrak{v} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}F_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial y}F_2\right)h \\ \mathfrak{w} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}F_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial z}F_2\right)h \end{cases}$$

wo

$$F_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \chi\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right\}$$
$$+ \chi^2\left\{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right\}$$
$$F_2 = F_1\chi.$$

Das erste Glied der rechten Seite der Gleichungen (5) rührt von der Richtung der translatorischen, das zweite von der der rotatorischen Bewegung der Flüssigkeit her. Die Energie der ersten strömt senkrecht zu den Flächen $\varphi = \text{const.}$, die der zweiten senkrecht zu den Flächen $\Psi = \text{const.}$ Die Schnittlinien der Flächen $\Psi = \text{const.}$ und $\chi = \text{const.}$ sind die Wirbellinien.

Es ist hiernach die Strömung der Energie zu berechnen, welche namentlich in den Specialfällen von Interesse sein wird, wo mehrere Wirbelfäden scheinbar Kräfte aufeinander ausüben. Die Energie strömt dann von dem einen zum anderen, und ihre Bewegung kann als Maass für jene Kräfte angesehen werden. Wir betrachten nun zunächst incompressible Flüssigkeiten.

Wenn χ und Ψ von Null verschieden sind, also Wirbel vorhanden bleiben, verschwinden im allgemeinen die Functionaldeterminanten

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial x} \text{ u. s. w.}$$

und

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x} \text{ u. s. w.}$$

nicht. Sie verschwinden aber, wenn χ und Ψ gleich Null sind. Dann lassen sich die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ als partielle Ableitungen einer Function darstellen. Es wird nämlich dann

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{u} = h\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \\ \mathfrak{v} = h\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \\ \mathfrak{w} = h\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}. \end{cases}$$

Nun ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

Man erhält denselben Werth von $\partial\mathfrak{u}/\partial x + \partial\mathfrak{v}/\partial y + \partial\mathfrak{w}/\partial z$, wenn man ausgeht von der Reihe

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{u} = \dfrac{h}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \\ \mathfrak{v} = \dfrac{h}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \\ \mathfrak{w} = \dfrac{h}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \end{cases}$$

wie man sich leicht durch Rechnung überzeugt bei Berücksichtigung der Gleichung $\Delta\varphi = 0$, in welche die Continuitätsgleichung bei incompressibeln Flüssigkeiten übergeht. Es können sich also die Werthe der Gleichungen (6) und (7) noch durch Integralconstanten unterscheiden.

Diese Gleichungen lassen sich auf anderem Wege verificiren, falls keine äusseren Kräfte wirken.

Man kann von diesen bei incompressibeln Flüssigkeiten absehen, weil sie von der Zeit unabhängig sein sollen, ihr Beitrag zum Werthe von $\partial(F+L)/\partial t$ bei constant bleibender Dichtigkeit Null ist. Die Energie der Flüssigkeit ist bei vorhandenem Geschwindigkeitspotential

$$F + L = \frac{h}{2}\iiint\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ und des Green'schen Satzes kann man ohne weiteres das Integral (2) bilden. Es ist

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz$$

$$= -\int ds \frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos nz\right]\right\}$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

also nach (2)

$$\mathfrak{u} = \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \text{ u. s. w.}$$

Es lassen sich also die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ als partielle Ableitungen einer Function

$$f = \frac{h}{2}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

darstellen. Aus dem Green'schen Satze folgt ferner:

$$\iiint dx\, dy\, dz \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial t}\right\}$$

$$= -\int ds \left\{\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n\, \partial t}\right\} = -\int ds \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

also

$$\int ds \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) = 2\int \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

woraus dann die Gleichungen (6) sich ergeben.

Wenn φ an der Oberfläche eines einfach zusammenhängenden Raumes gegeben ist und überall endlich und stetig bleibt, so lässt sich bekanntlich die Continuitätsgleichung $\Delta\varphi = o$ als Minimalsatz so ausdrücken, dass die Gleichung bestehen soll,

$$\delta \iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz = o.$$

Hieraus folgt

$$\delta \iiint \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$

$$= -\delta \int ds \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) = o,$$

Bei gegebener Bewegung in der Oberfläche ist die Strömung der Energie ein Minimum bei der wirklich vor sich gehenden Bewegung der Flüssigkeit.

Betrachten wir, um ein Beispiel zu geben, die Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit. Dann ist bekanntlich [1]) bezogen auf ein mit der Kugel verbundenes Coordinatensystem

$$\varphi = \frac{R^3}{2} u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

wenn die Kugel mit dem Radius R in der Richtung der x mit der Geschwindigkeit u sich fortbewegt.

Ist nun du / dt von demselben Vorzeichen wie u, d. h. wird die Kugel von aussen beschleunigt, so ist $\varphi (\partial \varphi / \partial t)$ jedenfalls positiv. Die Energiemenge, welche durch das Element ds der Kugeloberfläche fliesst, ist $ds \, \partial / \partial t (\varphi \, \partial \varphi / \partial n)$.

Hier ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u \frac{x}{R},$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) = - \tfrac{1}{2} u \frac{\partial u}{\partial t} \frac{x^2}{R}.$$

Es ist also $\partial / \partial t (\varphi \, \partial \varphi / \partial n)$ jedenfalls negativ, die Energie strömt aus der Kugel in die Flüssigkeit.

Wenn sich zwei Kugeln in der Flüssigkeit bewegen, und zwar mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so üben sie scheinbar Kräfte aufeinander aus. Es müssen dann noch äussere Kräfte thätig sein, um die gleichförmige Bewegung zu unterhalten. Es findet dabei eine Bewegung der Energie von einer Kugel zur andern statt. Durch die Arbeitsleistung der äusseren Kräfte, wird im allgemeinen der Energievorrath des Systems der Zeit nach geändert. Er bleibt constant, wenn eine der Kugeln ruht, oder beide mit gleicher Geschwindigkeit in derselben Richtung sich bewegen.

Es ist die Energiemenge, welche aus der ersten Kugel in die Flüssigkeit strömt [1])

---

1) **Kirchhoff**, Mechanik, 18. Vorles.

1) **Kirchhoff**, a. a. O. Es bedeuten: R, R' die Radien, u, v, w, u', v', w' die Geschwindigkeiten der Mittelpunkte, a, b, c, a', b', c' die Coordinaten derselben für die Kugeln, r, r' die die Abstände des Punktes x, y, z von den Mittelpunkten, alles bezogen auf ein *festes* Coordinatensystem.

$$= -\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int ds\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

$$= -\frac{\pi}{2}R^3 R'^3\Big\{(u^2 u' - u'^2 u)\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial a^3}$$

$$+\Big[(v w' + v' w)(v - v') + v v'(w - w')\Big]\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial b^2\,\partial c}$$

$$+\Big[(v w' + v' w)(w - w') + w w'(v - v')\Big]\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c^2}$$

$$+\Big[(v w' + v' w)(u - u') + (w u' + w' u)(v - v') + (u v' + u' v)(w - w')\Big]$$

$$\times\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial b\,\partial c} + (v^2 v' - v'^2 v)\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial b^3}$$

$$+\Big[(u v' + u' v)(v - v') + v v'(u - u')\Big]\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial b^2\,\partial a}$$

$$+\Big[(u v' + u' v)(u - u') + u u'(v - v')\Big]\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial a^2}$$

$$+(w^2 w' - w'^2 w)\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial c^3}$$

$$+(w u' + w' u)(w - w') + w w'(u - u')\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial c^2\,\partial a}$$

$$+(w u' + w' u)(u - u') + u u'(w - w')\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial a^2}$$

Die gleiche Energiemenge strömt aus der zweiten Kugel. Dieselbe verschwindet, sowohl wenn u, v, w oder u', v', w' Null sind oder auch wenn $u = u'$ $v = v'$ $w = w'$. In diesem Falle haben die äusseren Kräfte die Bedeutung, dass sie die Kugeln zu einem starren System verbinden. Im allgemeinen sind die gegenseitigen Einwirkungen der Kugeln nicht gleich und entgegengesetzt. Trotzdem fliesst durch beide Kugeln gleichviel Energie in die Flüssigkeit, solange die gleichförmige Bewegung unterhalten wird. Es hat nach dem vorhergehenden keine Schwierigkeit, die Strömungen der Energie überall in der Flüssigkeit zu verfolgen.

Wir gehen jetzt noch zu der Betrachtung einer incompressibeln reibenden Flüssigkeit über. Unsere Betrachtungsweise hat hier noch den besonderen Vortheil, dass sie durch Heranziehung der in Wärme umgewandelten Energiebeträge das System erst zu einem vollständigen macht. Zu den vorhandenen Bezeichnungen haben wir nur noch die Reibungsconstante k hinzuzufügen. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{1}{h}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}-k^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{1}{h}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}-k^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{1}{h}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=o.$$

Wir multipliciren wieder diese Gleichungen mit u beziehentlich v, w, und addiren sie, addiren ferner die aus der Continuitätsgleichung folgende identische Gleichung:

$$-k^2\left(u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right.$$

Unsere Integrationen geben dann

$$\iiint dx\,dy\,dz\left(u\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\int ds\left\{\left[(p-hV+\frac{h}{2}q^2)u\right.\right.$$

$$k^2\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}+v\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\cos nx+\left[(p-hV+\frac{h}{2}q^2)v\right.$$

$$k^2\left(2v\frac{\partial v}{\partial y}+u\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-w\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\cos ny+\left[(p-hV+\frac{h}{2}q^2)w\right.$$

$$k^2\left(2w\frac{\partial w}{\partial z}+u\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)-v\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]\cos nz\right\}$$

$$k^2\iiint dx\,dy\,dz\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der entsprechenden früheren hauptsächlich durch das hinzugefügte Raumintegral

auf der rechten Seite. Wir erkennen die physikalische Bedeutung desselben leicht durch die Erwägung, dass den Bewegungsgleichungen die Voraussetzung zu Grunde liegt, dass die Reibung nur durch die relativen Bewegungen der Flüssigkeitstheilchen, also durch die Grösse $\partial u / \partial x$, $\partial v / \partial y$, $\partial w / \partial z$, $\partial v / \partial z + \partial w / \partial y$, $\partial w / \partial x + \partial u / \partial z$, $\partial u / \partial y + \partial v / \partial x$ bedingt werden, welche die Dilatationsgeschwindigkeiten darstellen. Das Raumintegral gibt demnach die in der Zeiteinheit in der Flüssigkeit durch die Reibung in Wärme umgewandelte Energiemenge an. Um diesen Betrag wird die durch die Oberfläche eingetretene Energie vermindert. Eine sehr ähnliche Gleichung für die Energieströmung werden wir beim electromagnetischen Felde antreffen.[1]) Beide Fälle haben das gemeinsame, dass auch im stationären Zustande Energiebewegung stattfindet, die bei conservativen Systemen nicht eintreten kann.

Die Strömungscomponenten lauten:

$$4a \begin{cases} \mathfrak{u} = -u\left(p - hV + \tfrac{1}{2} h q^2\right) + h k^2 \left[2u\frac{\partial u}{\partial x} + v\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{d u}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \cdots\right.\right. \\ \mathfrak{v} = -u\left(p - hV + \tfrac{1}{2} h q^2\right) + h k^2 \left[2v\frac{\partial v}{\partial y} + u\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \cdots\right.\right. \\ \mathfrak{w} = -u\left(p - hV + \tfrac{1}{2} h q^2\right) + h k^2 \left[2w\frac{\partial w}{\partial z} + u\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \cdots\right.\right. \end{cases}$$

Sie enthalten ebenfalls noch die Reibungsconstante. Es rührt dies daher, dass die Druckkräfte in einer reibenden Flüssigkeit infolge der Reibung verändert erscheinen. In den Strömungscomponenten des electromagnetischen Feldes kommt die der Reibungsconstante entsprechende Leitungsfähigkeit nicht vor.

Ist die Flüssigkeit compressibel, so kann durch die elastische Wirkung eine fortschreitende Energiebewegung hervorgerufen werden.

Die Schallgeschwindigkeit ist die Vorstellung einer mit bestimmter Geschwindigkeit fortströmenden Energiemenge. Wir können dieselbe nach den voraufgegangenen Auseinandersetzungen schärfer definiren.

---

1) Vgl. w. u.

Wir hatten nach Gleichung 6)

$$\begin{cases} \mathfrak{u} = h \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \mathfrak{v} = h \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \mathfrak{w} = h \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$

Wenn wir nun eine bestimmte Geschwindigkeit der Energie-ɜwegung auffinden wollen, müssen wir die Componenten $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, ɜr Strömung nach den Festsetzungen, die im § 1 gemacht nd, durch die Dichtigkeit der Energie $\mathfrak{r}$ dividiren. Diese estimmung ist in unserm Falle eindeutig, weil zu gewisser eit Ruhe in der Flüssigkeit herrschen kann und dann von ner Stelle eine Erschütterung sich ausbreitet. Um $\mathfrak{r}$ zu er-alten gehen wir auf die Gleichung

$$dp = a^2 \, dh$$

ırück, wo p den Druck, h die Dichtigkeit und a eine Con-ante bezeichnen, welche nur von der Beschaffenheit der lüssigkeit abhängt.

Es sollen nun zunächst die Aenderungen der Dichtigkeit ls unendlich klein angesehen werden.

Setzt man

$$dh = \sigma h_0 ,$$

) kann man σ als Verdichtung der Luft an der betreffenden telle bezeichnen. Man erhält dann die Gleichungen

)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = - a^2 \sigma . \end{cases}$$

ie potentielle Energie ist $p \, dv$, wenn p den Druck, v das olumen bezeichnet. In unserem Falle ist

$$p = a^2 h_0 \sigma$$

$$dv = \frac{m}{h_0} - \frac{m}{h_0 (1 + \sigma)} = \frac{m \sigma}{h_0} = dx \, dy \, dz .$$

ie ganze potentielle Energie ist

$$= \tfrac{1}{2} \iiint \frac{h_0}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx \, dy \, dz .$$

Die kinetische Energie ist

$$= \frac{1}{2} \iiint h_0 \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} d x \, d y \, d z.$$

Hieraus ergibt sich für

$$\mathfrak{r} = \frac{h_0}{2} \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\}$$

Es muss dann die Gleichuug der Continuität, welche schon in den Green'schen Integralen implicirt steckt, erfüllt sein, nämlich:

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = o.$$

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit, wenn man die Ausdrücke für $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ einsetzt und die Gleichung (8) berücksichtigt und die Richtung der Normale beachtet.

Zerlegen wir nun

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{r} \frac{d \xi}{d t} \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{r} \frac{d \eta}{d t} \qquad \mathfrak{w} = \mathfrak{r} \frac{d \zeta}{d t},$$

so sind ξ, η, ζ die Componenten der Geschwindigkeit der Energiebewegung. Dieselben sind, wenn wir die Geschwindigkeit nach aussen positiv nehmen

$$\frac{d \xi}{d t} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\mathfrak{r}} \qquad \frac{d \eta}{d t} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\mathfrak{r}} \qquad \frac{d \zeta}{d t} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\mathfrak{r}}$$

Wir beschränken uns nun auf die Betrachtung kugeliger Wellen, welche vom Punkte $x = y = z = o$ erregt werden. Dann ist

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{2 a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{r}}\right)^2.$$

Ist noch

$$\left(\frac{d \varrho}{d t}\right)^2 = \left(\frac{d \xi}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d \eta}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d \zeta}{d t}\right)^2,$$

so wird

$$\frac{d \varrho}{d t} = - \frac{2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial r}}{\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2}.$$

Da φ im allgemeinen die Form

$$\frac{1}{r} F_1 (r - a t) + \frac{1}{r} F_2 (r + a t)$$

besitzt, wodurch zwei entgegengesetzt gerichtete Wellenzüge dargestellt werden, so kann man jeden für sich betrachten und erhält für den ersten

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\frac{\frac{2aF_1'^2}{r^2} - \frac{2aF_1'F_1}{r^3}}{\frac{F_1'^2}{r^2} + \left(\frac{F_1'}{r} - \frac{F_1}{r^2}\right)^2}.$$

Wenn nun F eine periodische Function ist, so wechselt das zweite Glied das Zeichen, wenn das Argument um $\pi/2$ wächst, während das erste sein Zeichen nicht verändern kann. Dieses gibt die fortströmende Energie an, während das zweite einen Hin- und Herstrom von Energie ausdrückt. Dieser überwiegt in der Nähe der Erregungsstelle, während er in grosser Entfernung gegen die fortströmende Energiemenge verschwindet.

Für $r = \infty$ sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -a\frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

$d\varrho/dt$ also unabhängig von φ.

Es bleibt dann

$$\frac{d\varrho}{dt} = a,$$

a ist also die constante Schallgeschwindigkeit für grosse Entfernungen.

Bei der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite ist die Geschwindigkeit der Energiebewegung im allgemeinen abhängig von der Geschwindigkeit der Luft. Wenn wir annehmen, dass die Bewegung parallel der x-Axe vor sich gehe, so erhalten wir

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{u(p + \frac{1}{2}hu^2)}{\int p\frac{\partial u}{\partial x}dt + \frac{1}{2}hu^2}.$$

Es hängt also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit vor allem auch noch davon ab, welche Function der Dichtigkeit der Druck p ist.

Diese Luftwellen, deren analytische Behandlung zuerst von Riemann[1]) durchgeführt ist, zeigen noch das physikalisch

1) Riemann, Gesammelte Werke, p. 145.

wichtige Verhalten, dass bei ihnen unstetige Aenderungen der Dichtigkeit und der Geschwindigkeit eintreten können.[1])

Eine solche Unstetigkeitsstelle möge mit der Geschwindigkeit c forteilen. Dann müssen an ihr stetig sein, die Flüssigkeitsmengen und die Energiemengen, welche durch sie hindurchfliessen. Sind die Geschwindigkeiten an beiden Seiten derselben u_1 und u_2, und setzen wir

$$u_1 = c + v_1 \quad u_2 = c + v_2,$$

so erfordert die erste Bedingung, dass

$$h_1 v_1 = h_2 v_2.$$

Da die Werthe von u_1, u_2, h_1, h_2 an beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle beim Fortschreiten derselben sich nicht ändern, so wird Energie durch dieselbe nur fliessen können, indem durch die Druckdifferenz die hindurcheilende Masse von der Geschwindigkeit v_1 zu v_2 relativ zur Unstetigkeitsstelle gehoben wird. Die von der ersten Seite fliessende Energiemenge, gemessen durch die Beschleunigung durch die Druckdifferenz, ist also im Flächenelement ds

$$ds\,\mathfrak{u}_1 = (p_1 - p_2)\,v_1\,ds$$

die durch ds auf der anderen Seite eintretende gemessen durch die Beschleunigung der Masse $v_1 h_1$

$$ds\,\mathfrak{u}_2 = v_1\,(v_2 - v_1)\,v_1\,h_1\,ds.$$

Also da $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$

$$p_1 - p_2 = (v_2 - v_1)\,v_1\,h_1.$$

Die oben abgeleiteten Differenzialgleichungen verlieren an der Unstetigkeitsstelle ihre Giltigkeit.

Der eben betrachtete Fall ist, abgesehen von seinem speciellen Interesse, noch deshalb besonders wichtig, weil er zeigt, dass den physikalischen Anforderungen an Unstetigkeitsflächen Genüge geschieht, wenn die Strömung der Massen

---

1) Lord Rayleigh (Theory of Sound II. p. 41) hat darauf hingewiesen, dass eine solche Bewegung, wie sie Riemann hier annimmt, nur durch Einwirkung äusserer Kräfte aufrecht erhalten werden könne. Der Beitrag dieser Kräfte alterirt indessen nicht unsere Betrachtungen.

und der Energie durch dieselben ihre Stetigkeit bewahrt. Die übrigen physikalischen Grössen können unstetige Werthe annehmen. Wir werden noch später Gelegenheit haben, auf diese Bemerkung zurückzukommen.

§ 3.

Elastische feste Körper.

In der reinen Mechanik bieten noch die elastischen festen Körper für unsere Betrachtungen besonderes Interesse.

Die Differenzialgleichungen der Bewegung lauten für diese, wenn man mit ξ, η, ζ die unendlich kleinen Verschiebungen, mit k und Θ constante Grössen bezeichnet, ferner mit h die Dichtigkeit und mit V das Kräftepotenzial

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
h\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= h\frac{\partial V}{\partial x} + k\left\{2(1+\Theta)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right. \\
&\qquad \left. + (1+2\,\Theta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y} + (1+2\,\Theta)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial z}\right\} \\
h\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= h\frac{\partial V}{\partial y} + k\left\{2(1+\Theta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right. \\
&\qquad \left. + (1+2\,\Theta)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y} + (1+2\,\Theta)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y\,\partial z}\right\} \\
h\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= h\frac{\partial V}{\partial z} + k\left\{2(1+\Theta)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right. \\
&\qquad \left. + (1+2\,\Theta)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial z} + (1+2\,\Theta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial y\,\partial z}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Multiplicirt man die Gleichungen mit $\partial\xi/\partial t$, $\partial\eta/\partial t$, $\partial\zeta/\partial t$, addirt sie und integrirt partiell, so ist, wenn wir noch setzen

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\
x_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} & y_z &= z_y = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\
y_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y} & z_x &= x_z = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \\
z_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} & x_y &= y_x = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}
\end{aligned}$$

und die Integration über einen geschlossenen Raum erstrecken

$$-\iiint h\left\{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right\} d x\, d y\, d z$$

$$= k\int d s\left\{\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}\Big(2(x_x+\Theta\sigma)+h V\Big)\cos n x + x_y\frac{\partial \xi}{\partial t}\cos n y + x_z\frac{\partial \xi}{\partial t}\cos\right.$$

$$+\frac{\partial \eta}{\partial t}\Big(2(y_y+\Theta\sigma)+h V\Big)\cos n y + y_x\frac{\partial \eta}{\partial t}\cos n x + y_z\frac{\partial \eta}{\partial t}\cos$$

$$+\frac{\partial \zeta}{\partial t}\Big(2(z_z+\Theta\sigma)+h V\Big)\cos n z + z_x\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cos n z + z_y\frac{\partial \zeta}{\partial t}\cos$$

$$+\iiint d x\, d y\, d z\left\{2 x_x\frac{\partial x_x}{\partial t}+2 y_y\frac{\partial y_y}{\partial t}+2 z_z\frac{\partial z_z}{\partial t}+z_y\frac{\partial z_y}{\partial t}\right.$$

$$\left.+y_z\frac{\partial y_z}{\partial t}+x_x\frac{\partial x_x}{\partial t}+2\Theta\sigma\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right\}$$

Die gegen die innern elastischen Kräfte des Systems geleistete Arbeit stellt die potenzielle Energie dar; dieselbe ist

$$F = -\iiint d x\, d y\, d z \,. f,$$

wo

$$f = -k\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2} x_y^2 + \tfrac{1}{2} z_x^2 + \tfrac{1}{2} y_z^2 + \Theta\sigma^2\}.$$

Das Raumintegral auf der rechten Seite der obigen Gleichung ist also

$$= + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Das auf der linken ist

$$= - \frac{\partial L}{\partial t},$$

es ist also $\partial / \partial t (F + L)$ durch das Oberflächenintegral dargestellt.

Es folgt also hier

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{u} &= + k\left\{\Big(2(x_x+\Theta\sigma)+h V\Big)\frac{\partial \xi}{\partial t} + x_y\frac{\partial \eta}{\partial t} + x_z\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right\}\\ \mathfrak{v} &= + k\left\{\Big(2(y_y+\Theta\sigma)+h V\Big)\frac{\partial \eta}{\partial t} + y_x\frac{\partial \xi}{\partial t} + y_z\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right\}\\ \mathfrak{w} &= + k\left\{\Big(2(z_z+\Theta\sigma)+h V\Big)\frac{\partial \zeta}{\partial t} + z_x\frac{\partial \xi}{\partial t} + z_y\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\}. \end{aligned}\right.$$

In einem isotropen elastischen Medium können sich sowohl longitudinale, wie auch transversale Verrückungen fortpflanzen. Wir können die Geschwindigkeit der Energie-

bewegung ermitteln. Verfolgen wir longitudinale ebene Schwingungen ξ in der Richtung x, so haben wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{2k}{h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (1 + \Theta)$$

$$\mathfrak{u} = 2k(1 + \Theta) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\mathfrak{r} = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 k(1 + \Theta),$$

also, da

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \sqrt{\frac{2k}{h}(1 + \Theta)} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{r}} = \sqrt{\frac{2k}{h}(1 + \Theta)},$$

ebenso bei transversalen ebenen Schwingungen, wenn

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{k}{h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\mathfrak{w} = k \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{r}} = \sqrt{\frac{k}{h}}.$$

Bei Transversalwellen, welche in einer beliebigen Richtung vor sich gehen, kann man schreiben

$$\xi = \alpha \sigma \qquad \eta = \beta \sigma \qquad \zeta = \gamma \sigma$$

$$l x + m y + n z = s,$$

wo die α, β, γ, l, m, n Richtungscosinus bezeichnen, welche an die Bedingung

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = o$$

gebunden sind, dann gilt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{k}{h} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}.$$

Betrachten wir nun eine Ebene, welche durch die Linie l, m, n gelegt sein möge, sodass wir haben

$$a l + b m + c n = o,$$

wenn a, b, c die Richtungscosinus der Normale der Ebene bezeichnen, und berechnen die Energieströmung, welche durch diese Ebene fliesst. Dieselbe ist

$$\begin{aligned} &\mathfrak{u}\,a + \mathfrak{v}\,b + \mathfrak{w}\,c \\ &= k\frac{\partial\sigma}{\partial s}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\{2\alpha^2 l a + 2\beta^2 m b + 2\gamma^2 n c \\ &+ (\alpha m + \beta l)\beta a + (\gamma l + \alpha n)\gamma a \\ &+ (\alpha m + \beta l)\alpha b + (\beta n + \gamma m)\gamma b \\ &+ (\gamma l + \alpha n)\alpha c + (\beta n + \gamma m)\beta c\}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet bei Berücksichtigung der Beziehungen zwischen l, m, n und α, β, γ, a, b, c. Die Energie fliesst also überall in Richtung der Linie l, m, n. Uebrigens können auf beiden Seiten der betrachteten Ebene die Strömungscomponenten sich um endliche Werthe unterscheiden, ganz analog, wie in einer vollkommenen Flüssigkeit discontinuirliche Bewegungen vorkommen können. Diese Betrachtungen sind deshalb noch von besonderem Interesse, als sie ohne weiteres auf die Lichtbewegung angewandt werden können. Die Gleichungen vereinfachen sich in diesem Falle noch dadurch, dass man den Lichtäther als incompressibel anzusehen hat, so dass $\sigma = o$ wird. Dann hören auch die Longitudinalwellen auf zu existiren. Wenn man auf dem Boden der Elasticitätstheorie stehen bleiben will, muss man die Annahme machen, dass die Dichtigkeit des Aethers überall unverändert bleibt und die verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in verschiedenen Medien von der Verschiedenheit der Elasticität herrühre.

Wir haben oben gesehen, dass an der Grenze heterogener Medien die Strömung der Masse und der Energie normal zur Trennungsfläche stetig bleiben muss. Wir wollen dieselbe nun für die Lichtbewegung aufsuchen. Wir nehmen dabei die Ebene $z = o$ als Trennungsfläche an.

Dann gibt die erste Bedingung

(11) $$\zeta = \zeta',$$

wo der Strich sich auf das zweite Medium bezieht, die zweite

(12) $$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}'.$$

Man kann nun $\mathfrak{w}$ schreiben, wenn man berücksichtigt, dass $\sigma = o$ ist

$$= k\left\{-2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\}.$$

Diese Grenzbedingung ist dieselbe, welche von Kirchhoff[1]) abgeleitet ist aus der Hypothese, dass die Differenz der Arbeit der Druckkräfte an beiden Seiten der Trennungsfläche verschwinde.

Man erkennt dies leicht, wenn man bedenkt, dass die Arbeit, welche die Druckkräfte leisten, die Strömung der Energie in dem von uns gebrauchten Sinne darstellt.

In der That gibt der Kirchhoff'sche Ausdruck für isotrope Medien für diese Arbeit

$$= -k\left[\left\{\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right\}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left\{\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right\}\frac{\partial \xi}{\partial t} + 2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) - 2\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial t} - 2\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + 2\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem unserigen überein.

Die beiden Grenzbedingungen sind physikalisch nothwendig, weil die Erfahrung zeigt, dass keine Umwandlung der Lichtenergie in andere Formen an der Grenze durchsichtiger Medien stattfindet. Aus der reinen Elasticitätstheorie würden die Grenzbedingungen $\zeta = \zeta'$, $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ und Gleichheit der Drucke auf die Trennungsfläche folgen. Die letzte Bedingung ist bekanntlich für die Lichtbewegung nicht zutreffend. Da man den Boden der Elasticitätstheorie mit dem Aufgeben derselben verlässt, kann man auch die beiden Bedingungen $\xi = \xi'$ $\eta = \eta'$ nur als hypothetische bezeichnen.

Die Theorie von Sir William Thomson auf Grund eines contractilen labilen Aethers, in welchem die longitudinalen Wellen eine verschwindende Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben, fusst bei der Grenzbedingung ganz auf den Gesetzen für elastische feste Körper. Die Stetigkeit der Energiebewegung folgt dann naturgemäss von selbst, obwohl der Aether den Raum nicht nothwendig stetig zu erfüllen braucht.

1) G. Kirchhoff, Ueb. die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze krystallinischer Mittel. Ges. Abh. p. 352.

Wir wollen nun dazu übergehen, die Energiebewegung zu verfolgen, wie sie von einer, im Punkte $x = y = z = o$ des elastischen Mediums erregten Schwingung sich verbreitet.

Wir nehmen an, dass die Schwingung parallel der z-Axe vor sich gehe und setzen

$$\xi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \quad \eta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

wo φ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{k}{h} \Delta \varphi$$

ist. Wir nehmen die Lösung

$$\varphi = \frac{\mathfrak{A} \cos (m r - n t)}{r}$$

wo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{n^2}{m^2} = \frac{k}{h}$$

ist. Im Nullpunkte ist

$$\varphi = \frac{\mathfrak{A} \cos n t}{r}$$

also

$$\Delta \varphi = o \qquad \zeta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

In der Nähe des Nullpunktes ist die Bewegung die einer incompressibeln Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitspotential

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mathfrak{A} \cos n t \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

wie es bei der Bewegung einer kleinen Kugel in der Flüssigkeit hervorgerufen wird. Es ist dies dasselbe Gleichungensystem, welches von Hrn. Hertz[1]) für electrische Schwingungen aufgestellt ist.

Es folgen dann die Werthe für die Strömungscomponenten der Energie, wenn $mr - nt = \alpha$ gesetzt wird:

1) Hertz, Ueber die Kräfte electrischer Schwingungen. Wied. Ann. 36. p. 1. 1889.

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{A}^2 k n x \Big\{ - \frac{m^5}{r^5}(x^2 + y^2)\sin^2\alpha$$

$$- 4\frac{m^4}{r^6}(x^2 + y^2)\sin\alpha\cos\alpha + \frac{m^3}{r^7}(7(x^2 + y^2) - 4z^2)\sin^2\alpha$$

$$- \frac{m^3}{r^7}(3(x^2 + y^2) + 12z^2)\cos^2\alpha + \frac{m^2}{r^8}(15r^2 + 21z^2)\sin\alpha\cos\alpha$$

$$- \frac{m}{r^9}(6(x^2 + y^2) + 30z^2)\sin^2\alpha + \frac{m}{r^9}(6(x^2 + y^2) + 30z^2)\cos^2\alpha$$

$$- \frac{1}{r^{10}}(6(x^2 + y^2) + 30z^2)\sin\alpha\cos\alpha \Big\}$$

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{A}^2 k n z \Big\{ - \frac{m^5}{r^5}(x^2 + y^2)\sin^2\alpha$$

$$- 4\frac{m^4}{r^6}(x^2 + y^2)\sin\alpha\cos\alpha + 11(x^2 + y^2)\frac{m^3}{r^7}\sin^2\alpha$$

$$- \frac{m^3}{r^7}(8z^2 - (x^2 + y^2))\cos^2\alpha$$

$$+ \frac{m^2}{r^8}(11(x^2 + y^2) + 32z^2)\sin\alpha\cos\alpha$$

$$- \frac{m}{r^9}(24z^2)\sin^2\alpha + \frac{m}{r^9}24z^2\cos^2\alpha - \frac{24z^2}{r^{10}}\sin\alpha\cos\alpha \Big\}$$

Den Ausdruck für $\mathfrak{v}$ gewinnt man aus $\mathfrak{u}$ durch Vertauschung des x mit y.

Die Formeln sind ziemlich verwickelt und für den Gebrauch unbequem; sie vereinfachen sich aber ausserordentlich, wenn man den Integralwerth der Energieströmung über eine sehr lange Zeit erhalten will.

Nun ist

$$\int_0^{T_1} \sin^2\alpha\,dt = -\frac{(mr - nT_1)}{2n} + \frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{2n} + \frac{mr}{2n} + \frac{\sin mr\cos mr}{r}$$

$$\int_0^{T_1} \cos^2\alpha\,dt = -\frac{(mr - nT_1)}{2n} - \frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{2n} + \frac{mr}{2n} - \frac{\sin mr\cos mr}{r}$$

$$\int^{T_1} \sin\alpha\cos\alpha\,dt = -\frac{1}{2n}\sin^2\alpha_1.$$

Ist nun T unendlich gross gegen die Periode der Schwingung, so verschwinden die periodischen Glieder gegen die nicht periodischen und es bleibt

$$(15a)\quad \begin{cases} \int_0^{T_1} \mathfrak{u}\, dt = T_1 \mathfrak{A}^2 K n x \left\{ -\frac{m^5}{2 r^5}(x^2 + y^2) + \frac{m^3}{r^7}(4(x^2+y^2) - 16 z^2) \right\} \\ \int_0^{T_1} \mathfrak{w}\, dt = T_1 \mathfrak{A}^2 K n z \left\{ -\frac{m^5}{2 r^5}(x^2 + y^2) + (12(x^2+y^2) - 8 z^2)\frac{m^3}{r^7} \right\} \end{cases}$$

Ebenso

$$\int_0^{T_1} \mathfrak{v}\, dt = T_1 k n \mathfrak{A}^2 y \left\{ -\frac{m^5}{2 r^5}(x^2 + y^2) + \frac{m^3}{r^7}(4(x^2+y^2) - 16 z^2) \right\}$$

Da die Strömung der Energie hier eine stationäre ist, so muss die Gleichung der Continuität

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = o$$

erfüllt sein. Man überzeugt sich leicht durch Rechnung, dass dies thatsächlich der Fall ist. In den obigen Formeln hat $\mathfrak{A}$ die Dimension $[l^4]$

$$k = \left[\frac{l^2}{t^2}\right] \qquad m = [l^{-1}] \qquad n = [t^{-1}].$$

Eine weitere Vereinfachung tritt ein, wenn die Entfernung r unendlich gross gegen $1/m$ wird. Dann behält man, wenn wir noch $\mathfrak{A}^2 . k n = \mathfrak{B}$ setzen:

$$(15b)\quad \begin{cases} \int_0^{T_1} \mathfrak{u}\, dt = -T_1 \mathfrak{B} x \frac{m^5}{2 r^5}(x^2 + y^2) = \mathfrak{U} \\ \int_0^{T_1} \mathfrak{v}\, dt = -T_1 \mathfrak{B} y \frac{m^5}{2 r^5}(x^2 + y^2) = \mathfrak{V} \\ \int_0^{T_1} \mathfrak{w}\, dt = -T_1 \mathfrak{B} z \frac{m^5}{2 r^5}(x^2 + y^2) = \mathfrak{W} \end{cases}$$

Bei den Strahlungen, welche durch die Wärmebewegung hervorgerufen werden, haben die erregenden Schwingungen innerhalb messbarer Zeitintervalle keine bevorzugte Richtung.

Wir wollen nun durch den Index z bezeichnen, dass die erregende Schwingung diese Richtung haben soll, ebenso durch x und y.

Wir bilden dann

$$\frac{\partial \mathfrak{V}z}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}z}{\partial y} = -\mathfrak{B}_z T_1 \frac{zy}{r^5} \qquad \frac{\partial \mathfrak{W}z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}z}{\partial z} = +\mathfrak{B}_z T_1 \frac{zx}{r^5}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{V}x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}x}{\partial y} = o \qquad \frac{\partial \mathfrak{W}x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}x}{\partial z} = -\mathfrak{B}_x T_1 \frac{zx}{r^5}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}x}{\partial x} = \mathfrak{B}_x T_1 \frac{xy}{r^5} \qquad \frac{\partial \mathfrak{W}y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}y}{\partial z} = o$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}y}{\partial x} = -\mathfrak{B}_y T_1 \frac{xy}{r^5} \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}y}{\partial y} = \mathfrak{B}_y T_1 \frac{zy}{r^5}.$$

Bei unserer Voraussetzung, dass die Schwingungen nach allen Richtungen gleich gross sind, wird $\mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_y = \mathfrak{B}_z$ und wenn wir setzen

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_x + \mathfrak{U}_y + \mathfrak{U}_z \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} = o \qquad \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} = o \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} = o.$$

Es existirt also eine Function φ derart, dass

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathfrak{U}$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mathfrak{V} \qquad \Delta \varphi = o,$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mathfrak{W}$$

es ist $\varphi = \mathfrak{B} T_1 / r$; es hat dieselbe Form wie die Potentialfunction anziehender Massen; eine durch ungeordnete Molecularbewegungen strahlende Oberfläche müsste, wenn sich die Energieausbreitung von jedem Molecül aus unabhängig von der Existenz der übrigen anordnete, zu einer Vertheilung der Energieströmung führen, wie die Vertheilung der electrischen Kraftlinien um eine geladene Oberfläche.

Die strahlenden Oberflächen zeigen aber ein anderes Verhalten. Nehmen wir zwei Flächenelemente ds_1 und ds_2, deren Normalen n_1 und n_2 sein mögen. Ihr Abstand sei r. Die

oben abgeleiteten Formeln bleiben unverändert gültig, wenn wir $x\ y\ z$ durch $(x - x')$, $(y - y')$, $(z - z')$ ersetzen.

Aus unseren bisherigen[1]) Betrachtungen folgt nun, dass die Energiemenge, welche von ds_1 herrührend durch ds_2 strömt, abhängig ist von der Richtung der Normale des letzteren ds_2. Nehmen wir nun an, ds_1 und ds_2 seien vollkommen schwarz und diffus, so folgt aus dem Kirchhoff'schen Satze, dass bei gleicher Temperatur ds_1 ebensoviel Energie von ds_2 erhält, als es ihm zusendet, also muss die Energieströmung, welche von ds_2 ausgeht, abhängig sein von der Richtung der Normale n_2. Der Factor, welcher diese Abhängigkeit anzeigt sei ε_2 und ε_1 bei ds_1, dann muss ε_2 in ε_1 übergehen, wenn man $_2$ und $_1$ vertauscht.

Es soll also sein

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_1}$$

oder

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos(n_2\, r) = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos(n_1\, r)$$

$$\varepsilon_1 \cos(n_2\, r) \qquad = \varepsilon_2 \cos(n_1\, r).$$

Hieraus folgt dann

$$\varepsilon_1 = \cos(n_1\, r) \qquad \varepsilon_2 = \cos(n_2\, r).$$

Die Voraussetzungen, aus denen das Cosinusgesetz folgt, sind also, dass die strahlende Oberfläche vollkommen diffus sei und dass der Kirchhoff'sche Satz gelte.

§ 4.
Electricität und Magnetismus.

Durch die Ideen von Faraday und Maxwell ist die Vorstellung von Fernkräften zuerst auf die unmittelbare stetige Wirkung von benachbarten Theilen zurückgeführt worden. Dieselben haben auch den Begriff der Lokalisirung der Energie zuerst entstehen lassen.

Faraday selbst spricht schon von einer Bewegung der Kraftlinien durch den Raum und benutzt dieselbe als Maass für die inducirte electromotorische Kraft in geschlossenen Bahnen. Heute, nachdem die Maxwell'sche Theorie als die

1) Vgl. p. 23.

einzige anerkannt ist, welche die electromagnetischen Erscheinungen in widerspruchsfreier Weise darzustellen vermag, ist uns sein Standpunkt um vieles näher gerückt. In den Anschauungen, von Faraday sowohl wie von Maxwell, ist eine wesentliche Lücke geblieben, bei der Behandlung der Vorgänge des galvanischen Stromes. Dieselbe ist, wie bereits erwähnt, von Poynting ausgefüllt worden. Nach seiner Vorstellung bewegen sich die Kraftlinien senkrecht zu ihrer Richtung durch den Raum von der electromotorischen Stelle aus auf den Leiter zu, verschwinden in ihm und werden dort in Wärme umgewandelt.

Es seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die Componenten der electrischen und magnetischen Polarisationen, X, Y, Z, L, M, N die der electrischen und magnetischen Kräfte, u, v, w die der electrischen Strömung, $1/A$ die Lichtgeschwindigkeit, so sind die Grundgleichungen des allgemein veränderlichen electromagnetischen Feldes auf Grund der Maxwell'schen Theorie in der Form, wie sie ihnen von Herrn Hertz[1]) gegeben ist:

$$16)\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} & A\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u \\ A\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} & A\dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v \\ A\dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} & A\dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w \end{cases}$$

Die Energie des Feldes ist

$$17)\quad \begin{cases} F + L = \dfrac{1}{8\pi}(\mathfrak{X} X + \mathfrak{Y} Y + \mathfrak{Z} Z) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{8\pi}(\mathfrak{L} L + \mathfrak{M} M + \mathfrak{N} N). \end{cases}$$

Multipliciren wir die Gleichungen 16) mit $(1/4\pi A)\,dx\,dy\,dz$ dann beziehlich mit L, M, N, X, Y, Z, addiren sie und integriren über einen geschlossenen Raum. Dann ergibt sich, wenn wir noch berücksichtigen, dass

$$L\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \mathfrak{L}\frac{\partial L}{\partial t} \text{ u. s. w.}$$

wie aus den Beziehungen von $\mathfrak{L}$ zu L folgt,

---

1) Hertz, Gött. Ber. p. 106. 1890.

$$\frac{\partial (F+L)}{\partial t} + \iiint \left\{ u X + v Y + w Z \right\} dx\,dy\,dz$$
$$= -\frac{1}{4\pi A}\int \Big[(N Y - M Z)\cos n x + (L Z - N X)\cos n y$$
$$+ (M X - L Y)\cos n z\Big] ds$$

Wir haben in dem Raumintegral den Energiebetrag, welcher aus anderer Quelle als dem electromagnetischen Energievorrath herstammt. Es sind dies die Energiebeträge, welche entweder durch thätige sogenannte electromotorische Kräfte den Energievorrath des electromagnetischen Systems vermehren, oder die als Joule'sche Wärme denselben entzogenen Beträge.[1]) Wenn man diese mit zur Betrachtung heranzieht, werden die Componenten der Energieströmung

$$(18)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{u} &= +\frac{1}{4\pi A}(N Y - M Z) \\ \mathfrak{v} &= +\frac{1}{4\pi A}(L Z - N X) \\ \mathfrak{w} &= +\frac{1}{4\pi A}(M X - L Y) \end{aligned}$$

An der Grenze verschiedenartiger Körper muss, wie wir oben sehen, die Strömung der Energie normal zur Oberfläche stetig sein. Sei die xy Ebene eine solche Trennungsfläche, so muss

$$(19\text{ a})\qquad \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_2$$

für $z = o$ sein. Es muss also sein

$$M_1 X_1 - L_1 Y_1 = M_2 X_2 - L_2 Y_2.$$

Für allgemeine Werthe sind nun

$$(19\text{ b})\qquad X_1 = X_2,\ Y_1 = Y_2,\ M_1 = M_2,\ L_1 = L_2.$$

Es sind dies die bekannten Grenzbedingungen, dass die Kraftcomponenten parallel der Trennungsfläche sich stetig durch dieselbe fortsetzen müssen. Die Gleichung 19 a) ist demgemäss erfüllt.

Aus den Gleichungen 18) folgt zunächst, dass die Energie sich in Ruhe befindet, falls in dem System entweder nur elec-

1) Auf die Analogie zur reibenden Flüssigkeit wurde bereits oben hingewiesen.

trische oder nur magnetische Kraftlinien vorhanden sind. Wenn daher, wie von Sir William Thomson[1]) vermuthet wird, beim ruhenden Magnetismus verborgene Bewegungen vorhanden sind, so können dieselben nur stationäre[2]) sein. Wenn dagegen ein ruhender Magnet in den Bereich der Kraftlinien eines electrisch geladenen Körpers geführt wird, muss eine dauernde Bewegung der Energie eintreten. Man erkennt aus den Gleichungen 18) dass die Energie sich stets senkrecht bewegt zu den electrischen und magnetischen Kraftlinien. Dort, wo die magnetischen und electrischen Kraftlinien parallel laufen, ist die Energieströmung Null. Wenn z. B. ein cylindrischer Magnetstab und ein geladener cylindrischer Condensator mit parallelen Axen nebeneinander gestellt werden, so bewegt sich die Energie in geschlossenen Bahnen, sowohl um die Axe des Magnets als um die des Condensators in Ebenen die senkrecht stehen auf beiden Axen. Legt man eine Ebene von dieser Art durch die Mitte des Polabstandes, so sind in ihr keine Stromlinien der Energie vorhanden. Auf der einen Seite von ihr gehen die Stromlinien ihr parallel in derselben Richtung um beide Axen, auf der andern in der entgegengesetzten. Das eigenthümliche dieses Vorganges besteht darin, dass ein stationäres und ein statisches System nebeneinander gebracht ein nicht mehr in Bezug auf seine verborgenen Bewegungen stationäres System geben, ohne dass dabei sich etwas an der Configuration des Systems verändert.

Wir gehen nun dazu über die Bewegung der Energie bei stationären galvanischen Strömen zu betrachten. Die Componenten der electrischen Kräfte haben in diesem Falle ein Potenzial, ebenso die der magnetischen Kräfte an solchen Orten, wo die Componenten der electrischen Strömung u, v, w verschwinden. Die Grundlage für die Theorie des constanten galvanischen Stromes bildet die durch die Erfahrung hinlänglich gerechtfertigte Annahme, dass in Leitern von cylindrischer Form deren Querschnitt klein gegen die Länge ist, u, v, w unveränderlich sind im ganzen Querschnitte des Drahtes.

Wir betrachten jetzt ein Stück des Drahtes von der Länge l,

1) Thomson, Proc. of the Royal Society, Juni 1856.

2) Nur in einem in stationärer Bewegung befindlichem System ist die Energie in Ruhe.

das gerade und parallel der x-Axe gerichtet sein möge. Der Radius des Querschnittes sei R. Die electrischen Kraftlinien an der Oberfläche des Drahtes gehen parallel seiner Axe, die magnetischen folgen der Schnittlinie des Querschnittes mit der Oberfläche. Die Energie fliesst also senkrecht zur Oberfläche in den Draht hinein und zwar in der Zeiteinheit die Menge

$$E = \mathfrak{v} \cos R y + \mathfrak{w} \cos R z = \frac{2 \pi R l X (N \cos R y - M \cos R z)}{4 \pi A}$$

Die als electromagnetische Energie einströmende Menge wird nun im Innern des Leiters in Wärme umgesetzt. Denken wir uns eine concentrische Cylinderfläche mit dem Radius ϱ, so wird in dem Raum zwischen beiden Flächen der Energiebetrag

$$l \pi (R^2 - \varrho^2) u X$$

in Wärme verwandelt. Nun ist bekanntlich nach 16) für unsern Fall im Drahte

$$N = \quad 2 u y . \pi A$$
$$M = - 2 u z \pi A.$$

Die Energie, welche durch die Oberfläche ϱ fliesst ist also

$$E_\varrho = \frac{E \varrho^2}{R^2}$$

Da zwischen dem X und u, wenn λ die Leitungsfähigkeit des Metalls ist, ε die Dielectricitätsconstante desselben, die Gleichungen [1]) (nach dem Ohm'schen Gesetz)

$$(20) \qquad \lambda X = u, A \varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} = - 4 \pi \lambda A X$$

bestehen, welche anzeigen, dass auch die Kraftlinien den ganzen Cylinder gleichmässig erfüllen, also die Zahl der Kraftlinien, welche durch die äussere Oberfläche tritt, zu der, welche durch ϱ hindurchgeht, sich verhält wie R / ϱ, so folgt, dass auch die magnetischen Kräfte nach innen zu abnehmen müssen wie ϱ / R; es steht dies in Uebereinstimmung mit der bekannten Regel, dass im Innern eines vom Strome durchflossenen cylindrischen Leiters die vom betrachteten Punkte nach aussen hin liegende Schaale keine magnetische Wirkung ausübt.

---

1) H. Hertz, a. a. O. p. 115.

Aus den Gleichungen 20) folgt

$$X = X_0 \, e^{-\frac{4\pi\lambda t}{\varepsilon}}$$

wo X_0 den Werth von X zur Zeit $t = o$ bezeichnet. Die Grösse $4\pi\lambda / \varepsilon$ ist der reziproke Werth der von A. Cohn [1]) sogenannten Relaxationszeit.

Die Leitungsfähigkeit spielt hier die Rolle eines Absorptionsindex, welcher das Maass ist für die Fähigkeit des Metalls electrische Kraftlinien in Wärme umzusetzen.

Wir gehen nun dazu über, die Vorgänge zu betrachten, welche sich in einem geschlossenen Stromkreis, in welchem sich eine electromotorische constant wirkende Stelle befindet, abspielen.

Obwohl die Anschauungen, von welchen wir hier ausgehen, grundverschieden sind von denen, welche den älteren Theorien zu Grunde lagen, sind die Formen in analytischer Beziehung ganz dieselben.

In der That hatte man [2]) in einem Drahtstücke das parallel der X-Axe laufend gedacht wurde die Gleichung

$$u = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

wo φ das electrische Potential bedeutete, das mit dem von uns so bezeichneten identisch ist. Dagegen deutete man u als die in der Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnitts fliessende Electricitätsmenge, während wir u auffassen als umgekehrt proportional der Zeit, in welcher die Kraftlinien im Innern des Metalls auf einen bestimmten Betrag ihres Anfangswerthes herabsinken. Wir können deshalb die Ergebnisse der früheren Theorien ohne weiteres verwerthen, indem wir den analytischen Resultaten nur andere physikalische Deutungen unterlegen. Wir haben demgemäss φ in unserm Falle überall als stetig anzusehen mit Ausnahme der electromotorischen Stelle, wo φ sich in der Richtung des Drahtes sprungweise verändert. Seien φ_1 und φ_2 die Werthe von φ an beiden

1) A. Cohn, Sitzungsber. d. Berl. Akad. **26.** p. 415. 1888.

2) Vgl. G. Kirchhoff, Ableit. des Ohm'schen Gesetzes. Ges. Abh. p. 53.

Seiten der Unstetigkeitsstelle, so wird, wenn wir die Richtung des Drahtes mit s bezeichnen, das Integral

$$\int \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial s} d s = \lambda (\varphi_2 - \varphi_1)$$

wenn wir λ als überall constant betrachten und die Integration über den ganzen Stromkreis ausdehnen. Der Sprung des Potentials an der electromotorischen Stelle, setzt das Vorhandensein einer electrischen Doppelschicht voraus. Die Electricitätsmengen, welche dieselbe bilden, fassen wir nach der Faraday'schen Anschauungsweise als die freien Enden von Kraftlinien auf. Die Vertheilung der Kraftlinien um die electrische Doppelschicht ist dann folgende:

Von der Rückseite der einen Belegung gehen die Kraftlinien im Innern des Leitungsdrahtes parallel seiner Oberfläche und enden in der zweiten Belegung. Den Raum zwischen der Doppelschicht füllen Kraftlinien von entgegengesetzter Richtung aus. Im freien Aether ordnen sich die Kraftlinien in ähnlicher Weise an wie um einen Condensator, indem sie sich auf die beiden Belegungen stützen und in der Nähe des Leitungsdrahtes diesem parallel laufen. Wenn die Dichtigkeit der freien Electricität in der einen Belegung $+k$, in der anderen $-k$ ist, so hat man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_a} = -4 \pi k$$

an der ersteren, wenn die Index i und a sich auf die innere und äussere Seite beziehen.

Ferner ist [1])

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 8 \pi k \varepsilon,$$

wenn ε die Entfernung beider Schichten bezeichnet

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial s_a} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}$$

wo l die Länge die Länge des Stromkreises bedeutet und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_i} = 4 \pi k \left\{ \frac{2 \varepsilon}{l} - 1 \right\}.$$

1) v. Helmholtz, Ges. Abh. **1.** p. 490.

Aus den beiden letzten Gleichungen ersieht man, wie dicht sich die Kraftlinien im Drahte anordnen müssen im Vergleich zur Dichtigkeit derselben zwischen den beiden Schichten.

Der Energiewerth ist in jedem Augenblicke $= 2\pi\varepsilon k^2 q$, wo q die Grösse der Oberfläche der Doppelschicht bezeichnet. Dieser Energiewerth soll nun durch fremde Hilfsquellen constant auf gleicher Höhe erhalten bleiben. Während nun die im Drahte befindlichen Kraftlinien beständig zerstört werden wandern von aussen her immer so viele zu, als Ersatz erforderlich ist, schliesslich treten die Kraftlinien, welche innerhalb der Doppelschicht sich befinden, heraus, erweitern sich im freien Raume, wandern dann auf den Stromkreis zu, passen sich seiner Form an und treten in ihn hinein. Bei dieser Bewegung durch Raum rufen nun die electrischen Kraftlinien senkrecht zu ihrer Bewegung die magnetischen Kraftlinien hervor.

Der soeben betrachtete Vorgang enthält die wesentlichen Vorstellungen, die wir uns bei der Existenz eines constanten Stromes zu bilden haben. In Wirklichkeit hat man es nie mit so einfachen Verhältnissen, wie wir sie hier der Einfachheit wegen angenommen haben, zu thun. So hat man niemals nur einen Potentialsprung, sondern bei hydroelectrischen Strömen mindestens drei, ausserdem aber noch in den verschiedenen Theilen verschiedene Leitungsfähigkeiten. Es ist ohne weiteres ersichtlich, wie mehrere Doppelschichten die Anzahl der im Innern des Drahtes befindlichen Kraftlinien je nach der Richtung ihrer positiven Seiten vergrössern oder verkleinern müssen, und wie sich hierdurch die Menge der im Drahte umgesetzten electromagnetischen Energie bestimmen muss.

Für anstossende Leiterstücke von verschiedener Leitungsfähigkeit λ und λ_1 gilt die Kirchhoff'sche Bedingungsgleichung

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = o$$

für jeden Punkt der Berührungsfläche, d. h. das Product aus der Anzahl der Kraftlinien in das Leitungsvermögen ist in allen Drahtstücken dasselbe. Es treten überall durch die

Oberfläche des Drahtes in der Zeiteinheit gleichviel Kraftlinien ein, in den Drahtstücken, in denen das Leitungsvermögen grösser ist, müssen daher weniger Kraftlinien vorhanden sein, weil dieselben schneller zerstört werden. An der Berührungsfläche befinden sich also freie Enden von Kraftlinien.

Die bisherigen Auseinandersetzungen werden genügen, um für verwickelte Leiterformen, namentlich auch verzweigte, lineare Systeme die entsprechenden Vorstellungen zu bieten.

Die thermoelectrischen Ströme kann man in analoger Weise auffassen, wenn man an der älteren Vorstellung, welche den Sitz der thermoelectrischen Kraft an die Löthstellen verlegte, festhalten will. Einfacher gelangen wir zur Zusammenfassung der Thatsachen, wenn wir von der Theorie von Kohlrausch[1]) ausgehen.

Nach dieser haben wir uns den Vorgang in folgender Weise vorzustellen. Ueberall, wo in einem Metall ein Temperaturgefälle vorhanden ist, werden electrische Kraftlinien parallel dem Wärmestrom hervorgerufen. Ihre Anzahl und Richtung hängt ausser von dem Temperaturgefälle von der Natur des Metalls ab.

Ferner, wenn electrische Kraftlinien in einem Metall parallel dem Temperaturgefälle laufen und dort in Wärme umgesetzt werden, findet je nach der Natur des Metalls ein schnelleres oder langsameres Fortfliessen des Wärmestromes statt. Diese Sätze enthalten alle Erscheinungen der Thermoelectricität.[2])

Wir wollen uns nun einen besonders einfachen Fall denken. Es seien zwei dünne Drähte von überall gleichem Querschnitt aber verschiedenem Material zusammengelöthet. Die Löthstellen sollen auf verschiedener aber constanter Temperatur erhalten werden, und das Temperaturgefälle sei gleichmässig auf die Länge beider Theile vertheilt. Das Material der Drähte sei durch Herstellung von Legirungen so ausgewählt, dass ein bestimmtes Temperaturgefälle in dem einen Drahte ebensoviel Kraftlinien, aber von entgegengesetzter

---

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. **156.** p. 601. 1875 u. Wied. Ann. 23. p. 477. 1884.

2) Boltzmann, Wien. Ber. 15. Dec. 1887.

Richtung, erzeugt wie im andern. Dann sind bei geschlossenem Stromkreis die electromotorischen Kräfte gleichmässig über den gesammten Stromkreis vertheilt. Es treten dann die parallel der Mittellinie des Stromkreises laufenden, geschlossenen Kraftlinien durch die Oberfläche des Drahtes aus. Ebensoviel Kraftlinien treten aber ein, weil die gesammte austretende electromagnetische Energie im Innern des Leiters entweder in Joule'sche Wärme verwandelt oder zu der Arbeitsleistung verbraucht wird, welche die Veränderung des Wärmestromes erfordert, welche sich an den Enden jedes Drahtes als Peltier'sche Wärme zu erkennen gibt. Da also überall gleichviel Kraftlinien aus- und eintreten, verschwinden die Componenten der strömenden Energie $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$. Wie diese verschwinden auch die electrischen Kräfte X, Y, Z, weil die austretenden und eintretenden Kraftlinien entgegengesetzte Richtungen haben. Es sind dann weder im Innern des Drahtes noch im äussern Raume electrische Kraftlinien vorhanden. Die magnetischen Kraftlinien sind dann allein noch vorhanden, weil die electrischen Kraftlinien von entgegengesetzter Richtung, welche sich selbst gegenseitig aufheben, durch ihre entgegengesetzte Bewegung gleichgerichtete magnetische Kraftlinien hervorrufen. Ein zweiter Grenzfall, den wir betrachten, ist der; dass der eine Draht überhaupt nicht electromotorisch wirksam ist. Dann entstehen in dem andern Kraftlinien, welche an den Löthstellen enden, diese treten aus dem Draht parallel seiner Oberfläche aus, dehnen sich im Raume aus, legen sich dann an die Oberfläche des zweiten Drahtes an, und treten, indem sie sich immer auf die Berührungsflächen der Drähte stützen, durch die Oberfläche in ihn hinein. Bei stationärem Zustande und sonst gleichmässigen Verhältnissen sind beide Drähte gleichmässig von Kraftlinien erfüllt, deren Richtungen in beiden die entgegengesetzten sind, die Berührungsflächen enthalten also die Enden der Kraftlinien, sie sind nach der alten Ausdrucksweise der Sitz freier Electricität. Es wird ohne weiteres einleuchten, dass die allgemeinen Fälle auf eine Combination der beiden betrachteten zurückzuführen sind. Die soeben dargelegte Anschauungsweise bedarf vergleichsweise einfacher Voraussetzungen. Sie setzt namentlich voraus, dass zwischen verschiedenen Metallen kein Potentialsprung vorhanden

sein kann, welcher von der Temperatur abhängt. Die Möglichkeit der Verwirklichung beider Fälle ist durch die Herstellung von Legirungen gegeben, deren Bestandtheile die electrischen Kraftlinien in entgegengesetzter Richtung bei Temperaturgefälle erzeugen. Wesentlich anders gestalten sich die Vorgänge, wenn wir es mit veränderlichen electrischen und magnetischen Kräften zu thun haben.

Im freien Aether genügen die Componenten der electrischen und magnetischen Kräfte der allgemeinen Gleichung für Strahlungen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{A^2} \Delta \varphi.$$

Wir werden nicht die allgemeinen Functionen, welche Lösungen dieser Gleichung darstellen, im folgenden zu Grunde legen, sondern einfache Schwingungen, aus denen dann durch Fourier'sche Reihen allgemeinere Vorgänge zusammengesetzt werden können.

Wir setzen

$$X = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \, \partial x} \qquad Y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \, \partial y} \qquad Z = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$L = -A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial t} \qquad M = A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial t} \qquad N = o$$

$$\varphi = \mathfrak{B} \frac{\cos(mr - nt)}{r} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Es stellen diese Lösungen, wie Hr. Hertz[1]) nachgewiesen hat, die Schwingungen dar, welche von einem electrischen Doppelpunkte hervorgerufen werden, welcher im Punkte $x = y = z = o$ sich befindet und dessen Ladungen hin und her schwanken.

Setzen wir die Ausdrücke für X, Y, Z, L, M, N in die Gleichungen (18) ein, so werden, wenn wieder $\alpha = mr - nt$:

$$\mathfrak{u} = + \frac{\mathfrak{B}^2 n x}{4 \pi} \Big\{ - \frac{m^3 \cos^2 \alpha}{r^5} (x^2 + y^2)$$

$$+ 2 m^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{(x^2 + y^2 - z^2)}{r^6} - m \sin^2 \alpha \frac{x^2 + y^2 - 2 z^2}{r^7}$$

$$+ m \cos^2 \alpha \frac{x^2 + y^2 - 2 z^2}{r^7} - \sin \alpha \cos \alpha \frac{x^2 + y^2 - 2 z^2}{r^8} \Big\}$$

1) Wied. Ann. **36.** p. 1. 1889.

$$\mathfrak{w} = + \frac{\mathfrak{B}^2 n z}{4\pi}\left\{\left(-\frac{m^3\cos^2\alpha}{r^5} + \frac{3m^2\sin\alpha\cos\alpha}{r^6}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2m\sin^2\alpha}{r^7} + \frac{2m\cos^2\alpha}{r^7} - \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{r^8}\right)(x^2+y^2)\right\}$$

$\mathfrak{v}$ erhält man aus $\mathfrak{u}$ durch Vertauschung von x mit y.

Bilden wir nun wieder das Zeitintegral über eine lange Zeit oder über eine ganze Schwingung, wie in Gleichung (15a), so finden wir

$$(20)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{T_1} \mathfrak{u}\,dt = -\frac{T_1\mathfrak{B}^2 n m^3}{8\pi}\frac{(x^2+y^2)}{r^5}x \\ \displaystyle\int_0^{T_1} \mathfrak{v}\,dt = -\frac{T_1\mathfrak{B}^2 n m^3}{8\pi}\frac{(x^2+y^2)}{r^5}y \\ \displaystyle\int_0^{T_1} \mathfrak{w}\,dt = -\frac{T_1\mathfrak{B}^2 n m^3}{8\pi}\frac{(x^2+y^2)}{r^5}z. \end{cases}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den (15a) durch das Fehlen des zweiten Gliedes auf der rechten Seite. Dieser Unterschied fällt bei den thatsächlich beobachtbaren Licht- und Wärmestrahlungen fort, weil man nur in Entfernungen beobachten kann, gegen welche die Wellenlänge verschwindet; und in diesem Falle verschwindet in den Gleichungen (15a) das zweite Glied gegen das erste.

Wir können noch weiter den Schluss ziehen, dass bei electromagnetischen Schwingungen stets Strahlung von Energie stattfindet. Die Integrale (20), über eine ganze Schwingung ausgedehnt, geben die thatsächlich fortströmende Energie. Während der Schwingung findet ein abwechselndes Hin- und Herfliessen derselben statt, und der letzte Betrag ist der Ueberschuss der fortströmenden über die zurückfliessende Energie. Wir sehen ferner, dass das Verhältniss der durch Strahlung abgegebenen Energie zum gesammten Energievorrath bei gleichbleibendem $\mathfrak{B}$ abhängt von der Schwingungsdauer und von der Wellenlänge in der Weise, dass die Strahlung bei kürzerer Schwingungsdauer ausserordentlich stark zunimmt.

Ausserdem muss die Strahlung abhängen von dem Mittel, in welchem die Schwingung arbeitet, und zwar muss sie grösser werden, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und somit die Wellenlänge kleiner wird. In Wirklichkeit hat man es nie mit so einfach ablaufenden Vorgängen zu thun, doch wäre es vielleicht von Interesse, die experimentelle Prüfung von Strahlungen verhältnissmässig langsamer Schwingungen vorzunehmen.

Eine graphische Uebersicht über die Anordnung der Kraftlinien um eine electrische Schwingung ist von Hrn. Hertz[1]) gegeben worden. Man sieht daraus, dass bei Schwingungen die Kraftlinien sich von den erregenden Leitersystemen loslösen, in sich selbst zurückkehren und als Complex geschlossener Curven durch den Raum davoneilen. Ein Abströmen der Energie von einer Schwingung ist eine nothwendige Consequenz der Maxwell'schen Theorie. Nach der alten Anschauung würde eine electrische Schwingung, welche isolirt, fern von festen Körpern, im freien Raume arbeitet, keine Energie abgeben können. Die Electrodynamik bewegter Körper ist aus dieser Betrachtung ferngehalten, weil ihre Grundlagen noch keineswegs die Sicherheit der übrigen physikalischen Theorien besitzen, welche wir erörtert haben.[2]) Ich hoffe, demnächst die Beziehungen dieses hier ausgeschlossenen Gebietes zu den anderen physikalischen Systemen in einer besonderen Arbeit zu behandeln.

§ 5.
Das Entropieprincip.

Wir haben noch die Erscheinungen zu betrachten, bei denen die Bewegungen der Energie vom Entropieprincip geregelt werden. Man kann dieses Princip so aussprechen, dass die Energie bei ungleicher Vertheilung ihrer Dichtigkeit sich immer so bewegt, dass die Unterschiede der Dichtigkeit aufhören.

Es ist vielfach versucht worden, das Princip aus den allgemeinen Gleichungen der Mechanik abzuleiten. Die Untersuchungen beziehen sich hierbei auf den Giltigkeitsbereich, der

1) A. a. O.
2) c. f. Hertz, Wied. Ann. **41.** p. 369. 1890.

nach unseren bisherigen Anschauungen immer ein beschränkter ist und auf reine Bewegungsvorgänge angewiesen bleibt.

Den analytischen Ausdruck findet man am leichtesten aus dem Hamilton'schen Princip nach Boltzmann's Vorgang. Es ist

$$o = \delta \int_{t_0}^{t_1} (F - L)\, d\, t$$

bei festliegenden Endwerthen der Zeit t_0 und t_1. Addirt man beiderseits

$$2\,\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, d\, t$$

und dividirt durch

$$\int_{t_0}^{t_1} L\, d\, t \,.\, \int_{t_0}^{t_1} d\, t,$$

so wird

$$\frac{2\,\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, d\, t}{\int_{t_0}^{t_1} L\, d\, t} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} d\, t \,.\, \delta \int_{t_0}^{t_1} (F + L)\, d\, t}{\int_{t_0}^{t_1} d\, t \,.\, \int_{t_0}^{t_1} L\, d\, t}$$

Bezeichnet man die mittlere Zufuhr zum Energievorrath infolge der Variation mit δQ

$$= \frac{\delta \int_{t_0}^{t_1} (F + L)\, d\, t}{\int_{t_0}^{t_1} dt}$$

die mittlere kinetische Energie mit

$$\vartheta = \frac{\int_{t_0}^{t_1} L\, dt}{\int_{t_0}^{t_1} d\, t}$$

so wird

$$2\,\delta \log \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \frac{\delta\,Q}{\vartheta}.$$

Diese Form ist genau die des zweiten Hauptsatzes, wenn man sicher ist, dass die linksstehende Variation ein vollständiges Differential ist.

Nur dann ist

$$\int \frac{d\,Q}{\vartheta} = o,$$

wenn die Anfangs- und Endlagen des Systems zusammenfallen. Wenn die Bahnen der einzelnen Punkte des Systems geschlossene sind und ganz im endlichen liegen, muss bei cyklischer Variation der Bahnen, sobald man wieder zu den Anfangsbahnen zurückkehrt, auch t_0 und t_1 denselben Punkten derselben entsprechen. Dann muss das Integral Null sein und das Differential ist ein vollständiges. Wenn aber die Bahnen ungeschlossene sind, also entweder sich im unendlichen verlieren oder im endlichen aus unendlich vielen Zweigen bestehen, so sind Variationen der Bahnen denkbar, durch welche man zwar zu denselben Bahnen wieder gelangt, aber in diesen die Zeitpunkte t_0 und t_1 andern Punkten der Bahnen entsprechen. Man kann z. B. wenn eine Bahn aus sich wiederholenden congruenten Zweigen besteht, den Zweig, auf den $t_1 - t_0$ sich bezieht, beim Zurückkehren auf einen andern Zweig fallen lassen, wo dann t_1, t_0 in Bezug auf das gewählte Coordinatensystem andern Bahnpunkten entsprechen, während das Bahnstück doch dasselbe ist. [1]) Man kann demnach das Entropieprinzip mit Sicherheit nur auf in sich zurücklaufende Bewegungen anwenden oder solche, bei denen die thatsächlichen Bewegungen durch Mittelwerthe ausdrückbar sind, die sich auf geschlossene Bahnen beziehen. Es setzt ausserdem noch voraus, dass die Bewegung der Energie nur durch Ausgleichung des integrirenden Nenners ϑ stattfindet. Unter dieselben Gesichtspunkte fallen die monocyklischen Systeme mit rein kinematischen Verbindungen, sobald die wirkenden Kräfte nur vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängen. Für diese ist dann die kinetische Energie integrirender Nenner. Dann findet, wie bei der Wärme,

1) Vgl. Boltzmann, Wien. Ber. 11. Jan. 1877.

Bewegung der kinetischen Energie immer dann und nur dann statt, wenn zwei Systeme so mit einander verbunden werden, dass die integrirenden Nenner ungleich sind und zwar ist die Richtung immer von dem grösseren Werthe desselben zum kleineren bestimmt.

Es ist hierdurch die Bewegung der Energie sehr einfach festgelegt, und sie gestaltet sich besonders dadurch einfach, dass es sich nur um kinetische Energie handelt. Es folgt aus den allgemeinen Betrachtungen über monocyklische Systeme [1]), dass das Entropiegesetz auf den Uebertritt kinetischer Energieformen sich beschränken muss.

Es ist hiernach den Bewegungen, welche wir als Wirkung von Fern- und Druckkräften vorstellen, die Stellung klar gelegt: so lange wir den durch diese Kräfte gegebenen Energievorrath betrachten, und von versteckten Energiemengen absehen, wird diese Energie in andere Formen frei verwandelbar sein, sobald wie der Wirkungsweise der Kräfte keine Beschränkungen auflegen. Schwieriger ist es die Vorgänge zu übersehen, bei denen verborgene Bewegungen vorkommen, wie bei den electrischen, magnetischen und chemischen Energieformen. Electrische und magnetische Ladungen, nach Gaussischem Maasse gemessen, ebenso die freie Energie der chemischen Verbindungen sind frei verwandelbare Arbeitsformen. Aber es liegt eine Schwierigkeit in dem Umstande, dass man nicht weiss, wie weit die bei diesen Vorgängen immer auftretenden thermischen Erscheinungen beseitigt werden können, um nicht mehr als *nothwendige* Begleiterscheinungen gelten zu müssen.

Jedenfalls wird man das Entropiegesetz mehr als ein Integralgesetz verwickelter Einzelvorgänge auffassen, deren genaue Beziehungen zu verfolgen die Hilfsmittel unseres Begreifens übersteigt, als ein überall anwendbares Naturprincip.

Es ist nun der Versuch gemacht worden, das Entropieprincip auf alle Energieformen ausdehnen. Man findet für jede ein Maass der Intensität und einen allgemeinen Satz, dass jede Energieform das Bestreben hat, von Stellen höherer Intensität zu solchen geringerer überzugehen. [2]) Bei dieser Be-

1) v. Helmholtz, Crelle Journ. **97.** p. 111 ff.
2) Helm, Die Lehre der Energie. p. 62. Leipzig 1887.

trachtungsweise hat man aber die Schwierigkeit, in jedem Falle untersuchen zu müssen, wann es der Energie gestattet ist, ihrem Bestreben thatsächlich Folge zu leisten. Für die Erforschung der thatsächlichen Bewegung der Energie müssen jedesmal noch andere Beziehungen aufgefunden werden.

Wir sind bei den Versuchen die Energie zu lokalisiren, auf nichts gestossen, was mit unsern bisherigen Begriffen unvereinbar wäre. Jedenfalls scheint diese Auffassungsweise in vielen Fällen einfachere Vorstellungen zu gestatten, als sie ohne diesen Begriff möglich wären. Welche Bedeutung ihm in der Erkenntnisstheorie zukommt, ist eine andere Frage, welche ausserhalb des Zweckes dieser Untersuchung liegt.

IV. *Ueber die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in membranösen Körpern; von F. Melde.*

(Hierzu Tafel VII Fig. 5—14.)

(Schluss.)

12. Anfangs hatte ich die Einrichtung so getroffen, dass die akustische Latte horizontal auf zwei Stelltischen festgeklemmt wurde. Die Messingklemmen klemmten hiernach die Lamellen so ein, dass diese mit ihrer Breitseite in einer verticalen Ebene lagen, im ganzen aber horizontal ausgespannt waren. Die Spannung wurde hierbei so herausgebracht, dass ich eine Klemme öffnete und hinter ihr ein überstehendes Stück der Lamelle so mit der Hand anzog, dass diese möglichst in ihrer ganzen Breite gleichmässig gespannt wurde. Diese gleichmässige Spannung ist erforderlich und gehört hierzu insbesondere, dass die Lamelle genau senkrecht zu den Klemmbacken eingeklemmt wird. Im Verlaufe der weiteren Untersuchung stellte sich aber die Nothwendigkeit heraus, die Spannung der Lamellen genau angeben zu können und dafür zu sorgen, dass diese Spannung, falls verschiedene Längen desselben Streifens abgegrenzt wurden, dieselbe blieb. Dies lässt sich bekanntermaassen nur so erreichen, wie Weber es bei den Saiten machte. Ich klemmte daher die akustische Latte in genau *senkrechter* Lage an einem starkgebauten Barometergestell fest. Hierdurch kamen die Lamellen in verticaler Lage, frei herunterhängend, zur Abgrenzung, und wurde die Spannung durch eine dritte Klemme k'' (Fig. 10) bewirkt, bei welcher zwei metallene Klemmbacken sich mittelst zweier Schrauben zusammenschrauben liessen, um zwischen sich das untere Ende der Lamelle zu fassen. Da die Klemme hernach, falls Gewichte an sie angehängt werden, nicht schief gezogen werden darf, so wurde dies Schiefziehen dadurch vermieden, dass an *beiden* Klemmbacken unten eine Oese angelöthet war. Zog man durch diese beiden Oesen eine Bindfadenschlinge, so konnten an diese die Spanngewichte angehängt werden. Die ganze Einspannung der Lamelle ist aus der Fig. 10 zu erkennen, ohne dass es nöthig wäre noch eine weitere Er-

läuterung hinzuzufügen. Wenn hernach die Spannungen angegeben werden, so sei bemerkt, dass diese in Grammen zu verstehen sind und zwar immer auf ein ganzes Hundert abgerundet. Die geringste Spannung betrug 100 g (Klemme + einem entsprechenden Zulagegewicht), die grösste 2000 g. Dazwischen kommen dann noch Spannungen von 300, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1500 g vor.

Bei Saiten ist es ja bekannt, dass ihre Longitudinaltöne innerhalb weiter Grenzen von der Spannung nur wenig abhängig sind, demgemäss auch innerhalb dieser Grenzen die Schallgeschwindigkeit sich nur sehr wenig ändert. Bei den membranösen Körpern kann jedoch die Spannung eine wesentliche Verschiedenheit der Schallgeschwindigkeit bewirken, insbesondere bei denen der dritten Gruppe.

Von grosser Wichtigkeit ist es noch bei solchen Untersuchungen, wobei das Ohr zu entscheiden hat, die Controle auch in der Weise anzuwenden, dass neben einem Longitudinalton eines soeben untersuchten Streifens der Longitudinalton von einem gleich langen andern Streifen, der bereits früher untersucht war, verglichen wird. Hierbei wird man sofort darüber unterrichtet, ob man sich in der Octave nicht geirrt hat, überhaupt, ob die Bestimmungen der Tonhöhen eine vollkommene Befriedigung gewähren. Denn, wenn man z. B. bei weissem Seidenpapier mit einer Spannung gleich 100 g im Mittel die Schallgeschwindigkeit gleich 1988 m findet und früher für gelbes Atlasband bei einer Spannung von 1000 g diese Geschwindigkeit gleich 2015 m gefunden hat, so muss, wenn man bei den betreffenden Spannungen zwei gleichlange Streifen der genannten Körper nebeneinander zum Tönen bringt, sich vollkommen deutlich erkennen lassen, dass die beiden Longitudinaltöne sehr nahe unisono sind, dass aber doch der Ton des Atlasbandes etwas höher ist wie der vom Seidenpapier. Die betreffenden Intervalle bei solchen Toncontrolen sind gleich dem Verhältniss der Schallgeschwindigkeiten. In diesem Falle war demnach das Intervall gleich 2015 / 1988 = 1,0139. Dasselbe konnte natürlich auch aus den entsprechenden Tonhöhen abgeleitet werden. Denn für Atlasband wurde bei $L = 80$ cm die Zunge $a = 14$ gezogen, mithin war $n = 312$; beim Seidenpapier war $a = 13$ mithin $n = 308$. Dass nun diese Zahlen

312 und 308 je mit 4 erst zu multipliciren sind, um auf die wirklichen Tonhöhen N zu kommen, ist ohne Bedeutung. Denn für die Berechnung des Intervalls würde sich die 4 doch wieder wegheben. Es ist demnach das betreffende Intervall direct auch gleich 312 / 309 = 1,01299. Völlige Uebereinstimmung der beiden auf verschiedenem Wege so berechneten Intervalle, braucht hier indess nicht einzutreten. Denn das zuerst berechnete Intervall wurde aus den Schallgeschwindigkeiten gefunden und diese waren *Mittelwerthe* aus je drei Einzelbestimmungen bei drei verschiedenen Längen. Das zuletzt berechnete Intervall 321 / 308 aber wurde nur aus den Tonhöhen für die Länge gleich 80 cm gefunden. Die Schallgeschwindigkeiten in den beiden Streifen für diese Länge waren 1996,8 und 1971,2, wonach sich das Intervall ebenfalls genau gleich 1,01299 berechnet.

Bezüglich der Abgrenzung einer bestimmten Länge einer Lamelle wurde noch eine grosse Vereinfachung eingeführt. Ich stellte nämlich den oberen Schieber S Fig. 10 auf der akustischen Latte fest und machte längs ihm auf die letztere einen Querstrich. Sodann wurde der untere Schieber so weit verschoben, bis die Entfernung zwischen den einander zugekehrten Rändern der Messingklemmen k und k' Fig. 10, in welchem die Streifen ihre Begrenzung fanden, genau 60 cm betrug. Hierauf wurde auch längs des unteren Schiebers S' quer auf die Latte ein Strich gezogen. Von diesem letzteren Strich an gerechnet, machte ich dann in den Abständen von 10 zu 10 cm längs des unteren Schiebers weiterer Querstriche und schrieb an diese zur Einstellung des unteren Schiebers die Zahlen 60, 70, 80, 90, 100 etc. an. Hiernach leuchtet ein, dass ich sofort die Längen der Lamellen gleich 60, 70 und 80 cm etc. und dementsprechend die Wellenlängen $\lambda = 1{,}2$; 1,4; 1,6 m etc. hatte, wenn ich, nachdem die Lamelle bei völlig freier Lage, nach Oeffnung der unteren Messingklemme k' den Schieber auf den Strich 60, 80 oder 100 einstellte und je die Messingklemme schloss. So konnte ich in wenigen Minuten für diese drei Längen je die Tonbestimmungen machen und ebenso in wenigen Minuten auch die sehr einfache Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ausführen. Kurz die Beobachtungsmethode war nun so weit ausgebildet, dass sie in keiner

Beziehung irgend eine Schwierigkeit oder Unbequemlichkeit darbot und doch die Bedingung einer raschen und genauen Bestimmung der Tonhöhen erfüllte.

13. Im vorausgehenden wurde verschiedentlich von Toncontrolen gesprochen und angegeben, wie man dabei zu verfahren habe, um sicher zu sein, dass man sich mit dem Ohre nicht getäuscht habe. Im Verlauf der Untersuchung kam ich aber noch auf eine ganz andere Controle, wobei die Verwendung der *Kundt'schen Staubfiguren* die Hauptsache bildete. Wenn es nämlich gelang, mit Hülfe der Longitudinalschwingungen der membranösen Streifen die Luft in einer Glasröhre in eine stehende Wellenbewegung zu versetzen, wenn es gelang, in dieser Glasröhre die Kundt'schen Staubwellen zu erzeugen, so konnte die Wellenlänge λ des Longitudinaltons für die Luft gemessen werden. Da nun die Sache so eingerichtet wurde, dass hierbei die Lamelle wie seither an beiden Enden fest war und mit ihrer Mitte die Schallerregung im Luftrohr besorgte, so war auch jetzt die Länge L der Lamelle gleich der halben Wellenlänge für den Ton. Da man ferner die Schallgeschwindigkeit in der Luft kennt und zunächst einmal bei einer Temperatur von $+18^{0}$ C. gleich 344 m setzen kann, so folgt aus der einfachen Gleichung

(a) $$\lambda^* . N = 344,$$

dass man die Schwingungszahl N als

(a*) $$N = \frac{344}{\lambda^*}$$

erhält und somit im Stande ist, diese Schwingungszahl *ohne Hülfe des Ohres* zu bestimmen. Ferner ergibt sich aus einer zweiten Gleichung für den Streifen

(b) $$\lambda . N = v,$$

welche Gleichung in die Gleichung (a) dividirt liefert

$$\frac{\lambda^*}{\lambda} = \frac{344}{v},$$

woraus dann

(c) $$v = 344 . \frac{\lambda}{\lambda^*}$$

oder, falls man die Schallgeschwindigkeit im Luftrohr mit 1 bezeichnet,

(d) $$v = \frac{\lambda}{\lambda^*}$$

gefunden werden kann.

Es wäre dies dieselbe Methode, welche Kundt anwandte, um die *relativen* Schallgeschwindigkeiten für feste Körper mittelst seiner Staubfiguren zu bestimmen. Kundt kam indess, da er nur relative Bestimmungen von Schallgeschwindigkeiten machte, mit all den Schwierigkeiten, denen man nothwendig begegnet, falls *absolute* Bestimmungen gemacht werden sóllen, nicht in Verbindung. Aber es gestatten desshalb auch solche relative Bestimmungen noch nicht die etwa verlangten Werthe für die wirklichen absoluten Geschwindigkeiten genau anzugeben. Denn wenn z. B. von Kundt gefunden wurde, dass die Schallgeschwindigkeit von Messing im Vergleich zu der in der Luft gleich 10,87 war und von ihm der Werth der Schallgeschwindigkeit, in der freien Luft für 0° C. gleich 332,8 m angenommen wurde, so ist dies letztere ein Werth, welcher selbst bei einer 55 mm weiten Röhre streng genommen nicht derselbe bleibt, wie in freier Luft. Würde er aber für die Röhre nur um vier Zehntel geringer und somit gleich 332,4 angenommen, so lässt sich sofort berechnen, dass hiernach die *absolute* Schallgeschwindigkeit in Messung um 4,4 m geringer gefunden wird.

Die Anwendung der Gleichungen (c) und (d) hatte für mich bei meiner Untersuchung keine Bedeutung, denn wir werden uns bald überzeugen, dass Streifen nicht so wie Stäbe verwendet werden können, um die Kundt'schen Figuren zu *scharfen* Messungen der Schallgeschwindigkeiten in den Streifen auszunutzen. Für mich hatte nur die Gleichung (a) und (a*) Bedeutung. Mit ihr konnte ich auf einem neuen Wege, *ohne das Ohr zu fragen*, die Octave des Longitudinaltons N gegenüber dem Transversalton n des Sonometers bestimmen. Denn wiewohl ich mich nach den vielfachen, im vorausgehenden besprochenen Toncontrolen, die mit dem Ohre ausgeführt wurden, für meinen Theil in vollkommener Sicherheit befand, so wäre doch ein Bedenken, welches von einer anderen Seite, namentlich einer solchen, welcher kein gutes Gehör zu Gebote steht, geäussert würde, nicht gerade ohne weiteres abzuweisen. Die neue Controle wird demnach jeden Zweifel, auch von solcher Seite geäussert, vollkommen beseitigen.

14. Wie liessen sich nun die Kundt'schen Figuren durch Streifen erzeugen? Diese Sache hat mir viel Schwierigkeiten bereitet, aber schliesslich gelangte ich doch in erfreulicher

Weise zum erwünschten Ziel. Die Fig. 11 zeigt den Weg, den ich zuerst einschlug. *RR* ist das Glasrohr, in welchem die Staubwellen erzeugt wurden. Am linken Ende desselben bedeutet *q* einen dicken Gummistopfen, der mittelst einer Laubsäge, von rechts nach links gerechnet, bis zur Mitte hin einen Vertical-Längsschnitt erhalten hat. In diesen wird das linke Ende des Streifens *ss'* eingeklemmt, das nun, falls der Stopfen fest ins Glasrohr eingesetzt wird, beim Anziehen des Streifens so fest in jenem haftet, wie es bei einer wirklichen Einklemmung in einer Metallklemme kaum fester halten kann. Der Gummistopfen spielt nämlich hier eine ähnliche Rolle wie eine Stopfbüchse, denn wie diese um so fester schliesst, je stärker die Druckkräfte wirken, um so stärker pressen sich auch die rechten Hälften des Stopfens zusammen, je stärker an der Lamelle gezogen wird.

Nun muss aber etwa in der Mitte des Streifens ein Stempelchen *p* angebracht werden. Dasselbe muss möglichst leicht sein und bestand bei meinen Versuchen aus Kork. Zu seiner Herstellung wurde von gutem Kork ein etwa 4 mm hohes Stück abgeschnitten. Dann wurde dieses Stück mit der Laubsäge genau in der Richtung eines Durchmessers in zwei Hälften zersägt. Dann wurde jedes dieser halbkreisförmigen Stücke mittelst einer feinen Feile an der Diameterseite auf eine bestimmte Strecke ein wenig ausgefeilt, sodass beim Wiederzusammensetzen der Stopfen so wie in Fig. 12 dargestellt aussieht, indem er durch das Anfeilen in der Mitte den schmalen Schlitz $\mu\mu'$ bekommen hat, durch welchen hernach, wie zu erwarten, der Streifen durchgesteckt werden soll. Bevor dies aber möglich wird, müssen die beiden Hälften des Stopfens erst wieder fest zu einem Ganzen vereinigt werden. Ich machte es so, dass ich um den äusseren Kreisrand einen schmalen Streifen Papier, mit Leim bestrichen, umlegte, welcher Streifen wie ein Ring die beiden Hälften des Korkstempelchens fest umschloss. Hierbei konnte auch erreicht werden, dass der Korkstempel am rechten Ende des Glasrohres dieses entsprechend abschloss, denn es ist hierbei unbedingt nöthig, dass nicht etwa zu viel Reibung eintritt, aber auch nicht zu viel Spielraum zwischen dem Stempel und der Glaswand verbleibt. Indem man den Papierstreifen, der um den Stempel herum-

geht, entsprechend in seiner Länge verkürzt, lässt sich dieser richtige Abschluss des Luftrohres erreichen. Das Ende der Lamelle, welches durch den Schlitz des Stempelchens hindurchgehen soll, muss dies thun, ohne dass letzterem Gewalt angethan wird. Das Stempelchen wird sodann nach links verschoben und, nachdem es etwa 3 mm ins rechte Ende der Glasröhre eingeschoben ist, mit ein wenig heissem Wachs-Calophoniumkitt an der Lamelle *ss'* befestigt. Ist der Schlitz im Stempelchen vielleicht ein bischen zu weit gerathen, so schadet dies nichts, denn es lässt sich eben mittelst des Kittes an ihm und dem Streifen der Luftabschluss des Luftrohres nach aussen vervollständigen. Es versteht sich von selbst, dass die Röhre auf der akustischen Latte solid befestigt werden muss und ebenso die Klemme *k* entsprechend befestigt wird. Ersteres wurde so bewirkt, dass die Röhre durch das Mittelloch *y* des linken Schiebers *S*, Fig. 9a, gesteckt wurde und noch dazu vor oder hinter diesem Schieber durch einen Kork eine weitere Unterstützung auf der Latte bekam. Die Befestigung der Klemme *k*, Fig. 11, geschah so, dass eine der beiden Messingklemmen an einem Schieber, z. B. von der Stelle *k'*, Fig. 9a, losgeschraubt und statt dessen vor dem kreisrunden Mittelloch, Fig. 9a, dieses Schiebers festgeschraubt wurde, sodass die Lamelle nunmehr centrisch durch dieses Loch *y* hindurchgezogen und sodann festgeklemmt werden konnte. Durch entsprechende feinere Regulirungen in der Lage der Röhre und der Einklemmung der Lamelle lässt sich dann erzielen, dass beim Anstreichen der letzteren an der Stelle α, Fig. 11, ein möglichst regelmässiger Longitudinalton erhalten wird.

Das Einbringen des Korkfeilichts in die Luftröhre geschieht an der linken Seite derselben, indem zunächst, Fig. 11, die Klemme *k* geöffnet, dann der Stopfen *q* aus der Röhre herausgezogen und dann eine entsprechende Menge des Korkfeilichts links in die Röhre gebracht wird. Nachdem der Stopfen *q* wieder eingesetzt worden ist, hebt man die Latte sammt allem, was auf ihr befestigt ist, auf und sucht durch Schiefhalten derselben und Klopfen auf dieselbe das Pulver möglichst regelmässig in der Röhre zu vertheilen. Wird die Lamelle dann wieder gespannt und angestrichen, so wird man beim regelmässigen Tönen der Lamelle auch regelmässige Staubfiguren erhalten.

15. Nehmen wir an, das Luftrohr wäre etwa 1 m lang gewesen, so müsste die Lamelle nahezu 2 m lang sein, wenn die ganze Zusammenstellung der Fig. 11 gewahrt bleiben sollte. Geben wir zu, dass ein so langer Streifen von einem Körper, dessen Schallgeschwindigkeit z. B. gleich 2000 m ist, wirklich zu verwenden war, so ist die Schwingungszahl für den Grundton des Streifens gleich

$$N = \frac{2000}{2.2} = 500.$$

Setzen wir die Schallgeschwindigkeit in der Röhre bei einer Temperatur gleich 18° C., rund gerechnet gleich 344 m, so würde die Länge λ der Luftwelle gleich

$$\lambda^* = \frac{344}{500} = 0,688 \text{ m} = 688 \text{ mm},$$

d. h. die Halbwelle gleich $\lambda^*/2 = 344$ mm sein. Hieraus ergibt sich, dass im Luftrohr, dessen Länge 1 m ist, nur etwa zwei Halbwellen sich deutlich ausbilden können, falls überhaupt diese Ausbildung deutlich erfolgt. Solche Halbwellen von 344 mm Länge lassen sich aber ihrer Länge nach nicht gerade mit grosser Genauigkeit bestimmen, falls nicht eine grössere Zahl vorhanden ist, aus deren Gesammtlänge hernach durch Division in die Anzahl der Halbwellen ein genauerer Mittelwerth abgeleitet werden kann, oder besser, aus deren Einzelwerthen nach einer bestimmten Methode[1]) ein solcher genauerer Werth abzuleiten ist. Es war demgemäss nöthig, mehr Halbwellen im Luftrohr zu bekommen. Aber soweit unsere jetzige Einrichtung in Betracht kommt, lässt sich dies nicht erzielen. Denn wollten wir das Rohr länger nehmen, so müsste im selben Verhältniss auch der tönende Streifen länger genommen werden. Es würde aber hiermit der Ton des Streifens im Verhältniss der Verlängerung tiefer und hiermit die Länge einer Halb- oder Ganzwelle im Luftrohr auch entsprechend grösser werden. Die Zahl der Wellen würde demnach im Rohre dieselbe bleiben. Dasselbe würde bei einer Verkürzung des Luftrohres und einer gleichen Verkürzung des tönenden Streifens eintreten.

Es gibt jedoch zwei Mittel, um das Erwünschte zu er-

1) Pogg. Ann. **135.** p. 357 ff.

reichen. Das eine Mittel ist das, dass man nicht den Longitudinal-Grundton, sondern den *zweiten* Oberton des Streifens verwendet, bei welchem Tone wir ein $N = 1000$ anstatt wie vorhin $N = 500$ erhalten hätten. Die Einrichtung müsste dann so wie die Fig. 13 versinnlicht, getroffen werden. In ihr bedeutet jetzt wie früher ss' die Länge des Streifens, also gemäss der früheren Annahme seine Länge gleich 2 m. Die Röhre soll aber um ihre Hälfte verlängert werden und somit 1,5 m lang sein, demgemäss sie jetzt die Strecke RR' einnimmt. Lassen wir den Streifen den zweiten Oberton geben, so liegt bei ihm ein Knoten in n und zwei Schwingungsmaxima in m und bei p. Bringen wir demgemäss jetzt bei p das Korkstempelchen an, so werden beim Anstreichen Halbwellen gleich $344/2 = 172$ mm herauskommen, so, dass auf die Länge des Glasrohres acht Halbwellen kämen, von denen, wenn wir diejenigen an den Enden des Rohres weglassen, doch wohl sechs für eine genauere Bestimmung der Wellenlänge zur Verfügung stehen können.

Diesen hier bezeichneten Weg habe ich jedoch nicht weiter verfolgt, denn da die Streifentöne des zweiten Obertons schwieriger herauszubringen sind, so werden sie nicht intensiv und regelmässig genug, um hinreichend starke Lufterschütterungen im Rohre zu erzeugen. Ich wendete vielmehr eine ganz andere Methode an, um zum Ziel zu gelangen und habe ich dieselbe in der Fig. 14 versinnlicht. In ihr bedeutet RR' wieder das Glasrohr. Aber jetzt wird bei ihm der Tonstreifen nicht in q befestigt, sondern es wird durch ein centrisch gebohrtes Loch des Gummistopfens q hindurch zunächst ein langer Messingdraht r gesteckt. Derselbe trägt am rechten Ende eine kleine Messingklemme, und in dieser wird erst das linke Ende s des Tonstreifens mittelst zweier kleinen Schräubchen eingeklemmt, während das rechte Ende wie vorhin in k festgeklemmt wird. Damit der Messingdraht r durch seine Schwere sich rechts in der Glasröhre nicht herunter senken kann, wodurch eine centrale Anordnung des Streifens und des Korkstempelchens bei p unmöglich würde, ist an rr bei t ein kleines Messingfüsschen angelöthet, sodass nunmehr der Draht rr horizontal liegen bleiben muss. Hat man demnach nur hinreichend lange Röhren, so kann die Zahl der Halbwellen in ihnen vollkommen ge-

nügend vermehrt werden. In dem Falle, welcher im nächsten Abschnitte erläutert werden soll, waren die betreffenden Dimensionen der ganzen Einrichtung folgende: Länge des Glasrohres 1270 mm, Durchmesser desselben im Lichten 28 mm. Länge des Messingdrahtes *rr* incl. der kleinen Messingklemme 1140 m, Dimensionen der kleinen Messingklemme gleich 19/21 mm. Da nun die Länge des zum Tönen verwendeten Streifens *ss'* gleich 800 mm, mithin die Strecke desselben im Glasrohr gleich 400 mm war, so ragte vom Messingdraht *rr*, vom rechten Ende von *q* an gerechnet, ein Stück gleich 1140 − 400 = 740 mm, die kleine Klemme mit gerechnet, ins Glasrohr hinein.

16. Bevor ich aber die weiteren Ergebnisse meines zunächst hier in Betracht kommenden Versuches mittheile, muss erst noch ein anderer wichtiger Umstand erörtert werden. Verwendet man nämlich Glasröhren und Glasstäbe, oder Metallstäbe und Metallröhren bezw. auch Holzstäbe, so wird die Hinzufügung eines Stempelchens von Kork am einen Ende dieser tönenden Körper den Longitudinalton derselben nicht wesentlich ändern. Immerhin aber müsste die Tonhöhenänderung beachtet werden, wenn man die Kundt'schen Figuren zur Messung von *absoluten* Schallgeschwindigkeiten benutzen wollte. Denn, wenn die Tonhöhenänderung N beträgt, so ist die Schwingungszahl des Tons vom Klangstab nicht wie beim unbelasteten Stab N sondern $N - \Delta N$. d. h. der belastete Stab wirkt so wie ein unbelasteter Stab von der Länge $L + \Delta l$ wirken würde, wenn er mit einem Stempelchen *ohne Masse* die Luft im Glasrohr erschüttern könnte. Hieraus ergibt sich mit Evidenz, dass auch sogar bei relativen Messungen von Schallgeschwindigkeiten bei der Berechnung nicht ohne weiteres die factischen Längen der Klangstäbe verwendet werden dürfen, sondern die, welche erst nach der Berücksichtigung der Tonvertiefung durch die Belastung der Stempelchen sich berechnen lassen. Nehmen wir z. B. zwei Stäbe: den einen von *Glas*, den anderen von *Messing*, beide der Einfachheit halber gleich lang und beide nacheinander mit demselben Stempelchen versehen, so leuchtet ein, wenn die Stäbe z. B. auch denselben Durchmesser haben, dass das Stempelchen der weit grösseren Masse des Metallstabs gegenüber wohl wenig Einfluss auf die Tonhöhe dieses Stabes ausüben wird. Aber auch dies zuge-

geben, bliebe vielleicht doch der Einfluss beim Glasstab bestehen. Sind demnach nun die Tonhöhenvertiefungen für die beiden Stäbe $\Delta N'$ und $\Delta N''$, so sind die ihnen entsprechenden Längen der Klangstäbe welche *ohne Belastung* die Töne $(N' - \Delta N')$ und $(N'' - \Delta N'')$ liefern würden, beide nicht L sondern beim Glasstab $(L + \Delta L')$ und beim Messingstab $(L + \Delta L'')$ Findet man nun bei der Messung der Staubwellen für Luft im Glasrohr die entsprechenden Wellenlängen gleich λ^* und λ^{**}, so ist das Verhältnniss der Schallgeschwindigkeiten für Glas zu Messung nicht gleich λ^{**} / λ^* sondern es müssen hier genauere Gleichungen zur Anwendung kommen, welche, wenn die Schallgeschwindigkeit für Luft im Glasrohr mit v, die für Glas mit v' und für Messing mit v'' bezeichnet wird, lauten wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}(N' - \Delta N')\lambda.^* &= v\\ 2(N' - \Delta N')(L + \Delta L') &= v'\end{aligned}\right\}\ \text{Für Luft und den Glasstab.}$$

$$\left.\begin{aligned}(N'' - \Delta N'')\lambda^{**} &= v\\ 2(N'' - \Delta N'')(L + \Delta L'') &= v''\end{aligned}\right\}\ \text{Für Luft und den Messingstab.}$$

Demgemäss ergibt sich:

$$\frac{v}{v'} = \frac{\lambda^*}{2(L + \Delta L')}$$

$$\frac{v}{v''} = \frac{\lambda^{**}}{2(L + \Delta L'')}$$

mithin

$$\frac{v'}{v''} = \frac{\lambda^{**}.(L + \Delta L')}{\lambda^*.(L + \Delta L'')}.$$

Die in Klammern stehenden Werthe stellen demgemäss die Correctionsfactoren vor, mit denen die im Luftrohr gemessenen Wellenlängen λ^* und λ^{**} zu multipliciren sind. Zur Berechnung der Werthe $(L + \Delta L')$ und $(L + \Delta L'')$ führen aber offenbar die Gleichungen:

$$\frac{N'}{(N' - \Delta N')} = \frac{(L + \Delta L')}{L}$$

und

$$\frac{N'}{(N'' - \Delta N'')} = \frac{(L + \Delta L'')}{L}.$$

Demgemäss

$$\frac{(L + \Delta L')}{(L + \Delta L'')} = \frac{N'(N'' - \Delta N'')}{N''(N' - \Delta N')}$$

zu setzen ist. Die verbesserte Gleichung für die relativen

Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im Anschluss an die zunächst aus der Beobachtung erhaltenen Tonhöhen lautet demnach:

$$\frac{v'}{v''} = \frac{\lambda^{**}}{\lambda^*} \cdot \frac{N'(N'' - \Delta N'')}{N''(N' - \Delta N')}.$$

Ein Beispiel mag diese Sache einmal erläutern. Ich nahm einen Glasstab von 5,6 mm und einen Messingstab von 6,0 mm Durchmesser. Beide Stäbe hatten dieselbe Länge nämlich 1,570 m. Diese Stäbe erhielten beide denselben Korkstempel aufgesteckt, der bei einer Dicke von 4 mm einen Durchmesser von 27 mm besass. Beide Stäbe lieferten beim Anstreichen und Ertönen ihres Grundtons sehr schöne Staubwellen und zwar waren für den Glasstab $7 . \lambda^* / 2 = 722$ mm und für den Messingstab $5 . \lambda^{**} = 773$ mm. Es war mithin $\lambda^* = 206,29$ und $\lambda^{**} = 309,2$ und somit ohne Rücksicht auf eine etwaige Tonhöhenveränderung durch den Stempel

$$\frac{v'}{v''} = \frac{\lambda^{**}}{\lambda^*} = \frac{309,20}{204,29} = 1,4988.$$

Die Tonhöhenmessung ergab für den Glasstab *ohne* Stempel eine Oberoctave von der Zunge Nr. 41,5 mithin von $n = 422$; ferner für den Glasstab *mit* Stempel in derselben Oberoctave aber von Nr. 40 mithin von $n = 416$. Beim Messingstab liess sich ein Unterschied bei Belastung und ohne Belastung nicht erkennen und war der Ton dieselbe Oberoctave von Nr. 4 mithin von $n = 272$. Es war somit $\Delta n = \Delta N'' = o$ und für den Glasstab $\Delta n' = 6$. Da die Ordnungszahl der Oberoctave für beide Töne dieselbe war, so brauchte ich nicht erst N', N'' und $\Delta N'$ zu berechnen, sondern konnte unmittelbar $\Delta N' = \Delta n' = 6$ und ebenso $N' = 422$ und $N'' = 272$ setzen. Der Correctionsfactor an λ^{**} / λ^* wird demnach

$$\frac{422 . 272}{272 . 416} = 1,0144$$

und wird hiernach v' / v'' nicht gleich 1,4988 sondern gleich 1,5204 gefunden. Man sieht sofort, dass hier Umstände eintreten können, welche eine Rücksicht auf den Einfluss der Belastung durch den Stempel unbedingt erheischen, namentlich wenn vielleicht gar schwerere Stempel von Hartgummi verwendet werden.

17. Hiernach wird man klar erkennen, dass wenn wir zur Erzeugung von Kundt'schen Figuren etwa Saiten oder

unsere membranösen Streifen verwenden, die Frage nach der Vertiefung des Tons, veranlasst durch den stossenden Stempel, und nach dem Einfluss dieser Vertiefung auf die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in den betreffenden Medien von besonderer Bedeutung ist. Die nächsten Auseinandersetzungen werden dies noch weiter bestätigen.

Die Erzeugung der Kundt'schen Staubfiguren nach der durch den Apparat der Fig. 14 erläuterten Methode geschah mittelst eines Streifens von weissem starken Ellenpapier, dessen Dicke gleich 0,202 mm war. Die Länge dieses Streifens war 80 cm, mithin die Wellenlänge des Tons gleich 1,6 m. *Ohne Belastung* gab dieser Streifen folgende Werthe:

$$a = 20; n = 336;$$

$$(v) = 1{,}6 \,.\, 336 = 537{,}6; \quad v = 4\,(v') = 2150.$$

Mit Belastung ergab sich:

$$a = o; n = 256.$$

Demgemäss hat das Korkstempelchen bezüglich der Tonhöhenänderung so gewirkt als hätten wir anstatt des in der Mitte belasteten Streifens einen solchen *ohne* Belastung aber von der Länge:

$$(L) = L \,.\, \frac{336}{256} = 1{,}313 \,.\, L = 105{,}04 \text{ cm}$$

für den also $(\lambda) = 210{,}08 \text{ cm} = 2{,}101 \text{ m}$ gewesen wäre. Die Tonhöhe (n) für diesen Streifen ist offenbar zu berechnen aus der Proportion:

$$\frac{336}{(n)} = \frac{2{,}101}{1{,}600} \text{ mithin } (n) = \frac{1{,}6 \,.\, 336}{2{,}101},$$

woraus durch Multiplication mit $(\lambda) = 2{,}101$ selbstverständlich (v) und v wieder ebenso erhalten werden, wie bei der Lamelle von 80 cm.

Der Ton bei der unbelasteten Lamelle verhielt sich zum Tone der belasteten wie $336 / 256 = 1{,}313$ d. h. Das Intervall war nahezu eine Quarte. *Die beiden Töne gehörten mit Evidenz derselben Octave an.* Die Frage war nun weiter: *welcher Octave?*

Zunächst sei bemerkt, dass die vorausgehende Feststellung der Tonvertiefung durch den Stempel an dem in verticaler Lage frei herunter hängenden und eingeklemmten Streifen bei einer Spannung von 800 g vorgenommen wurde. Ich musste

nämlich erst durch einen genauen Vorversuch, ohne dass der Streifen der Fig. 14 entsprechend in *horizontaler* Lage und zur Hälfte in dem Glasrohr RR' zur Verwendung kam, über die Tonveränderung unterrichtet sein. Hierbei sei weiter bemerkt, dass es bei dieser Prüfung nicht nöthig ist, das Korkstempelchen, falls der Streifen ohne Belastung schwingen soll, ganz von dem Letzeren zu entfernen. Es genügt vielmehr, das Stempelchen nur von der Mitte aus möglichst an ein festes Ende des Streifens hinzurücken.

Nunmehr wurde der Versuch mit Glasrohr und Streifen in horizontaler Lage eingerichtet. Da hierbei die Längenverhältnisse nicht genau so wie vorhin verbleiben konnten, weil das Stempelchen jetzt nicht im freien Zustand, sondern vorn ins rechte Ende der Röhre RR' Fig. 14 eingestellt werden musste, und auch die Spannung jetzt durch Anziehen mit der Hand gemacht werden musste, so war es nöthig, die Tonhöhenbestimmung genau *diesen* Verhältnissen entsprechend zu wiederholen. Der belastete Streifen lieferte bei einer Länge = 81,7 cm = 0,817 m folgendes:

$$a = 62; n = 504.$$

Nun aber die Hauptsache. Es entstanden hierbei im Glasrohr sehr schöne Staubwellen und konnte sofort festgestellt werden, dass für die *Luft*

$$4 \cdot \frac{\lambda^*}{2} = 692; \lambda^* = 346 \text{ mm}$$

war, mithin dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die Luft zunächst

$$(v^*) = 504 \cdot 0{,}346 = 174{,}4 \text{ m}$$

gefunden wurde. Um aber auf die wirkliche Schallgeschwindigkeit in der Luft zu kommen, musste dieses $(v^*) = 174{,}4$ nothwendig mit 2 multiplicirt werden, um

$$v^* = 348{,}8 \text{ m}$$

zu erhalten. Dies wird aber nur zu erreichen sein, wenn angenommen wird, dass unser $n = 504$ Schwingungen, um auf den Longitudinalton N des Streifens zu kommen, in der nächst höheren Octave zu nehmen ist.

Es ist hiermit aber der unumstössliche Beweis geliefert, dass ich mit meiner Annahme, es sei der Streifenton die 1. Oberoctave

von Nr. a = 62 des Sonometers mit dem Ohr vollkommen richtig entschieden hatte. Hiermit ist aber auch der Beweis geliefert, dass für die Töne aller anderen Streifen, wobei fortwährend Toncontrolen, namentlich von Streifen-Tönen nebeneinander vorgenommen wurden, die entsprechenden Annahmen über die Ordnungszahlen der Ober- bezw. Unteroctaven vollkommen richtig waren.

Ich glaube hiermit Methoden der Beobachtung und Feststellung von Tönen dargestellt zu haben, welche mehrfach auch sonst in der Akustik zur Verwendung kommen können, um Fragen zu entscheiden, an deren Lösung man bis jetzt vorüber gegangen ist.

18. Ich wende mich jetzt zur Mittheilung meiner factisch gefundenen Werthe von Schallgeschwindigkeiten bei einer grossen Anzahl von membranösen Köpern, indem ich diese Beobachtungswerthe und Schlussberechnungen je in einer Tabelle zusammenstelle. In einer solchen enthält die 1. Columne die Bezeichnung des betreffenden Körpers; die 2. Columne die Spannung in Grammen angegeben; die 3. Columne enthält die doppelte Länge der Streifen, welche zum Tönen gebracht wurden, nämlich doppelt desswegen, weil $2L = \lambda$ die Wellenlänge des betreffenden Tons bedeutet; die 4. Columne enthält das a d. h. die Nummer der Zunge mit welcher der Streifenton eine bestimmte Octave bildete; die 5. Columne enthält die Schwingungszahl n der No. a; die 6. Columne enthält den Werth von (v) d. h. die vorläufig mit λ und n berechnete Schallgeschwindigkeit; die 7. Columne enthält die Grösse 2^k, wobei unter k die Ordnungszahl der Octave zu verstehen ist, welche der Streifenton N mit dem Sonometerton n bildete. Für $k = o$ bestand demgemäss Einklang, für $k = 1$ bildete der Streifenton die 1. Oberoctave vom Sonometerton d. h. n musste mit $2^1 = 2$ multiplicirt werden, welche Multiplication aber auch erst später mit dem (v) vorgenommen werden kann. Geschieht dies aber, so kommt man zur Hauptcolumne 8, welche die Werthe der wirklich festgestellten Schallgeschwindigkeit v enthält. Die Columne 9 endlich enthält die Mittelwerthe der Einzelwerthe v der 8. Columne. In der Columne 10 finden sich Bemerkungen über die Art der Töne insbesondere auch darüber, ob sie schwierig herauszubringen waren, ob sie möglichst rein u. s. w. waren und welche Controlen stattfanden.

Erste Gruppe.

Körper	Spannung	λ	a	n	$(v) = n \cdot \lambda$	2^k	v	Mittel	Bemerk[illegible]
1. Gelbes Seidenpapier	300	1,2	6	280	336,0	8	2688		Ton schw[illegible]
	300	1,6	43	428	684,8	4	2739	2705	re[illegible]
	300	2,0	20	336	672,0	4	2688		
„ „	100	1,2	1	260	312,0	8	2496		
	100	1,6	34	392	627,2	4	2509	2522	
	100	2,0	16	320	640,0	4	2560		
2. Weisses Seidenpapier	100	1,2	40	416	499,2	4	1997		Die Cont[illegible]
	100	1,6	13	308	492,8	4	1971	1989	Nr. 24 be[illegible]
	100	2,0	61	500	1000,0	2	2000		Span. st[illegible]
3. Weisses Ellenpapier	800	1,2	47	444	532,8	4	2131		Schöne d[illegible]
	800	1,6	20	336	537,6	4	2150	2136	Töne. ([illegible]
	800	2,0	2,5	266	532,0	4	2128		mit Nr[illegible]
4. Feines Schreibpapier	900	1,2	45	436	523,2	4	2093		
	900	1,6	18	328	524,8	4	2099	2107	
	900	2,0	2,5	266	532,0	4	2128		
5. Zeichenpapier sog. Whatman	1000	1,2	48	448	537,6	4	2150		Ein sehr[illegible]
	1000	1,6	20	336	537,6	4	2150	2153	mässiger[illegible]
	1000	1,8	11	300	540,0	4	2160		
6. Weisses Concept-papier	600	1,2	45	436	523,2	4	2093		
	600	1,6	17	324	518,4	4	2073	2087	
	600	2,0	1,2	262	524,0	4	2096		
7. Dicker weisser Löschcarton	500	1,2	22	344	412,8	4	1651		Contro[illegible]
	500	1,6	62	504	806,4	2	1613	1627	Nr. 23 b[illegible]
	500	2,0	37	404	808,0	2	1616		Span[illegible]
8. Strohpapier	500	1,2	22	344	412,8	4	1651		
	500	1,6	61	500	800,0	2	1600	1617	
	500	2,0	36	400	800,0	2	1600		
9. Durchweg mattgrün gefärbtes Papier	500	1,2	45	436	523,2	4	2093		Contro[illegible]
	500	1,6	18	328	524,2	4	2099	2101	Nr.[illegible]
	500	2,0	2	264	528,0	4	211[illegible]		

Zweite Gruppe.

Körper	Spannung	λ	a	n	$(v) = n \cdot \lambda$	2^k	v	Mittel	Bemer[illegible]
10. Dünnes weisses Pergamentpapier	700	1,2	52	464	556,8	4	2227		
	700	1,6	21	340	544,0	4	2176	2198	
	700	2,0	4,5	274	548,0	4	2192		
11. Rothes dickes Pergamentpapier	900	1,2	58	488	585,6	4	2342		Töne r[illegible]
	900	1,6	28	368	588,8	4	2355	2339	st[illegible]
	900	2,0	8,5	290	580,0	4	2320		
12. Dünnes durchsichtiges Pauspapier	700	1,2	55	476	571,2	4	2285		
	700	1,6	25	356	569,6	4	2278	2278	
	700	2,0	7	284	568,0	4	2272		

	Spannung	λ	a	n	$(v)=n.\lambda$	2^k	v	Mittel	Bemerkungen
hwarzes	600	1,2	38	408	489,6	4	1958		
atine)	600	1,6	12	304	486,4	4	1945	1962	
	600	2,0	60	496	992,0	2	1984		
h farb.	600	1,2	58	488	585,6	4	2342		Controle mit
r	600	1,6	28	368	588,8	4	2355	2339	Nr. 11
	600	2,0	8,5	290	580,0	4	2320		
rpapier	600	1,2	3	268	321,6	8	2573		Controle mit
	600	1,6	36	400	640,0	4	2560	2575	Nr. 1
	600	1,8	26	360	648,0	4	2592		
gelb	1500	1,2	60	496	595,2	4	2381		
	1500	1,6	28	368	588,8	4	2355	2368	
	1500	2,0	10	296	592,0	4	2368		
carton	1000	1,2	51	360	552,0	4	2208		
	1000	1,6	2 1	340	544,0	4	5176	2187	
	1000	2,0	4	272	544,0	4	2176		
achs-	500	1,2	53	468	561,6	4	2246		Controle mit
	500	1,6	25	356	569,6	4	2278	2255	Nr. 12
	500	2,0	6	280	560,0	4	2240		
einseit.	500	1,2	19	332	398,4	4	1594		
er	500	1,6	59	492	787,2	2	1574	1579	
	500	2,0	34	392	784,0	2	1568		
weiseit.	500	1,2	10	296	355,2	4	1421		Controle mit
r	500	1,6	47	444	710,4	2	1421	1417	Nr. 23 bei 1500 g
	500	2,0	24	352	704,0	2	1408		Spannung

Dritte Gruppe.

	Spannung	λ	a	n	$(v)=n.\lambda$	2^k	v	Mittel	Bemerkungen
chnur	2000	1,2	39	412	494,4	4	1977		
	2000	1,6	12	304	486,4	4	1945	1942	
	2000	2,0	55	476	952,0	2	1904		
nur	1000	1,2	30	376	451,2	4	1805		
	1000	1,6	7	284	454,4	4	1817	1815	
	1000	2,0	50	456	912,0	2	1824		
schnur	1500	1,2	12	304	364,8	4	1459		
	1500	1,6	46	440	704,0	2	1408	1425	
	1500	2,0	24	352	704,0	2	1408		
hnur	1000	1,2	64	512	614,4	2	1229		
	1000	1,6	34	392	627,2	2	1254	1260	
	1000	2,0	17	324	648,0	2	1296		
asband	1000	1,2	41	420	504,0	4	2016		
	1000	1,6	14	312	499,2	4	1997	2015	Töne schön und
	1000	2,0	63	508	1016,0	2	2032		rein

Körper	Spannung	λ	a	n	(v) = n.λ	2^k	v	Mittel	Bem
Gelbes Atlasband	500	1,2	36	400	480,0	4	1920		
	500	1,6	11	300	480,0	4	1920	1925	
	500	2,0	57	484	968,0	2	1936		
25. Dreifarbiges seidenes schmales Ripsband	1000	1,2	33	388	465,6	2	931		
	1000	1,6	11	300	480,0	2	960	953	
	1000	2,0	57	484	968,0	1	968		
Dreifarbiges seidenes schmales Ripsband	500	1,2	16	320	384,0	2	768		
	500	1,6	55	476	761,6	1	762	758	
	500	2,0	29	372	744,0	1	744		
26. Einfarb. schmales rothes Seindenripsband	500	1,2	2	264	316,8	4	1267		
	500	1,6	34	392	627,2	2	1254	1262	
	500	2,0	15	316	632,0	2	1264		
27. Rothes Seidenband. Einfassband.	500	1,2	64	512	614,4	2	1229		
	500	1,6	34	392	627,2	2	1254	1246	
	500	2,0	14	314	628,0	2	1256		
28. Mousselinstreifen	300	1,2	55	476	571,2	2	1142	1126	
	300	1,4	35	396	554,4	2	1109		
Mousselinstreifen	500	1,2	62	504	604,8	2	1210	1216	Cont
	500	1,4	45	436	610,4	2	1221		N

Vierte Gruppe.

Körper	Spannung	λ	a	n	(v) = n.λ	2^k	v	Mittel	Bem
29. Pausleinwand	900	1,2	15,5	318	381,6	8	3053		Tör
	900	1,6	57	484	774,4	4	3098	3068	ur
	900	1,8	42	424	763,2	4	3053		
30. Schwarzes Wachstuch	1000	1,2	56	480	576,0	1	576		
	1000	1,4	34	392	548,8	1	549	559	Töne
	1000	1,6	22	344	550,5	1	551		trole n
31. Weissgraues Kautschuktuch	1000	1,2	21	340	408,0	1	408		500 g
	1000	1,4	13	308	431,1	1	431	423	Tön
	1000	1,6	3	268	428,8	1	429		Con
32. Rothe Chagrain-Leinwand	500	1,2	16	320	384,0	4	1536		
	500	1,4	1,5	262	366,8	4	1467	1504	
	500	1,6	54	472	755,2	2	1510		
33. Braune Chagrain-Leinwand	500	1,2	51	460	552,0	2	1104		Co
	500	1,4	31	380	532,0	2	1164	1110	Nr. 2
	500	1,6	19	332	531,2	2	1062		Sp

Fünfte Gruppe.

Es ist mir nicht gelungen durch Streichen einen Gummi-
eifen zum Tönen zu bringen. Die überaus leichte Dehn-
rkeit, die sich beim Streichen bemerklich macht, lässt nicht
, dass longitudinale Schwingungen sich ausbilden können.

Sechste Gruppe.

rper	Spannung	λ	a	n	$(v)=n.\lambda$	2^k	v	Mittel	Bemerkungen
sammen-	500	1,2	19	332	398,4	8	3187		
Palmenblatt	500	1,6	58	488	780,8	4	3123	3159	
	500	2,0	35	396	792,0	4	3168		
er Streifen	1500	1,2	44	432	518,4	8	4147		
enholz	1500	1,6	18	328	524,8	8	4198	4179	Schöne Töne
	1500	2,0	1,5	262	524,0	8	4192		
er Streifen	1000	1,2	25	356	427,3	8	3418		
enholz	1000	1,4	12	304	426,6	8	3413	3412	Ebenso
	1000	1,6	2,5	266	425,6	8	3405		
er Streifen	1500	1,2	24	352	422,4	8	3379		
enholz	1500	1,4	11	300	420,0	8	3360	3381	Ebenso
	1500	1,6	2,5	266	425,6	8	3405		

Siebente Gruppe.

rper	Spannung	λ	a	n	$(v)=n.\lambda$	2^k	v	Mittel	Bemerkungen
gefärbtes	100	1,2	40	416	499,2	1	499		Töne dumpf
fleder	100	1,4	21	340	476,0	1	476	471	und unbestimmt
	100	1,6	4,5	274	438,4	1	438		
ment von	1500	1,2	26	360	432,0	4	1728		
iner Firma	1500	1,6	52	464	842,4	2	1685	1636	Töne unrein
	1500	1,8	40	416	747,8	2	1495		
nt von einer	2000	1,2	32	384	460,8	4	1843		
hen Firma	2000	1,4	20	336	470,4	4	1882	1860	Töne rein
	2000	1,6	8,5	290	464,0	4	1856		
nstreifen	500	1,2	7	284	340,8	4	1363		
	500	1,4	56	480	672,0	2	1344	1359	
	500	1,6	42	424	684,4	2	1369		

Achte Gruppe.

per	Spannung	λ	a	n	$(v)=n.\lambda$	2^k	v	Mittel	Bemerkungen
iumstreifen	1000	1,4	39	412	576,8	8	4614		
	1000	1,6	26	360	576,0	8	4608	4602	
	1000	1,8	16	320	576,0	8	4608		
	1000	2,0	7,5	286	572,0	8	4576		

19. Es erübrigt jetzt noch einige weitere Bemerkungen zu den im Vorausgehenden mitgetheilten Resultaten hinzuzufügen. Bei den Körpern der *ersten* Gruppe ist auffällig, dass gerade das Seidenpapier die höchste Schallgeschwindigkeit aufweisst und musste hierbei namentlich eine Controle eintreten, um vollkommen sicher zu sein. Sonst zeigen die verschiedenen Papiere gerade keine besondere Verschiedenheit bis auf den Löschkarton und das Strohpapier, welche Stoffe eine merklich geringere Schallgeschwindigkeit aufweisen, wie z. B. das Wattmann-Zeichenpapier.

Bei den Körpern der *zweiten* Gruppe sind interessant Nr. 19 und 20. Diese mit Farbstoffen überzogenen Copirpapiere werden bekanntermassen dazu benutzt um Schriftcopien oder Zeichencopien auf einem untergelegten Papier oder einem Stück Zeug, worauf gestickt werden soll, zu machen. Die Farbstoffe sind auf die Papiere lose aufgestrichen und lassen sich mit dem Finger wegwischen; dieselben sind demnach für das eigentliche Papier als Ballast zu betrachten, der nothwendig die Schallgeschwindigkeit verringern muss. Insbesondere zeigt sich wie der doppelseitige Ballast von No. 20 gegenüber dem einseitigen Ballast von No. 19 die Schallgeschwindigkeit noch mehr herabgedrückt hat.

Die *dritte* Gruppe ist namentlich interessant. Denn es kommen hierbei grosse Differenzen in der Schallgeschwindigkeit vor. No. 24 hat ein $v = 2015$ und No. 25 bei 500 gr Spannung 758 m Geschwindigkeit. Die Stoffe dieser dritten Gruppe haben ausser den Längsfäden der Streifen auch Querfäden und leuchtet ein, dass die Querfäden bei der Schallfortpflanzung zum Theil als Ballast zu betrachten sind. Es muss daher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei den stark quergerippten Stoffen, wie das No. 25 zeigt, auffällig geringer werden. Ferner erkennt man deutlich wie bei den Körpern dieser Gruppe die Spannung einen wesentlichen Einfluss ausübt.

Bei der *vierten* Gruppe macht sich der Einfluss des Ueberzugs, der rein als Ballast wirkt, so geltend, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit fast auf die der Luft herabkommt. Alles das also, was Wachstuch heisst, pflanzt den Schall nur mit sehr geringer Schallgeschwindigkeit fort. Dagegen sehen wir bei der Pausleinwand eine hohe Schallgeschwindigkeit. Ich

erkläre mir diese so, dass ich annehme, dass das Wachs oder der Körper, mit welchem der Stoff überstrichen ist, wirklich in den ganzen Stoff eingedrungen ist, sodass ein Stoff mit bedeutenderer Steifigkeit herauskommt, der als ein ganz neuer Körper aufzufassen ist.

Körper der *fünften* Gruppe konnte ich nicht in Longitudinalschwingungen versetzen. Beim Anstreichen geben diese Körper so nach, dass der ganze Streifen ungleichartig wird. Ob vielleicht das eine oder andere Kautschuckpräparat mehr sich zum Tönen eignet, lasse ich dahingestellt.

Die Körper der *sechsten* Gruppe zeigen eine hohe Schallgeschwindigkeit. Die Streifen wurden in Form von Hobelspähnen verwandt, welche sich in grösserer Länge sehr gut erhalten lassen. Es versteht sich von selbst, dass diese Körper auch als Stäbe hergerichtet und in gewöhnlicher Weise zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit benutzt werden können.

Von Körpern der *siebenten* Gruppe habe ich nur vier untersucht. Sie zeigen grosse Verschiedenheit. Die Pergamentstreifen waren schwierig zu beschaffen. Das von der französischen Firma bezogene Pergament ist echtes Pergament aus einem Kalbfell hergestellt. Die weicheren Ledersorten wie das gewöhnliche Schafleder haben eine sehr geringe Schallgeschwindigkeit und liefern nur dumpfe Töne.

Die Körper der *achten* Gruppe konnte ich unberücksichtigt lassen, da dieselben als Saiten und Stäbe zur Disposition stehen und man auch die Schallgeschwindigkeit in ihnen grösstentheils kennt. Um jedoch bei einem Körper wenigstens die Schallgeschwindigkeit zu erfahren, suchte ich diese im Magnesium zu bestimmen. Ein 3 mm breiter und 0,18 mm dicker Magnesiumstreifen wurde benutzt und lieferte derselbe sehr regelmässige Töne aus denen sich eine Schallgeschwindigkeit von 4602 m ergab.

Ich schliesse hier meine Mittheilungen über meine Untersuchung ab, indem ich darauf aufmerksam mache, dass die betreffenden membranösen Körper noch mit Rücksicht auf Einzelfragen untersucht werden können und habe ich auch bezüglich dieser Einzelfragen verschiedene Versuche angestellt und Resultate erhalten. Es kann erwartet werden, dass die Temperatur von Einfluss ist, ferner dass der Wasserdampf

eine Rolle spielt. Sodann war es interessant einmal zu sehen, wie sich die Tonhöhe und die Schallgeschwindigkeit ändert, wenn man zwei oder drei Streifen nebeneinander zusammen untersucht oder einen breiteren Streifen ein- oder zweimal zusammenfaltet. Es zeigte sich hierbei, dass die Tonhöhe sank und die Schallgeschwindigkeit geringer wurde. Der Grund hierfür ist leicht zu finden. Denn offenbar werden zwei oder drei Streifen nebeneinander sich in ihren Schwingungen etwas hindern, indem zwischen ihnen Reibung stattfindet.

Marburg im Janur 1892.

V. *Ueber integrirende Divisoren und Temperatur;* *von E. Budde.*

(Vorgetragen in der Berliner Physikalischen Gesellschaft am 12. Februar 1892.)

Die absolute Temperatur oder „Temperatur“ schlechthin sei im Folgenden mit ϑ bezeichnet. Ihre Grundeigenschaft liegt bekanntlich in dem von Clausius festgestellten Satze:

„Ist dQ die Wärmemenge, welche bei einem unendlich kleinen umkehrbaren Schritt eines thermodynamischen Processes bei der Temperatur ϑ verbraucht wird, so ist dQ/ϑ ein vollständiges Differential.“

Zeuner hat in seinem Lehrbuch diese Eigenschaft zuerst als die definitorische angesehen und demgemäss die Temperatur als den integrirenden Divisor des Wärmedifferentials definirt. Thatsächlich verwendet man die Temperatur in der Thermodynamik direct oder indirect (mittels der Entropie) immer unter Zugrundelegung des obigen Satzes; selbst diejenigen neueren Autoren, welche eine andere Verbaldefinition aufstellen, als Zeuner, z. B. Lippmann[1]), verwenden dieselbe erst, nachdem sie sie auf die Gestalt des obigen Satzes umgeformt haben. Darin liegt anerkannt, dass der Satz „dQ/ϑ ist integrabel“ die wesentliche, praktisch verwendbare Eigenschaft der Temperatur ausspricht, und damit auch, dass es das naturgemässeste ist, ihn als Definition der Temperatur anzusehen.

Nun ist aber wohl schon von vielen Physikern bemerkt worden, dass die Zeuner'sche Definition dem Wortlaut nach an einer schweren Unzulänglichkeit leidet. Man kann sehr leicht beweisen, dass ein Differentialausdruck, der einen integrirenden Divisor besitzt, deren unendlich viele besitzen muss. Man kann demnach nicht schlechthin von „*dem*“ integrirenden Divisor eines gegebenen Differentials sprechen, vielmehr müsste, wenn die Temperatur als integrirender Divisor definirt werden

1) Lippmann, Journ. de. phys. **3.** p. 53 und 277. 1884.

soll, ein einzelner, bestimmter von den unzähligen Divisoren der Grösse dQ unzweideutig kenntlich gemacht und hierauf zur Definition herangezogen werden.

Dass das möglich ist, und dass der so charakterisirte integrirende Divisor von dQ wirklich derjenige ist, den man bisher, ohne sich über seine Kriterien ganz klar zu sein, als „Temperatur" verwendet hat, soll im Folgenden gezeigt werden. Es handelt sich dabei nach Lage des Problems zunächst um die Frage, ob unter den integrirenden Divisoren eines Differentialausdrucks überhaupt solche vorkommen, die durch eine besondere, jederzeit kenntliche Eigenschaft ausgezeichnet sind. Diese Frage muss durch eine kleine Untersuchung rein mathematischen Inhalts gelöst werden.

Es sei

$$M\,dx + N\,dy$$

ein Differential, in welchem M und N Functionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y sind, und von vornherein werde angenommen, dass $M\,dx + N\,dy$ nicht integrabel sei. Es seien ferner D und D_1 irgend zwei von einander verschiedene integrirende Divisoren unseres Differentials, und ihr Quotient D_1/D werde zur Abkürzung $= K$ gesetzt. Dann muss also sowohl

$$\frac{M\,dx + N\,dy}{D}, \text{ wie } \frac{M\,dx + N\,dy}{D\,K}$$

integrabel sein, d. h. es ist einerseits

(1) $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{D}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{D}\right),$$

und andererseits

(2) $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{K}\frac{M}{D}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{K}\frac{N}{D}\right).$$

Gleichung (2) ausgeführt gibt

$$\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{D}\right) - \frac{M}{D}\frac{1}{K^2}\frac{\partial K}{\partial y} = \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{D}\right) - \frac{N}{D}\frac{1}{K^2}\frac{\partial K}{\partial x},$$

Mit Gleichung (1) findet sich hieraus sehr leicht

$$M\frac{\partial K}{\partial y} = N\frac{\partial K}{\partial x},$$

m. a. W.: Das Differential von K muss die Form haben

(3) $$d\,K = \frac{M\,dx + N\,dy}{G}.$$

wo $1/G$ irgend ein Factor ist. Nun ist K ein Quotient zweier existirenden Functionen, also selbst eine Function, folglich muss dK integrabel sein, d. h. G ist selbst irgend einer von den möglichen integrirenden Divisoren der Grösse $Mdx + Ndy$. Bezeichnen wir also ganz allgemein die möglichen integrirenden Divisoren dieser Grösse mit D_a, setzen abkürzend

$$(4) \qquad \int \frac{M\,dx + N\,dy}{D_a} = F$$

und nennen die Integrale von dieser Form „entropoide Integrale“, so haben wir in Gleichung (3) den Satz „K ist irgend eines der entropoiden Integrale“, oder, da D_1 und D ohne Beschränkung unter den D_a gewählt waren:

„Jeder integrirende Divisor des Differentials $Mdx + Ndy$ entsteht aus jedem anderen durch Multiplication mit irgend einem entropoiden Integral.“

Es ist nun von vornherein vorausgesetzt, dass $Mdx + Ndy$ nicht integrabel sei, also auch, dass weder M noch N von vorne herein verschwinde, d. h., es verschwindet weder der partielle Differentialquotient von F nach x, noch derjenige nach y; m. a. W. „alle entropoiden Integrale enthalten sowohl x wie y.“ Und damit geht der vorstehende Satz über in den folgenden:

Jeder integrirende Divisor von $Mdx + Ndy$ entsteht aus jedem anderen durch Multiplication mit einer Grösse, welche sowohl x wie y enthält.

Hieraus folgt sofort, dass unter den unendlich vielen integrirenden Divisoren unseres Ausdrucks einer ist, der eine ausgezeichnete Eigenschaft hat — wenn er existirt. Gibt es nämlich einen unter ihnen, der eine blosse Function von x ist, so ist dieser der einzige seiner Art, jeder andere enthält neben x auch y; dasselbe gilt, wenn einer vorhanden ist, der bloss y enthält; alle übrigen enthalten gleichzeitig x und y. Auch können die beiden ausgezeichneten Divisoren nicht zugleich existiren: gibt es einen solchen, der blos x enthält, so gibt es keinen, der blos y enthält, und umgekehrt.

Soll ein integrirender Divisor vorhanden sein, der nur x enthält, so wird der Ausdruck $Mdx + Ndy$ offenbar eine Bedingung erfüllen müssen. Diese findet sich sehr einfach, wenn

man Gleichung (1) unter der Voraussetzung ausführt, D sei frei von y. Man erhält

$$\frac{1}{D}\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{D^2}\left(D\frac{\partial N}{\partial x} - N\frac{\partial D}{\partial x}\right)$$

oder

(5) $$\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Hier steht links eine reine Function von x, also muss auch rechts eine solche stehen, d. h. die Bedingung dafür, dass ein integrirender Divisor von $M\,dx + N\,dy$ existire, welcher eine reine Function von x ist, lautet:

(6) $$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{N} = \text{einer reinen Function von } x.$$

Ist dieselbe erfüllt, so liefert Gleichung (5) durch Integration sofort den Werth des fraglichen Divisors; er ist

(7) $$D = \text{const. } e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx}$$

Hiermit sind die mathematischen Grundlagen der Untersuchung gegeben, und wir wenden uns zu ihrem physikalischen Theil. Die Erfahrung lehrt, dass es gewisse Grössen gibt, die einen nahen Zusammenhang mit dem Uebergangsbestreben der Wärme zeigen. Solche Grössen sind z. B. das Volumen eines gegebenen Körpers beim Druck seines eigenen Dampfes oder bei constantem Druck, oder bei einem Druck, der seinerseits durch das Volumen des Körpers regulirt wird, der elektrische Leitungswiderstand eines gegebenen Drahtes, die Dissociationsspannung eines gegebenen Products, u. dergl. mehr. Irgend eine dieser Grössen ändert sich, wenn dem betreffenden Körper Wärme zugeführt wird, und zugleich ändert sich die Fähigkeit des Körpers, Wärme abzugeben. Früher hat man eine der vorerwähnten Grössen, nämlich das Volumen eines gegebenen Gasquantums, besonders bevorzugt, hat das nicht näher definirte Bestreben, Wärme abzugeben, Temperatur genannt, und das Volumen eines gegebenen Gases als Maass der Temperatur angesehen. Nun hat W. Thomson schon im Jahre 1848 darauf aufmerksam gemacht, dass die Temperatur nicht wohl anders als auf Grund des Carnot'schen

Princips definirt werden kann[1]), und neuerdings hat Lippmann in seiner oben citirten Abhandlung scharf hervorgehoben, dass auch das Luftthermometer die Temperatur nicht eigentlich misst, sondern nur die Möglichkeit an die Hand gibt, bestimmte Temperaturpunkte wiederzufinden, dass ferner irgend eine andere der eben erwähnten Grössen, z. B. der Widerstand eines Metalldrahts, den gleichen Dienst mit der gleichen Berechtigung leisten kann. (Das Luftthermometer wird allerdings zum Temperaturmesser, wenn man die Nebenannahme macht, dass die Gase bei der Ausdehnung keine innere Arbeit leisten, aber einerseits kann dies erst dann bewiesen werden, wenn man eine zuverlässige Definition der Temperatur besitzt, andererseits ist die Nebenannahme nur annähernd erfüllt, und wir wissen von vornherein nicht, wie weit die Annäherung geht. Von vornherein bedeutet also das Lufthermometer für die absolute Temperaturmessung nicht mehr, als etwa das Weingeistthermometer oder als ein graduirter Leitungswiderstand.)

Wir werden hiernach das Wort „Temperatur“ vorläufig vermeiden und Folgendes festsetzen: Irgend einen Körper, an welchem eine der oben genannten Eigenschaften sich messen lässt, wähle man willkürlich aus. Zur Bequemlichkeit (nämlich um eine Discussion über zweideutige Bestimmungen überflüssig zu machen) sei der Körper so gewählt, dass die an ihm zu messende Grösse innerhalb derjenigen Grenzen, wo wir ihn benutzen, fortwährend wächst, wenn man ihm fortwährend Wärme zuführt. Diese Eigenschaft besitzt z. B. eine Gasmenge oder ein gegebenes Gewicht von Quecksilber für Volumenmessungen, sowie auch ein Kupferdraht für Widerstandsmessungen. Innerhalb der Grenzen, wo wir es überhaupt benutzen können, wächst das Volumen des Gases oder des Quecksilbers fortwährend, wenn man dem Gase oder dem Quecksilber immer mehr Wärme zuführt, ebenso der Widerstand des Kupferdrahts. Man schaffe eine Vorrichtung, welche jene Volumina oder diesen Widerstand an einer willkürlich graduirten Scala zu messen gestattet, nenne diese Vorrichtung ein Thermometer und die an ihr gemessene Grösse

1) W. Thomson, Phil. Mag. **33.** p. 313. 1848.

die „thermometrische Scalenhöhe"; die Letztere werde mit t bezeichnet. Die Erfahrung liefert dann den Satz:

„Zwei Körper sind unter sich in thermischem Gleichgewicht, wenn jeder von ihnen mit einem Thermometer von gegebener Scalenhöhe im Gleichgewicht ist."

Darauf hin schreiben wir allen Körpern, die mit einem Thermometer von der bestimmten Scalenhöhe t im Gleichgewicht sind, die Scalenhöhe t zu. Darauf hin können wir ferner ein willkürlich ausgewähltes Thermometer als Normalthermometer bezeichnen, andere von gleicher oder verschiedener Construction nach ihm graduiren und die so erhaltenen Scalen als ein für allemal gültig erklären.

Dann zeigt uns die Beobachtung ferner:

„Die Wärme geht von selbst, d. h. ohne dass mechanische, chemische etc. Arbeitsleistungen eingreifen, stets von Körpern grösserer Scalenhöhe zu Körpern geringerer Skalenhöhe."

Die eine Grundannahme der mechanischen Wärmetheorie geht nun dahin, dass dieser Satz erhalten bleibt, wenn in den Uebergang der Wärme zwar Arbeitsprocesse eingreifen, aber nur solche Arbeitsprocesse, die sich gegenseitig genau aufheben. Bezieht man diese Annahme in den vorstehenden Satz ein, so ist er der zweite Grundsatz von Clausius, befreit von der vorläufig noch nicht motivirten Anwendung des Wortes Temperatur.

Mit ihm betrachten wir nun einen thermodynamischen Process an einem System, welches durch zwei Grundvariable bestimmt ist. Als die eine dieser Grundvariablen wählen wir die thermometrische Scalenhöhe t, als die andere das Volumen v; der Process sei ein für allemal umkehrbar gedacht. Das Differential der verbrauchten Wärme für den unendlich kleinen Schritt hat dann die Form

$$(8) \qquad dQ = \frac{\partial Q}{\partial t} dt + \frac{\partial Q}{\partial v} dv.$$

Betrachten wir speciell den Carnot-Clapeyron'schen Kreisprocess, wie ihn Clausius in seiner ersten Abhandlung benutzt hat, so finden sich die allbekannten Ausdrücke:

Die verbrauchte Wärme ist

$$= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)\right] dv\, dt,$$

die übergegangene Wärme ist

$$= \frac{\partial Q}{\partial v} d v \, d t,$$

und das Carnot-Clausius'sche Beweisverfahren sagt: Soll es nicht möglich sein, unbegrenzte Wärmemengen ohne Verbrauch von Arbeit aus Körpern von kleinerer Scalenhöhe in Körper von grösserer Scalenhöhe zu schaffen, so muss der Quotient aus verbrauchter und übergegangener Wärme eine blosse Function der Scalenhöhe sein. Also muss sein

$$(9) \qquad \frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)}{\frac{\partial Q}{\partial v}} = \text{einer reinen Function von } t.$$

Dies ist aber genau die Bedingung (6), wenn t statt x, v statt y, $\partial Q / \partial t$ statt M und $\partial Q / \partial v$ statt N steht. Also ist die vorstehende Grundgleichung (9) von Clausius die Bedingung dafür, dass der Differentialausdruck

$$\frac{\partial Q}{\partial t} d t + \frac{\partial Q}{\partial v} d v$$

einen integrirenden Divisor besitze, *der eine blosse Function von t ist.* Und nach dem Obigen existirt nur ein einziger integrirender Divisor von $d Q$, der diese Eigenschaft hat. Also sind wir nunmehr in der Lage, die vollständige Definition der Temperatur zu geben:

Temperatur heisst derjenige integrirende Divisor des bei umkehrbaren Schritten verbrauchten Wärmedifferentials, welcher eine blosse Function der thermometrischen Scalenhöhe ist.

Zugleich ergibt dann Gleichung (7) die Methode zur Bestimmung der Temperatur; man studire irgend ein System so, dass man in der für dasselbe gültigen Gleichung (8) die Coefficienten $\partial Q / \partial t$ und $\partial Q / \partial v$ innerhalb eines gewissen, mit t_0 beginnenden Intervalls kennt. Dann ist in diesem Intervall

$$(9) \qquad \vartheta = \vartheta_0 \, e^{\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\frac{\partial Q}{\partial v}} \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)\right] d t}$$

ϑ_0 ist der zur Scalenhöhe t_0 gehörige Werth der Temperatur; ϑ_0 ist willkürlich, so lange die Einheit der Temperatur willkürlich ist. Die Gleichung (9) ist nun schon von Lippmann l. c. aufgestellt und hier nur der Vollständigkeit wegen

reproducirt. Der praktische Werth der hier geführten Untersuchung beschränkt sich also auf den Nachweis, dass Lippmann's Temperaturbestimmung durch die Theorie der integrirenden Factoren begründet wird. Bei Lippmann kann übrigens v nicht blos das Volumen, sondern irgend eine von den Grössen bezeichnen, welche als zweite Grundvariable dienen können. Die Zulässigkeit dieser Verallgemeinerung ist leicht nachzuweisen; für den Zweck der Definition war es angebracht, unter v blos das Volumen zu verstehen.

Man sieht nun auch, warum die Zeuner'sche Definition in der Anwendung nie auf Unzuträglichkeiten geführt hat: die Bedingung, dass ϑ eine blosse Function der Scalenhöhe sein muss, ist von den Autoren immer innegehalten worden. Bei Clausius und anderen älteren Schriftstellern ergab sich das schon daraus, dass die Scalenhöhe als eine Art von angenäherter Temperatur behandelt wurde, bei den meisten späteren geschieht es stillschweigend, bei Lippmann ausdrücklich, indem er den Satz „ϑ ist eine blosse Function von t" in seine Beweisführung aufnimmt.

VI. *Ueber die galvanische Polarisation an kleinen Electroden; von K. R. Koch und A. Wüllner.*

(Schluss.)

9. Die in den vorigen Paragraphen mitgetheilten Beziehungen zwischen der Polarisation und der Stromstärke bestehen nur bis zu einer gewissen, von der Länge der Spitzen und der Concentration der Lösung abhängigen Stromstärke. Versucht man durch Vergrösserung der electromotorischen Kraft den Strom über diese Grenze hinaus zu verstärken, so tritt plötzlich eine sehr starke Zunahme der Polarisation und dem entsprechend eine starke Abnahme des Stromes ein.[1])

Diese starke Zunahme der Polarisation tritt bei Anwendung eines Paares nahezu gleicher Spitzen in der Regel, bei Spitzen erheblich verschiedener Länge immer an der kürzeren Spitze ein, einerlei ob diese kürzere Spitze Anode oder Kathode ist.

Mit diesem Wachsen der Polarisation an der einen Spitze ist dann, entsprechend der Abnahme der Stromstärke, stets eine starke Abnahme der Polarisation an der anderen Electrode verbunden. Die Erscheinung tritt ebenso ein, wenn man eine Spitze als Anode oder Kathode einer Platte gegenüberstellt.

Ist die Stromstärke, bei welcher der regelmässige normale Durchgang des Stromes aufhört, wir wollen sie den „Grenzstrom" nennen, gerade erreicht oder eben überschritten, so tritt in der Regel die starke Zunahme der Polarisation und die starke Abnahme der Stromstärke, wir wollen die Erscheinung den „Stromumschlag" nennen, zunächst noch nicht dauernd ein. Während des Stromdurchganges tritt plötzlich der Umschlag

1) Während wir mit diesen Untersuchungen beschäftigt waren, erhielten wir Kenntniss von einer Mittheilung des Hrn. Richarz in der Sitzung der niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde vom 7. Juli 1890, in welcher die Erscheinung des Stromumschlages und einige der von uns gemachten Beobachtungen bereits beschrieben sind.

auf, die Nadel des Galvanometers geht plötzlich zurück, die des Electrometers, wenn dasselbe an der Electrode liegt, an welcher die Polarisation wächst, geht plötzlich heraus; ebenso plötzlich entwickelt sich nach längerer oder kürzerer Zeit der normale Strom wieder und die Polarisation nimmt an beiden Electroden den durch die früheren Beziehungen gegebenen Werth an. Sind die Electroden des Spitzenpaares von gleicher Länge, so verläuft die Erscheinung in der Nähe des Grenzstromes auch mehrfach so, dass, wenn die Polarisation an der Electrode, die zunächst den Umschlag bewirkt hat, abnimmt, sie an der anderen Electrode über den normalen Werth wächst, sodass nun sofort der Umschlag von der anderen Electrode bewirkt wird. Dieser Wechsel trat zuweilen besonders bei recht kurzen Spitzen so rasch ein, dass jede Messung ausgeschlossen war. Weder die Nadel des aperiodisch gedämpften Galvanometers, noch jene des Electrometers kam zur Ruhe.

Fast immer erhielt man constante Verhältnisse, wenn man einer kürzeren Spitze eine erheblich längere oder eine Platte gegenüberstellte, nur in einem Falle, 0,5 mm Spitze in 1 procent. Lösung, wurde auch dann der Strom nicht constant, als die Wasserstoffpolarisation die Ursache des Stromumschlages war.

An welcher Electrode die den Stromumschlag bedingende hohe Polarisation eintrat, liess sich sofort an der Gasentwickelung erkennen. Während bei dem normalen Durchgange des Stromes an beiden Electroden sich das Gas in Form eines stetigen Stromes entwickelt, wie Fig. 15 Tafel VI für die Kathode, Fig. 16 für die Anode nach einer Momentphotographie zeigen, entwickelt sich das Gas nach dem Umschlage an der Electrode mit hoher Polarisation in einzelnen Blasen. Die Figuren 17 und 18 zeigen ebenfalls nach Momentphotographien diese Entwickelung, Fig. 17 an der Anode, Fig. 18 an der Kathode. Die Photographien wurden erhalten, indem man die Electroden in ein Projectionsgefäss mit planparallelen Platten einsetzte, mit electrischem Lichte beleuchtete und die Erscheinung auf einen weissen Schirm projecirte. Die Projection wurde photographirt. Beide Abbildungen zeigen, dass sich das Gas zunächst unten, dort wo der Draht aus dem Glase hervortritt, entwickelt, sich an der Spitze zu einer grösseren Blase ansammelt und sich dann losreisst.

Die Blasen folgen sich je nach der Stärke des übriggebliebenen Stromes mehr oder weniger schnell; zuweilen schien es uns, als wenn an der Anode, wenn diese den Umschlag bewirkte, die Zahl der entwickelten Blasen nahezu doppelt so gross sei als an der den Umschlag bewirkenden Kathode. Wenn auch, wie sich zeigen wird, der übrigbleibende Strom, wir wollen ihn den „Reststrom" nennen, wenn der Umschlag an der gleichen Spitze durch die Sauerstoffpolarisation bewirkt wird, stärker zu sein scheint als der durch Wasserstoffpolarisation bewirkte Reststrom, so ist diese grössere Blasenzahl an der Anode doch nicht die Regel, denn wir haben unter den gleichen Verhältnissen später auch an der Kathode díe grössere Zahl von Blasen gefunden. Eine Messung und Vergleichung der Gasmengen, indem man etwa eine und dieselbe Spitze einmal als Kathode, einmal als Anode einer Platte gegenüberstellt, ist leider nicht möglich, da man eine derartige Messung nur vornehmen kann unter Anwendung einer electromotorischen Kraft, die diejenige des Grenzstromes weit übersteigt; man erhält sonst, wie schon erwähnt, die wechselnde Erscheinung, Umschlag und Rückkehr zum normalen Strom. Bei solchen electromotorischen Kräften wird indess, wie wir später näher besprechen werden, der Draht als Anode bald zerstört.

Das Entwickeln und Abreissen der Gasblasen ist stets mit einer Schwankung des Stromes verbunden, der Strom nimmt, während sich die Blase bildet, bis zu dem Momente des Abreissens zu, ist die Blase abgerissen, so springt der Strom auf den früheren kleinen Werth zurück. Mit der Zunahme des Stromes geht parallel eine kleine Abnahme der Polarisation der Electrode. Um eine Andeutung über die Grösse der Stromschwankung zu geben, sei erwähnt, dass, als der Strom an einer 3 mm langen Electrode beobachtet wurde und der Reststrom etwa 0,1 Amp. war, die Schwankung etwa 0,02 Amp. betrug.

Der Stromumschlag gab sich auch in dem im Nebenschluss eingeschalteten Telephon zu erkennen. Ein in dieser Weise eingeschaltetes Telephon gibt stets ein sausendes Geräusch, wenn sich in dem Strome eine Zersetzungszelle befindet; dieses Rauschen tritt bei kleineren Spitzen stärker auf als bei längeren, ja bei unseren kürzesten Spitzen ging das Rauschen sogar in

ein Rasseln über. Es ist gerade, als wenn das Entwickeln der Gasblasen Stromschwankungen zur Folge hätte, die sich in dieser Weise hörbar machen; am Galvanometer lassen sich dieselben allerdings nicht erkennen.

Das Tönen des Telephons wird im allgemeinen, besonders bei den längeren Spitzen stärker nach dem Umschlag, ohne dass aber, wie auch Hr. Wiener zu constatiren die Freundlichkeit hatte, der Character des Geräusches sich ändert. Die Stromschwankung, welche bei dem Entwickeln und Abreissen der Blase von der Electrode eintritt, macht sich in dem Telephon sehr deutlich durch eine Zunahme des Geräusches erkennbar, welche Zunahme mit einem scharfen Tone, einem starken „Klack" abbricht.

10. Im nachfolgenden geben wir die Stromstärke und electromotorischen Kräfte, bei welchen der Umschlag in den verschieden concentrirten Lösungen an den Spitzen verschiedener Länge eintrat, sowie die Beobachtungen über den Reststrom.

I.

1 procent. Lösung.

In dieser Lösung konnte nur bei den kürzesten Spitzen der Strom soweit gesteigert werden, dass der Umschlag eintrat, bei den längeren reichte unsere Batterie von 49 Groves nicht aus. Der Grenzstrom war 0,07 bis 0,08 Amp., die Potentialdifferenz D an den Electroden etwa 80 Volt; die in den betreffenden Tabellen 3 und 4 angegebenen stärksten Ströme sind die Grenzströme, es wurde schon früher auf den dann eintretenden Umschlag hingewiesen. Bei der Schaltung der Spitzen $A \rightarrow B$, bei welcher der Umschlag zeitweise auf kurze Zeit bei dem Grenzstrome eingetreten war, wurde der Stromdurchgang ein ganz schwankender, als die Potentialdifferenz der Spitzen auf etwa 90 Volt gesteigert wurde. Zunächst stieg die Sauerstoffpolarisation auf etwa 86 Volt und ging dann herunter auf 22 Volt. Ist die Sauerstoffpolarisation gross, so ist die Wasserstoffpolarisation klein, nimmt erstere ab auf 22 Volt, so wächst letztere auf 45 Volt. Nach kurzer Zeit ging die Wasserstoffpolarisation erheblich weiter, dann aber schnell auf einen sehr kleinen Werth zurück, während die

Sauerstoffpolarisation auf ihren hohen Werth stieg. Dieses Spiel wiederholte sich längere Zeit ohne Eintreten eines constanten Zustandes.

Das Verhalten wurde constanter als zur Kathode eine 5 mm lange Spitze genommen wurde; in der Zeit zwischen dem Entwickeln der Blasen an der Anode war

$$p_a = 89{,}15 \text{ (Volt)}, \; p_k = 1{,}05 \text{ (Volt)}, \; D = 90{,}6 \text{ (Volt)},$$
$$i = 0{,}0014 \text{ (Amp.)}.$$

Bei dem Entwickeln der Sauerstoffblase stieg der Strom bis 0,0027.

Als an der Stelle der Sauerstoffspitzen A eine 5 mm Spitze genommen und die kurze Spitze B durch Wasserstoff polarisirt wurde, blieb die Erscheinung stets schwankend, die Wasserstoffpolarisation nahm bis zu einem hohen Werthe zu und dann wieder ab, sodass keine Messung möglich war, auch wenn die Spitze A durch Wasserstoff polarisirt war, gegen eine längere Spitze als Anode trat kein constanter Zustand ein.

Als die Spitze B zur Anode gegen eine 5 mm Spitze als Kathode verwandt wurde, erhielten wir constant

$$p_a = 89{,}62 \text{ (Volt)}, \; p_k = 1{,}66 \text{ (Volt)}, \; D = 92{,}4 \text{ (Volt)},$$
$$i = 0{,}004 \text{ (Amp.)}$$

Obwohl die Messungen bei dem Schwanken des Stromes wenig Sicherheit für i liefern, ergibt sich der Widerstand W aus $D - p$ und i doch den früher gefundenen Werthen entsprechend zu 290 bez. 280 Ohm.

II.

10procent. Lösung.

Spitzen 0,5 mm lang. Grenzstrom: $p_a = 9{,}45$ (Volt), $p_k = 7{,}52$ (Volt), $D = 21{,}97$ (Volt), $i = 0{,}1499$ (Amp.). Der Reststrom wurde nicht weiter verfolgt.

Spitzen 3 mm lang. Grenzstrom: $p_a = 8{,}38$ (Volt), $p_k = 9{,}40$ (Volt), $D = 40$ (Volt), $i = 0{,}741$ (Amp.), D konnte nicht mehr beobachtet werden, der Werth 40 ergibt sich aus i und $W = 30$ Ohm zu 40,01 Volt.

Die Schaltung war hier $A \to B$, der Stromumschlag erfolgte durch Wachsen der Wasserstoffpolarisation an der Spitze B. Es war nach dem Umschlag $p_a = 2{,}94$ (Volt), $p_k = 56{,}59$ (Volt),

$D = 62{,}3$ (Volt), $i = 0{,}0928$ (Amp.), $W = 29{,}95$ Ohm. In der Richtung $B \rightarrow A$ war bei $i = 0{,}7549$ (Amp.) und $D = 40{,}86$ (Volt) der Grenzstrom noch nicht erreicht.

Es wurde jetzt als Sauerstoffelectrode eine Platte, zur Kathode die Spitze B, genommen und vom Grenzstrom aus durch Vermehrung der Elementenzahl die electromotorische Kraft vergrössert. Es ergab sich

p_a (Volt)	p_k (Volt)	p (Volt)	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)
1,49	57,40	58,89	61,26	0,0913	26,0
1,51	58,51	60,02	62,95	0,0917	31,9
1,50	64,27	65,77	68,23	0,0905	27,2
1,72	80,30	82,02	84,85	0,0973	29,1

Es wurde darauf die Spitze A als Anode gegen eine Platte als Kathode verwandt. Der Umschlag war mit Anwendung von 44 Elementen eingetreten und kurze Zeit war $p_a = 56{,}95$, $p_k = 1{,}13$ und $i = 0{,}1821$. Ehe die Messung der Potentialdifferenz D ausgeführt werden konnte, stieg plötzlich die Sauerstoffpolarisation auf 70, und die nachträgliche Untersuchung der Spitze ergab eine Verkürzung derselben auf 1 mm. Auf diese Veränderung der Anodenspitzen kommen wir später. An der so verkürzten Spitze erhielten wir folgende Werthe:

p_a (Volt)	p_k (Volt)	p (Volt)	D (Volt)	i (Amp.)
70,52	0,996	71,52	71,90	0,0067
78,18	0,990	79,17	79,36	0,0049
86,24	1,020	87,26	87,34	0,0043

Die Berechnung von W ist bei der Kleinheit der Differenz $D - p$ zu unsicher.

Spitzen 5 mm lang. Bei Anwendung der beiden Spitzen rief der stärkste von uns erreichbare Strom 1,14 den Umschlag noch nicht hervor.

Als eine 5 mm Spitze zur Anode eine Platte zur Kathode genommen wurde, trat der Umschlag ein, als der Strom eine Zeit lang 1,47 gewesen war. D war nicht mehr für den Grenzstrom zu messen. Es war dann nach dem Umschlage

$$p_a = 66{,}70 \text{ (Volt)},\ p_k = 1{,}17 \text{ (Volt)},\ p = 67{,}87 \text{ (Volt)},$$
$$D = 80{,}72 \text{ (Volt)},\ i = 0{,}312 \text{ (Amp.)}.$$

Gleich nach der Messung zerstäubte die Spitze und brach unmittelbar über der Einschmelzstelle ab. Mit einer anderen

Spitze ging es ähnlich, sie wurde glühend und spaltete ihrer ganzen Länge nach, als der Strom kurze Zeit 1,246 (Amp.) gewesen war. Der Versuch wurde sofort unterbrochen, um die Spitze in diesem Zustande zu erhalten. Die Anwendung einer Anodenplatte gegen die 5 mm Spitze als Kathode ergab folgende Beobachtungen:

p_a (Volt)	p_k (Volt)	p (Volt)	D (Volt)	i (Amp.)	W (Ohm)	
2,06	10,88	12,94	51,37	1,2670	30,3	Grenzstrom
1,51	55,24	56,75	62,66	0,1965	30,1	Stromumschlag und Reststrom
1,50	57,14	58,64	64,45	0,1920	30,3	
1,49	61,96	63,45	70,42	0,2011	34,7	
1,50	69,48	70,98	77,10	0,1967	31,1	
1,50	76,05	77,55	84,13	0,1965	33,5	

Die Beobachtungen an den Spitzen von 3 mm und 5 mm Länge zeigen deutlich, dass nach Eintritt des Stromumschlages der Reststrom mit zunehmender electromotorischer Kraft nicht mehr wächst, sondern constant bleibt, dass bei der Zunahme der Potentialdifferenz der Electroden die ganze Zunahme nur als Vermehrung der Polarisation der Electrode auftritt, durch welche der Stromumschlag eingetreten ist.

III.

20 procent. Lösung.

Spitzen 0,5 mm lang. Grenzstrom: 0,1798 (Amp.), $D = 16{,}92$ (Volt). Anodenplatte gegen Kathodenspitze gibt als Reststrom etwa 0,017 (Amp.) zu genauerer Messung waren die Verhältnisse nicht hinreichend constant; es ist

$p_a = 1{,}19$ (Volt), $p_k = 20{,}28$ (Volt), $D = 21{,}82$ (Volt).

Spitzen 3 mm lang. Grenzstrom: 0;7026 (Amp.). $D = 26{,}2$ (Volt), Anodenplatte gegen Kathodenspitze gab:

$p_a = 1{,}44$ (Volt), $p_k = 47{,}30$ (Volt), $p = 48{,}74$ (Volt), $D = 50{,}59$ (Volt), $i = 0{,}0890$ (Amp.), $W = 20{,}8$ (Ohm),

$p_a = 1{,}46$ (Volt), $p_k = 52{,}34$ (Volt), $p = 53{,}80$ (Volt), $D = 55{,}69$ (Volt), $i = 0{,}0902$ (Amp.), $W = 21{,}0$ (Ohm).

Anodenspitze gegen Kathodenplatte lässt keine Messung zu, da die Anodenspitze sich sehr schnell verkleinert, p_a wächst zusehends von 44,77 (Volt) auf 46,81 (Volt), während der Reststrom von 0,1725 auf 0,1052 (Amp.) abnimmt. Die sofort herausgenommene Spitze zeigt eine Länge von 0,9 mm.

Spitzen 5 mm lang. Der Grenzstrom ist ebenfalls nur durch Anwendung einer Plattenelectrode als Anode zu erhalten. derselbe liegt zischen 1,4 und 1,5 (Amp.). Der Reststrom ist, als zur Anode eine Platte genommen wurde, 0,1634 (Amp.), es war

$$p_a = 1{,}53 \text{ (Volt)}, \ p_k = 60{,}8 \text{ (Volt)}, \ D = 64{,}83 \text{ (Volt)}, \ W = 24{,}5 \text{ (Ohm)}.$$

Die Spitze als Anode verwandt gestattete die Durchführung der Messung nicht, es zeigte sich kurze Zeit ein Reststrom 0,1488 (Amp.) und $p_a = 68{,}34$ (Volt), $p_k = 1{,}295$ (Volt); die Spitze wurde glühend und brach 0,5 mm über dem Glase ab.

IV.

30,4 proc. Lösung.

Spitzen 0.5 mm lang. Grenzstrom als die längere der beiden Spitzen nämlich *B* zur Anode genommen war, 0,2010 Amp., die Potentialdifferenz der Electroden war $D = 13{,}86$ Volt; ein dauernder Reststrom trat erst ein, als die Potentialdifferenz der Spitzen auf über 30 Volt gesteigert wurde, es war:

$$p_a = 2{,}96 \text{ Volt}; \ p_k = 28{,}11 \text{ Volt}; \ p = 31{,}07 \text{ Volt}. \ D = 31{,}64 \text{ Volt}. \ i = 0{,}0272 \text{ Amp}. \ W = 20{,}9 \text{ (Ohm)}.$$

Bald darauf trat ein Wechsel der Polarisation, nämlich starke Sauerstoffpolarisation, geringe Wasserstoffpolarisation ein.

$$p_a = 30{,}57 \text{ Volt}; \ p_k = 1{,}69 \text{ Volt}; \ p = 32{,}26 \text{ Volt}; \ D = 32{,}38 \text{ Volt}; \ i = 0{,}00809 \text{ Amp}.$$

Spitzen 3 mm lang. Anode Platte, Kathode Spitze, Grenzstrom 0,8778 Amp.

$$p_a = 1{,}74 \text{ Volt}; \ p_k = 6{,}59 \text{ Volt}. \ D = 24{,}61 \text{ Volt}.$$

Der Restrom wurde 0,08914 Amp.

$$p_a = 1{,}42 \text{ Volt}; \ p_k = 35{,}7 \text{ Volt}. \ D = 38{,}72 \text{ Volt}. \ W = 18{,}3 \text{ (Ohm)}.$$

Als die Spitze zur Anode genommen wurde, liess sich der Versuch nicht beenden, da sich die Spitze sehr schnell verkürzte. Bei den Spitzen von 5 mm Länge, haben wir in dieser Lösung den Umschlag nicht verfolgt, wir erhielten nur einen Umschlag als die Spitze als Anode gegen eine Platte als Kathode angewandt wurde; die Sauerstoffpolarisation war 73,6 Volt, indess wissen wir nicht, ob die Spitze noch unverändert war.

V.

42 proc. Lösung.

Spitzen 0,5 mm lang. Als Grenzstrom ergab sich im Mittel 0,12 Amp. aus 2 Beobachtungen, bei denen jede der Spitzen einmal als Anode einmal als Kathode benützt wurde, die Potentialdifferenz der Spitzen war 11,7 Volt im Mittel. Als dann eine Platte als Anode gegen jede der Spitzen als Kathode verwandt wurde, ergab sich:

$$p_a = 1{,}28 \text{ Volt}; \; p_k = 24{,}31 \text{ Volt}; \; D = 25{,}62 \text{ Volt};$$
$$i = 0{,}0051 - 0{,}0062 \text{ Amp.}$$

$p_a = 1{,}27$ Volt; $p_k = 25{,}38$ Volt; $D = 26{,}42$ Volt; $i = 0{,}0084$ Amp.

Die Spitzen als Anoden gegenüber der Platte als Kathode

p_a	p_k	D	i
24,55 Volt	1,02 Volt	25,57 Volt	0,0035 Amp.
25,91 "	1,04 "	26,95 "	0,0048 "

Spitzen 3 mm lang. Grenzstrom im Mittel 0,82 Amp. bei einer Potentialdifferenz von im Mittel 29,4 Volt zwischen den Spitzen. Für den Reststrom ergab sich:

p_a	p_k	p	D	i	W	
3,11 Volt	58,61 Volt	61,73 Volt	63,46 Volt	0,0905 Amp.	19,1 Ohm	Spitze geg. Spitze.
1,50 "	57,68 "	59,19 "	60,86 "	0,1006 "	16,7 "	Platte → Sp. *A*.
1,49 "	59,66 "	61,15 "	63,23 "	0,1006 "	20,8 "	Platte → Sp. *B*.
1,54 "	55,74 "	57,28 "	59,19 "	0,0870 "	22,0 "	Platte → Sp. *A*.

Eine Spitze als Anode gegen eine Platte als Kathode, wurde während des Versuches zerstäubt, die beobachtete Polarisation von 71 Volt an der Anode bezieht sich desshalb ohne Zweifel auf eine kürzere Spitze.

Spitzen 5 mm lang. Zwischen den Spitzen ergab sich als Grenzstrom 1,45 Amp. bei einer Potentialdifferenz von 41 Volt. Mit Platte als Anode gegen die Spitzen als Kathoden ergab sich:

p_a	p_k	p	D	i	W	
1,61 Volt	67,11 Volt	68,72 Volt	72,15 Volt	0,1805 Amp.	19,0 Ohm	Platte → Sp. *B*.
1,55 "	63,93 "	65,48 "	70,11 "	0,2013 "	23,0 "	Platte → Sp. *A*.

Auch hier gab die Verwendung der Spitze *B* als Anode sofort zur Zerstäubung der Spitze Anlass, die beobachtete Polarisation $p_a = 76{,}37$ Volt, und der Reststrom $i = 0{,}0901$ Amp. beziehen sich ohne Zweifel auf eine schon verkürzte Spitze.

In der folgenden kleinen Tabelle sind hiernach für die verschiedenen Spitzen und Lösungen die Grenzströme unter G die Restströme unter R zusammengestellt. Ausser bei den 0,5 mm Spitzen, für 1 proc. Lösung sind die Restströme jene, welche bei grosser Wasserstoffpolarisation erhalten wurden.

	Spitzen 0,5 m		Spitzen 3 mm		Spitzen 5 mm	
	G	R in Amp.	G	R in Amp.	G	R in Amp.
1 proc. Lösung	0,07 – 0,08	0,0027	—	—	—	—
10 „ „	0,15	—	0,741	0,0927	1,276	0,1966
20 „ „	0,18	0,017	0,703	0,0896	1,450	0,1634
30 „ „	0,20	0,027	0,877	0,0891	—	—
42 „ „	0,12	0,008	0,820	0,0930	1,460	0,1900

11. Zur genaueren Kenntniss der hier besprochenen Erscheinung ist zunächst noch die Frage zu beantworten, ob der Stromumschlag bei gegebener Spitze und gegebener Lösung eintritt, wenn der Strom eine gewisse Stärke, oder wenn die Potentialdifferenz eine gewisse Höhe hat. Zur Entscheidung dieser Frage wurden die Electrodenzellen durch ein doppeltes Rohr verbunden, deren eines durch einen Hahn verschlossen werden konnte. War die Stromstärke das den Umschlag bedingende, so musste, wenn bei geöffnetem Hahne der Grenzstrom gerade erreicht war, ein vorhandener Umschlag rückgängig werden, wenn der Hahn zwischen den Electrodenzellen geschlossen wurde, da infolge des erheblich grösseren Widerstandes der Strom geschwächt wurde, die Potentialdifferenz zwischen den Spitzen dagegen zunahm. War dagegen die Potentialdifferenz das massgebende, so musste der bei geschlossenen Hahnen gerade erreichte Umschlag bei Oeffnung der Hahnen, rückgängig werden, da infolge der Verminderung des Widerstandes zwischen den Zellen die Potentialdifferenz abnahm und der Strom zunahm. Der Versuch entschied in ersterem Sinne.

Es wurde eine 20 proc. Lösung und 0,5 mm lange Spitzen benutzt. Als der Hahn des verschliessbaren Rohres geöffnet war, trat der Umschlag nach kurzer Dauer des Stromschlusses bei einem Strom von 0,189 Amp. ein, die Potentialdifferenz betrug 14 Volt. Als der Hahn geschlossen wurde, ging der Strom auf 0,162 Amp. zurück, während die Potentialdifferenz auf 17 Volt stieg, und der Strom schlug nicht um. Nachdem 5 Minuten gewartet war, wurde der Hahn wieder geöffnet, der Strom stieg wieder auf 0,189 Amp. und schlug nach kurzer

Zeit um. Während der Strom umgeschlagen war, wurde der Hahn geschlossen, es stellte sich sehr bald der normale Strom 0,162 Amp. wieder her, trotzdem in dem umgeschlagenen Strom die Potentialdifferenz 34 Volt gewesen war. Der Versuch wurde mehrfach in derselben Weise und immer mit dem gleichen Erfolge wiederholt.

12. An den Drahtelectroden, an denen die Polarisation in dem Maasse wächst, dass der Stromumschlag eintritt, zeigt sich noch eine Reihe merkwürdiger Erscheinungen, welche zum Theil auch wohl schon von andern beschrieben sind.[1] Die Erscheinungen sind wesentlich verschieden an der Kathode und an der Anode.

An der Kathode zeigen sich in der Regel sofort, sowie die Polarisation die Höhe erreicht hat, dass der Umschlag eintritt, kleine Fünkchen und zwar soweit es sich beurtheilen liess, stets dort wo der Draht aus dem Glase hervortritt. Wird die electromotorische Kraft verstärkt, so wird die Lichterscheinung intensiver und ausgedehnter, sodass die Electrode in ihrem unteren, der Einschmelzstelle näheren Theile von einem bläulichen Lichte umgeben erscheint, das aus schnell intermittirenden einzelnen Funken besteht.

Die Lichterscheinung umfasst bei den 3 mm und 5 mm Drähten, bei den kleineren liess es sich nicht so genau verfolgen, etwa die untern zwei Drittel der Electroden, an denen ein fortwährendes Hin- und Herwandern des Funkens stattfindet. Der Ausgangspunkt des Funkens scheint am unteren Ende des Drahtes zu sein, dort ist das Licht am hellsten. Die am oberen Ende des Drahtes sitzende Gasblase scheint die weitere Verbreitung des Funkens zu hindern, denn in dem Momente, in welchem die Gasblase abreisst, verbreitet sich die Lichterscheinung auch über das obere Drittel der Electrode.

Projecirt man vermittels electrischen Lichtes die Electrode auf einen weissen Schirm, so sieht man in der Flüssigkeit neben dem Theile des Drahtes an welchem der Funke

1) Die Litteratur darüber findet sich in **Wiedemanns** Electricitätslehre. 3. Aufl. 4 (2) §§ 1127 u. ff. Man sehe auch **Richarz** Sitzungsberichte der niederrheinischen Gesellschaft für Natur und Heilkunde, Sitzung vom 7. Juli 1890.

hin und her spielt, eine starke Bewegung der Flüssigkeit verbunden mit einer Schlierenbildung.

Erhöht man die Potentialdifferenz zwischen den Electroden weiter und weiter, wobei, wie wir sahen, keine Verstärkung des Reststromes eintritt, so tritt zunächst ein schwaches Rothglühen der Electrode ein, das allmählich heller und heller wird.

Eine Veränderung der Electrode selbst durch diese Erscheinungen liess sich bei der Untersuchung des Drahtes nach Unterbrechung des Stromes mit dem Mikroskope nicht erkennen, sie behielt ihre frühere Länge und Gestalt.

Anders verhält sich die Anode, wenn sie Ursache des Stromumschlages ist. Die längeren Electroden — an den 0,5 mm Electroden, trat die Erscheinung nicht in dem Maasse hervor — werden glühend, sowie die Potentialdifferenz der Electroden nur wenig die beim Grenzstrome herrschende überschreitet, das Glühen wird mit wachsender Potentialdifferenz stärker. Die entweichenden Gasblasen, man konnte das an den kürzesten Spitzen, bei welchen wie erwähnt das Glühen nicht merkbar auftrat, längere Zeit beobachten, geben bei dem Zerplatzen an der Oberfläche der Flüssigkeit einen weissen Rauch ab, der sich schwer über die Oberfläche der Flüssigkeit hinwälzt, aber rasch verschwindet. Es ist uns bisher nicht gelungen, Gas in hinreichender Menge aufzusammeln, um die Natur dieses weissen Rauches zu erkennen.

Während dieses Glühens der Electrode wird dieselbe allmählich zerstört. Wie dieser Vorgang in der Regel verläuft zeigen Fig. 19 und 20, welche durch Photographie erhaltene Abbildungen einer 5 mm langen Electrode geben, die genommen wurden, als der Strom kürzere Zeit Fig. 19, oder etwas länger Fig. 20 gewirkt hatte. Es sind dies Abbildungen der auf einen weissen Schirme projecirten Electrode.

Die untere grössere Hälfte der Electrode, jene Partie, neben welcher auch hier sich die lebhafteste Bewegung der Flüssigkeit und Schlierenbildung zeigt, wird dünner; das Dünnerwerden schreitet in einiger Entfernung von der Einschmelzstelle, bei Fig. 20 etwa in der Mitte, rascher vor und es erfolgt an dieser Stelle das Abbrechen. Als nach der Aufnahme von Fig. 20 der Strom wieder geschlossen wurde, brach der Draht sofort an dieser Stelle ab, es blieb nur der stark abgefressene

untere Theil stehen. In anderen Fällen trat das stärkere Abfressen des Drahtes noch an einer zweiten dem Glase näheren Stelle ein, sodass der Draht eine doppelte Einschnürung erhielt, wobei dann auch das Abbrechen des Drahtes an dieser unteren Stelle eintrat. In einzelnen Fällen wurde der obere Theil der Electrode wohl durch die sich rasch entwickelnden und losreissenden Gasblasen heftig herumgewirbelt, ehe er abbrach.

Eine der interessantesten Formen der Zerstörung der Anode zeigt Fig. 21. Nachdem eine kurze Zeit der Stromumschlag gedauert hatte, spaltete sich plötzlich die Electrode der ganzen Länge nach, der eine Theil war dabei korkzieherartig gewunden. An beiden Theilen, wie auch an andern Electroden, welche nur angefressen waren, zeigen sich warzenförmige oder kraterähnliche Gebilde, welche mit der Lupe auf der Originalphotographie zu Fig. 21 noch deutlich zu erkennen sind.

Wenn wir einen feinen Draht von oben her in die Flüssigkeit senkten, zu welchem Zwecke wir ein etwa 1 cm langes Stück eines Drahtes von 0,1 mm Durchmesser an eine Platinplatte angeschweisst hatten, und dem eingetauchten Stück eine solche Länge gaben, dass der Stromumschlag eintrat, so kam der Draht soweit zum Glühen, als er in die Flüssigkeit eintauchte und wurde als Anode bald in dieser Länge abgefresssen; ausserhalb der Flüssigkeit trat niemals ein Glühen des Drahtes ein. Die ganze Erscheinung zeigt sich somit nur dort, wo der Strom aus dem Drahte in die Flüssigkeit übertritt, der Strom reicht nicht aus, um den Draht durch Joule'sche Wärme zum Glühen zu bringen.

12. Fassen wir die Erscheinung des Stromumschlages zusammen, so ergibt sich, dass bei einer gewissen, wesentlich von der Spitzenlänge, einigermassen auch von der Leitungsfähigkeit der Lösung abhängigen Stromstärke, die Polarisation an einer der beiden Spitzen, oder nehmen wir die Versuchsanordnung als die einfachere, dass wir einer Spitze eine Platte gegenüberstellen, die Polarisation an der Spitze sowohl, wenn sie als Anode wie wenn sie als Kathode genommen wird, in so hohem Maasse wächst, dass nur mehr ein schwacher Strom durch die Zersetzungszelle geht. Der Grenzstrom, bei welchem der Umschlag beginnt, scheint nicht wesentlich verschieden zu

sein, sei es, dass die Spitze als Anode oder als Kathode genommen wird. Der durch Wachsen der Wasserstoffpolarisation bewirkte Reststrom hängt für eine gegebene Spitze nicht ab von der äusseren electromotorischen Kraft, er blieb z. B. ungeändert als bei einer 5 mm langen Spitze in einer 10 proc. Schwefelsäurelösung die Potentialdifferenz zwischen den Electroden von 62 Volt auf 84 Volt stieg; derselbe ist unabhängig ferner von der Concentration, also der Leitungsfähigkeit der Lösung, oder wenigstens nur in sehr geringem Maasse davon abhängig, wie die Zusammenstellung am Schluss von § 10 erkennen lässt. Derselbe hängt dagegen wesentlich von der Länge der Spitzen ab, sodass er mit wachsender Spitzenlänge beträchtlich zunimmt; für die 3 mm langen Spitzen ergibt sich im Mittel aus der Zusammenstellung des § 10 der Werth 0,0911 Amp. für die 5 mm Spitze 0,1833 Amp. fast genau das Doppelte. Für die 0,5 mm Spitze lässt sich der Reststrom nicht mit Sicherheit angeben, da durch das Abreissen der Gasblasen von der Spitze zu grosse Stromschwankungen eintreten.

Eine Beobachtung des Reststromes, wenn die Sauerstoffpolarisation die Ursache des Stromumschlages ist, für eine bestimmte Spitzenlänge, lässt sich nicht durchführen, da die Drahtelectroden als Anoden zerstört, zerstäubt werden; die beiden vor der merkbaren Zerstäubung in einer 10 proc. Lösung mit den 3 mm und 5 mm langen Spitzen gemachten Beobachtungen zeigen, dass dort der Reststrom erheblich stärker war, als bei der Wasserstoffpolarisation, bei der 3 mm langen Spitze hatte der Strom die doppelte Stärke. Die Drahtanode glühte stark und wurde rasch zerstört.

Die Entwickelung des Gases an der Kathode wie an der Anode findet in der beschriebenen Weise in einzelnen Blasen statt, das Abreissen der Blase bewirkt eine kurz dauernde Verstärkung des Stromes.

Dem Verständniss dieser Erscheinungen bietet ihre grosse Complikation eine grosse Schwierigkeit und wir gestehen offen, dass es uns noch nicht möglich ist den inneren Zusammenhang derselben zu erkennen. Die nächstliegende und scheinbar einfachste Deutung der Erscheinung würde die sein, dass sich durch den Grenzstrom eine Gasschicht oder Dampfschicht um die betreffende Electrode legt, welche einen sehr starken

Uebergangswiderstand bewirkt. Diese Annahme macht auch Hr. Richarz in der vorher erwähnten Mittheilung, indem er die Erscheinung mit dem Leidenfrost'schen Phänomen vergleicht. Er meint durch die Erwärmung in der Grenzschicht der Electroden werde eine Dampfhülle um die Electroden gebildet, diese würde dann durch den Reststrom electrolysirt, und die bei dem Stromdurchgange durch die Dampfhülle wegen des grossen Widerstandes erzeugte Wärme sei hinreichend um das Phänomen constant zu erhalten. Je grösser die erzeugte Wärmemenge oder je stärker cet. par. die Stromintensität ist, um so stabiler müsse die Erscheinung sein. Dass diese Auffassung zu einem Verständniss der ganzen Erscheinungsgruppe nicht genügt, ergeben unsere Messungen. Der Reststrom hat schon dann, wenn er vorerst noch alternirend mit dem Grenzstrom auftritt, gleich dieselbe Stärke, welche er auch bei grösserer electromotorischer Kraft behält; tritt er zusammen mit dem Grenzstrom auf, so ist aber die Erscheinung noch nicht stabil, sondern es tritt ein Wechsel der Erscheinung ein, indem der Umschlag wieder rückgängig wird und wieder eintritt; ohne Zunahme der Stärke des Reststromes wird die Erscheinung mit wachsender electromotorischer Kraft stabil. Die von Hrn. Richarz angenommene Dampfschicht bez. der in derselben verhandene Widerstand müsste wegen der Constanz des Reststromes der electromotorischen Kraft proportional zunehmen, ohne dass sich in der Flüssigkeit, da der Strom constant ist, irgend etwas ändern kann.

Man könnte bei Festhaltung der Auffassung, dass ein solcher Widerstand die Ursache der Stromschwächung sei, auf die Vermuthung kommen, dass der Zustand überhaupt kein constanter sei, dass wir es vielmehr, wie bei dem Auftreten des Reststromes zusammen mit dem Grenzstrom mit einem discontinuirlichen Stromdurchgang zu thun hätten, dass nur, während bei dem Grenzstrom der normale Strom und der infolge der Dampfschicht geschwächte Strom langsam abwechseln bei zunehmender electromotorischer Kraft der Wechsel so rasch erfolgt, dass das Galvanometer einen festen Stand zeigt, und dass auch an der Electrometernadel die Schwankungen nicht mehr bemerkbar sind. Dem steht aber zunächst entgegen, dass wenn bei dem Grenzstrom der Umschlag eintritt, der

Reststrom schon ganz dieselbe Stärke zeigt, wie der spätere Reststrom. Weiter aber zeigt das Telephon eine solche Discontinuität nicht an. Wie vorhin schon erwähnt wurde, war das Rauschen des Telephons nach dem Stromumschlag zwar etwas lauter, der Charakter des Geräusches bleibt indessen derselbe; wäre ein solch schnelles Wechseln des innerhalb so weit auseinanderliegender Grenzen der Stromstärke veränderlichen Stromes vorhanden, so müsste das Telephon einen bestimmten lauten Ton geben.

Wir wollen indess keineswegs läugnen, dass die Erscheinung zum Theil durch eine die Electroden umgebende Dampfhülle oder viel wahrscheinlicher eine Gashülle bedingt oder eingeleitet wird; an der Kathode kann man ja direct diese Gashülle durch die Funken-Entladung wahrnehmen, dass aber diese Gasschicht nicht das wesentlich bedingende der Erscheinung ist, ergibt sich auch daraus, dass die hohe Polarisation bez. der Stromumschlag immer nur an *einem* Pole auftritt, dass an der Anode sofort die Polarisation herabgeht, wenn sie an der Kathode steigt und umgekehrt.

Einen sehr interessanten Versuch in dieser Beziehung haben wir am 23. Januar d. J. gemacht. Wir benutzten die schon vorhin erwähnten an Platinplatten angeschweissten Drähte. Dieselben waren in 42 proc. Lösung eingetaucht. Zunächst war die Kathode tiefer eingetaucht als die Anode. Mit 44 Elementen wurde die Anode glühend und zeigte eine Polarisation von 72,76 Volt. Es wurde nun die Kathode etwas aus der Flüssigkeit herausgezogen, ohne die in der anderen Electrodenzelle befindliche Anode zu berühren. Als die Kathode eine gewisse Strecke gehoben war, wurde diese glühend und sofort ging an der Anode die Polarisation auf 3,4 Volt herab, das Glühen hörte auf, sie verhielt sich wie immer, wenn an der Kathode der Umschlag von vornherein eingeleitet war. An der glühenden Kathode war die Polarisation 65,7 Volt. Als nun durch Herausziehen der Anode diese wieder glühend gemacht wurde, erlosch sofort die Kathode und die Polarisation an derselben wurde 2 Volt.

Wir müssen aus dieser Beobachtung schliessen, dass der Reststrom nicht unter eine für eine Spitze von gegebener Länge in gegebener Lösung bestimmte Stärke herabgehen darf,

damit an dieser Spitze der Zustand, welcher den Umschlag bedingt, erhalten bleibt. Denn durch das Herausziehen der Kathode, wenn der Zustand an der Anode vorhanden ist, wächst wegen des an der Kathode vorhandenen Uebergangswiderstandes in normaler Weise die Polarisation an derselben, deshalb nimmt der Werth der die Stromstärke auch nach dem Umschlag bedingenden Differenz $D - p$ ab, der Reststrom wird geschwächt, sinkt er unter einen bestimmten Werth, so hört der Zustand an der längeren Anode auf. Ist die Kathode hinreichend verkleinert, so reicht der Reststrom für die verkleinerte Kathode aus, und der Umschlag tritt dort ein.

Der gleiche Schluss ist aus dem im § 11 beschriebenen Versuche zu ziehen. Dort war für die Spitze der Grenzstrom soeben überschritten, der Umschlag war eingetreten, als der Widerstand zwischen den Electroden klein war, und der Reststrom reichte aus, um die Erscheinung zu erhalten. Als nun der Widerstand zwischen den Electroden vergrössert wurde, musste der Reststrom gerade so an Stärke abnehmen, wie es vorher für den normalen Strom beobachtet war; die Folge dieser Abnahme war das Rückgängigwerden des Umschlages.

Die an der Electrode selbst beobachteten Erscheinungen zeigen eine grosse Analogie mit dem Verhalten des electrischen Lichtbogens an der Anode, mit den Entladungen in Geissler'schen Röhren an der Kathode. Wie wir an der positiven Kohle den Potentialsprung an der Austrittsstelle des Stromes finden, so wird auch hier an der Uebertrittstelle des Stromes aus der Electrode in die Flüssigkeit der Sprung stattfinden; bei wachsender electromotorischer Kraft wächst die disponible Energie, diese wird zu dem stärkeren Glühen und zur Zerstäubung der Spitze aufgebraucht. An der Kathode macht die leuchtende Gasschicht ganz den Eindruck des Glimmlichtes an den Kathoden der Geissler'schen Röhren, es liegt daher nahe, den Potentialsprung an der Kathode mit dem Kathodengefälle zu parallelisiren, um so mehr, da auch hier gerade wie dort bei hinreichend vermehrter Energie die Kathode selbst zum Glühen kommt.

Wir wollen mit diesen Bemerkungen nur auf verwandte Erscheinungen hinweisen, über welche man sich ja auch noch nicht klar ist, wir hoffen aber durch weitere Untersuchungen

dem Verständniss noch etwas näher zu kommen. Es möge hier nur noch darauf hingewiesen werden, dass das Auftreten der warzenförmigen, resp. kraterähnlichen Gebilde an den Anoden auch auf das Wiederhervortreten occludirten Gases hinzudeuten scheint, welches etwa bei der Einleitung des Umschlages von der Anode aufgenommen war.

13. Nachdem die Erscheinungen des Stromumschlages an Platindrähten beobachtet waren, gingen wir dazu über, sogenannte unpolarisirbare Electroden nach derselben Richtung hin zu untersuchen. Wir wählten Zink in gesättigter Lösung von Zinkvitriol und Kupfer in gesättigter Lösung von Kupfervitriol. Schon die ersten im Herbst 1890 von uns angestellten Versuche ergaben, dass sich an den Anoden ähnliche Erscheinungen zeigten, wie an den Platinelectroden in Schwefelsäure, während an den Kathoden ein solches sprungweises Wachsen der Polarisation nicht eintrat.

Drähte als Anoden wurden selbstverständlich bald verzehrt, wir benutzten deshalb zu diesen Versuchen Zinkstäbe, welche zuweilen unten konisch zugespitzt waren und Kupferstreifen, denen man unten die Form eines spitzen Dreiecks gegeben hatte. Das Zink war reinstes Zink aus der Trommsdorff'schen Fabrik, das Kupfer electrolytisch dargestellt von Dr Langbein in Leipzig, das Zinksulfat und Kupfersulfat war als reinstes Salz von Merck in Darmstadt bezogen. Die Versuche wurden im übrigen so durchgeführt wie die früheren, nur wurden die Anoden an einer Mikrometerschraube befestigt, so dass man sie von oben innerhalb gewisser Grenzen beliebig tief in die Flüssigkeit eintauchen konnte. Da es sich von Anfang an herausstellte, dass die Erscheinungen an der Anode die wesentlichen waren, wurden hauptsächlich diese beobachtet.

Das characteristische der Erscheinung ist folgendes. Wendet man eine hinreichende Stromdichte an, so ist zunächst nach Stromschluss die Polarisation klein, dieselbe fängt dann allmählich an zu wachsen, zunächst langsam, bald wird das Wachsen ein schnelleres und nach einiger Zeit, die bei grösserer Stromdichte kleiner ist, geht die Nadel des Electrometers wie durch einen plötzlichen Stoss heraus, sodass also die Polarisation plötzlich einen grossen Werth annimmt. Gleichzeitig findet an der Anode eine lebhafte Gasentwickelung statt. In

den meisten Fällen nimmt die zuerst erreichte grosse Polarisation wieder etwas ab, bleibt aber eine grosse von mehreren Volts oder schwankt unter Umständen in weiten Grenzen.

Diese „grosse“ Polarisation entwickelt sich um so rascher, je dichter der Strom ist, bei zu geringer Stromdichte scheint sie nicht einzutreten. Man kann sie aber an selbst recht grossen Electroden dadurch hervorrufen, dass man die Electrode zuerst erheblich verkleinert, die Polarisation an der verkleinerten Electrode sich entwickeln lässt und darauf die Electrode allmählich oder auch rasch wieder durch tieferes Einsenken vergrössert. Es kann demnach eine kleinere Stromdichte die Erscheinung dadurch hervorrufen, dass man sie vorher, wenn auch nur an einem kleineren Theil der Electrode, durch grössere Stromdichte hervorgerufen hat.

14. Zinkelectroden in Zinkvitriol.

Wir beschreiben zunächst einige Versuche, welche den Verlauf der Erscheinungen an reinen Zinkstäben näher characterisiren.

Ein Zinkkegel von etwa 30 mm Seitenlänge und 7 mm Basisdurchmesser wurde ganz, also mit etwa 300 qmm Oberfläche als Anode eingetaucht, als Kathode diente ein Zinkstab gleichen Durchmessers auf etwa 6 cm eingetaucht. Als ein Strom von 6 Elementen geschlossen wurde, fand sich

$$p_a = 0{,}106 \text{ Volt}, \; p_k = 0{,}071 \text{ Volt}, \; D = 10{,}79 \text{ Volt},$$
$$i = 0{,}029 \text{ Amp.}, \; W = 366 \text{ Ohm}.$$

Die Polarisation der Electrode änderte sich längere Zeit nicht; es wurden 12 Elemente geschlossen, es fand sich

$$p_a = 0{,}244 \text{ Volt}, \; p_k = 0{,}099 \text{ Volt}, \; D = 21{,}23 \text{ Volt},$$
$$i = 0{,}057 \text{ Amp.}, \; W = 368 \text{ Ohm}.$$

Auch jetzt blieb die Polarisation längere Zeit constant. Als dann die Anode emporgehoben wurde, sodass nur noch eine kurze Spitze eintauchte, stieg die Polarisation an der Anode auf einen der Potentialdifferenz nahen Werth; als nach kurzer Zeit der ganze Kegel wieder eingesenkt wurde, nahm die Polarisation allerdings ab, blieb aber sehr gross. Der Versuch musste unterbrochen werden. Als am anderen Morgen der Strom (von derselben Stärke) wieder geschlossen wurde,

war zunächst die Polarisation an der Anode klein, es trat aber sofort ein erst langsameres, dann rascheres Wachsen ein und nach 10 Minuten entwickelte sich die grosse Polarisation.

Ein frischer Zinkkegel, bis zu einer solchen Tiefe eingesenkt, dass die eintauchende Oberfläche etwa 150 qmm betrug, ergab bei Schluss des Stromes 0,057 Amp. zunächst wieder die Polarisation von 0,2 Volt, nach 20 Minuten war dieselbe auf 0,45 gewachsen, nach weiteren 10 Minuten stieg die Polarisation plötzlich auf 3,7 Volt, wobei lebhafte Gasentwickelung an der Anode eintrat. Nach Unterbrechung des Stromes ging die Nadel des Electrometers sofort auf Null, sodass eine *bleibende* Polarisation nicht zu erkennen war.

Nachdem die doppelte Zinkfläche eingetaucht war, wurde der Strom wieder geschlossen; die anfängliche Polarisation war 0,24 Volt, schon nach 8 Minuten trat jetzt die grosse Polarisation ein; dieselbe war eine kurze, zur Messung hinreichende Zeit, 10 Volt, nahm aber stetig ab und ging zurück auf 3,9 Volt.

Mit diesen und anderen Spitzen wurden vielfache Versuche angestellt, um zu erkennen, ob sich etwa auf der Oberfläche des Zinks eine nichtleitende Schicht bildete, welche die Ursache der Potentialdifferenz zwischen Metall und Flüssigkeit wäre. Es wurde deshalb die Flüssigkeit kräftig gerührt, dabei trat wohl ein kleines Schwanken der Polarisation ein, aber eher eine Vergrösserung als eine Verkleinerung. Die Zinkelectrode wurde mit Fliesspapier abgewischt, es trat ebenfalls ein Schwanken der Polarisation ein, das aber nur kurze Zeit dauerte. Die Electrode wurde während des Stromdurchganges mit scharfer Glaskante abgekratzt, auch das hatte nur eine Schwankung der Polarisation und eher eine Zunahme als eine Abnahme der Polarisation zur Folge. Die Electrode wurde aus der Flüssigkeit herausgenommen, mit Wasser abgewaschen und auch mit Schmirgelpapier abgerieben, die Wirkung dieser Maassnahmen war keine andere als diejenige einer etwa die gleiche Zeit dauernden Stromunterbrechung; gerade wie es bei einer solchen mehrere Minuten dauerte bis die grosse Polarisation sich wieder entwickelte, so auch nach dem Abspülen und Abschmirgeln der Electrode.

Auch eine Umkehr der Stromrichtung, durch welche die

Anode einige Zeit zur Kathode gemacht wurde, hatte keinen merklichen Einfluss auf den Verlauf der Erscheinung. Als z. B. bei Benutzung des zweiten Zinkkegels der Strom umgekehrt wurde, ging die Nadel sofort auf die andere Seite und zeigte eine Wasserstoffpolarisation von 0,2 Volt an, sodass das Vorhandensein einer nichtleitenden Schicht an dem Zinkstabe nicht angenommen werden kann, da dann eine allmähliche Abnahme der anfangs stärkeren Wasserstoffpolarisation sich hätte zeigen müssen.

Als der Strom wieder in der früheren Richtung hindurch gesandt wurde, trat die grosse Polarisation gerade so wieder ein, wie wenn der Strom eine Zeit lang unterbrochen gewesen wäre. Bei längerer Dauer des umgekehrten Stromes und geringer Stromdichte dauerte es längere Zeit, bei kürzerer Dauer und grösserer Stromdichte kürzere Zeit, bis das plötzliche starke Anwachsen der Polarisation eintrat.

Die Zeit, während welcher der Strom geschlossen sein muss, ehe die grosse Polarisation eintritt, hängt wesentlich von der Stromdichte ab. Unter anderem zeigt das folgender Versuch. Ein Zinkstab wurde bis zu einer Tiefe von etwa 30 mm eingetaucht und ein Strom von 0,05 Amp. geschlossen. Nach einer Stunde zeigte sich noch keine Zunahme der Polarisation, welche gleich nach Stromschluss 0,16 Volt war. Als der Strom auf 0,104 Amp. verstärkt wurde, wurde die Polarisation 0,29 Volt, stieg nach 10 Minuten auf 0,40 Volt, nach weiteren 5 Minuten auf 0,54 Volt und 4 Minuten später trat unter lebhafter Gasentwickelung an der Anode die grosse Polarisation ein, die sich nach einigen Schwankungen zu 3,4 Volt ergab; der Strom war dabei auf 0,098 Amp. zurückgegangen. Die Wasserstoffpolarisation an der Kathode hatte nur von 0,16 Volt bei 0,05 Amp., auf 0,24 Volt bei 0,1 Amp. zugenommen. Vier nebeneinander befestigte leitend verbundene Zinkstäbe wurden als Anode benutzt, jeder tauchte mit einer Oberfläche von etwa 800 qmm ein, sodass die gesammte Fläche, welche eintauchte, etwa 3200 qmm war. Es wurde einen Nachmittag und einen Vormittag ein Strom von wachsender Stärke, zuletzt eine Stunde lang ein Strom von 0,4 Amp. angewandt. Die Polarisation blieb immer eine geringe, sie nahm zu von 0,11 Volt bei einem Strom von 0,1 Amp. zu bis 0,33 Volt bei

0,4 Amp., die grosse Polarisation trat nicht ein. Als dieselbe Anode aber einige Zeit nachher zu später zu besprechenden Versuchen in der Voraussetzung, dass sie unpolarisirbar sei, zwei Tage mit zunehmenden Stromstärken benutzt wurde, trat, nachdem die Stromstärke 0,4 nur kurze Zeit gedauert hatte, auch an dieser Electrode die grosse Polarisation ein; es zeigte sich plötzlich lebhafte Gasentwickelung und nach einigem Schwanken zeigte die Polarisation den Werth 7,8 Volt. Als der Strom jetzt auf 0,15 Amp. geschwächt wurde, ging die Polarisation vollständig zurück; als nach einer Unterbrechung des Stromes während 2 Stunden derselbe Strom von 0,15 Amp. wieder geschlossen wurde, blieb die Polarisation dauernd klein, als aber nach einer halbstündigen Dauer dieses Stromes derselbe auf 0,4 verstärkt wurde, entwickelte sich in 3 Minuten die grosse Polarisation. Dieselbe war anfangs über 30 Volt (als Stromquelle war eine Dynamomaschine von 110 Volt Klemmspannung benutzt), ging dann aber stetig zurück, sodass sie nach 5 Minuten nur noch 10 Volt war, und nahm noch weiter ab. Als nun der Strom wieder auf 0,15 Amp. gebracht wurde, ging die Polarisation sofort auf 0,16 Volt zurück, nahm aber gleich wieder zu, war nach 5 Minuten 0,48 Volt und wuchs plötzlich sehr stark, ohne aber einen festen Werth anzunehmen, die Nadel des Electrometers schwankte während 10 Minuten in bald engeren, bald weiteren Grenzen hin und her. Eine Wiederholung des Versuches gab dasselbe Resultat. im Tagebuch ist bemerkt, von 5^h 45^m bis 6^h wogt die Nadel hin und her.

Dieses Schwanken der grossen Polarisation bei Stromdichten, welche zu gering sind, um selbst ohne Vorbereitung des Stabes durch grössere Stromdichte die grosse Polarisation hervorzurufen, werden wir beim Kupfer wieder finden und dort die Erscheinung genauer besprechen.

15. Die grosse Polarisation der Zinkanode hängt unter sonst gleichen Umständen ab von der Stärke des Stromes und der Grösse der Anode. Es scheint indess, dass die Polarisation an einer Fläche bestimmter Grösse bei bestimmter Stromstärke doch nicht eine ganz bestimmte ist, dass sie vielmehr grösser ist, wenn sie unmittelbar vorher durch grosse Stromdichte eine erheblich grössere war, wenigstens dauert es

dann sehr lange, wenn man den Strom schwächt, bis die Polarisation auf den diesem Strome entsprechenden früher beobachteten Werth zurückgeht. Trotz einer äusserst grossen Anzahl von Versuchen ist es uns nicht gelungen, in diesem Punkte klar zu sehen. Um indess einigermaassen die Abhängigkeit der Polarisation von der Grösse der Electrodenfläche und der Stromstärke zu übersehen, wurde ein Zinkstab als Anode benutzt, dessen Durchmesser 7 mm war. Derselbe wurde zunächst bis zu einer Tiefe von 42 mm in die Zinklösung eingetaucht und Ströme, die von 0,05 bis 0,4 Amp. stiegen, angewandt. Die eingetauchte Fläche betrug etwa 960 qmm. Waren die diesen Strömen entsprechenden Polarisationen beobachtet, so wurde der Zinkstab herausgezogen, sodass die eintauchende Oberfläche noch 500—250—140 qmm betrug, und jedesmal in gleicher Weise die Polarisation gemessen. Als Kathode diente ein Zinkstab gleicher Dicke, der stets bis zur gleichen Tiefe von etwa 45 mm eingetaucht war.

Als Stromquelle diente eine Dynamomaschine von 110 Volt Klemmspannung, durch Widerstände wurde die Stromstärke so regulirt, dass die Ströme die angegebene Stärke hatten, wenn die grosse Polarisation eingetreten war.

Electrodenfläche 960 qmm.

Strom in Amp.	0,06	0,1	0,2	0,3	0,4
Anodenpolarisation in Volt	bleibt klein	3,09	3,43	3,79	4,01

Electrodenfläche 500 qmm.

Strom in Amp.	0,0575	0,1	0,2	0,3	0,4
Anodenpolarisation in Volt	3,19	3,30	3,73	4,51	5,13

Electrodenfläche 250 qmm.

Strom in Amp.	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4
Anodenpolarisation in Volt	3,09	3,49	4,29	5,21	5,90
Kathodenpolarisation in Volt	0,14	0,24	0,46	0,68	0,85

Electrodenfläche 140 qmm.

Strom in Amp.	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4
Anodenpolarisation in Volt	3,35	3,92	5,77	6,37	7,20
Kathodenpolarisation in Volt	0,14	0,24	0,45	0,61	0,80

Schliesslich wurde nur die untere Basis des Stabes zur Berührung mit der Flüssigkeit gebracht, wobei infolge capillaren Ansteigens der Flüssigkeit noch etwa 2 mm der Mantelfläche von der Flüssigkeit benetzt wurden. Die grosse Polarisation trat stets sehr schnell nach dem Stromschlusse ein und zeigte

zuerst einen erheblich grösseren als den endlichen Werth, auf welchen sie langsam zurückging. Als schliesslicher Werth wurde der angenommen, welcher während einiger Minuten nicht mehr merklich abnahm.

Die gefundenen Werthe sind:

Strom in Amp.	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4
Anodenpolarisation in Volt	4,96	5,90	7,03	8,14	9,04

Alle diese Zahlen zeigen ein der Stromstärke proportionales Wachsthum, für jede Grösse der Oberfläche lassen sich die Werthe p_a darstellen durch eine Gleichung

$$p_a = a + b \, . \, i,$$

worin a bis zur dritten Reihe (250 qmm Oberfläche) merklich denselben Werth 2,7 hat bei 140 qm Oberfläche auf 2,9 und bei der kleinsten Fläche auf 4,6 wächst; b nimmt von 3,4 bei der grössten Fläche auf 6,1 — 8 — 11 — 11,4 bei den folgenden Flächen zu.

Gleiche Regelmässigkeit der Zahlen ergab sich nur selten, besonders bei kegelförmig zugespitzten Zinkstäben ergaben sich mehrfach für gleiche Flächengrössen erheblich stärkere Polarisationen; worin das lag, haben wir noch nicht aufklären können.

16. Die im vorigen Paragraphen für die Kathodenpolarisation angegebenen Werthe zeigen ebenfalls eine Zunahme mit der Stromstärke, ohne dass indess hier jemals ein sprungweises Wachsen, wie an der Anode das Eintreten der „grossen“ Polarisation, gefunden wurde. Wir haben deshalb auch die Abhängigkeit der Kathodenpolarisation von der Grösse der eintauchenden Fläche und der Stromstärke zu bestimmen versucht. Als Anode diente der schon früher erwähnte vierfache Zinkstab, da wir voraussetzten, dass derselbe die grosse Polarisation nicht annehmen würde. Da derselbe schliesslich nach längerer Versuchsdauer bei Anwendung eines Stromes von 0,4 Amp. die grosse Polarisation annahm, haben wir die Zunahme der Kathodenpolarisation nur bis 0,3 Amp. verfolgt. Als Kathode wurde ein cylindrischer Zinkstab von 7 mm Durchmesser benutzt und die Beobachtung, um den Einfluss des durch die starken Ströme eintretenden Zinkabsatzes möglichst zu vermeiden, so geführt, dass mit dem schwächsten Strome

begonnen und bei jedem Strome der Stab nach und nach herausgezogen wurde, bis zuletzt nur wesentlich die untere Fläche des Stabes und der Theil des Mantels, bis zu welchem die Flüssigkeit capillar anstieg, mit der Flüssigkeit in Berührung war. Nach der Beobachtung des Stromes 0.2 Amp. wurde der Zinkstab frisch abgeschmirgelt, weil sich am unteren Rande ein Kranz von Zinknadeln angesetzt hatte.

Eintauchende Fläche Kathodenpolarisation	1360 qmm	700 qmm	370 qmm	150 qmm	50 qmm	Polaris. d. Anode
Strom 0,05 Amp.	0,07	0,12	0,20	0,39	0,73	0,040
„ 0,1 „	0,12	0,21	0,38	0,67	1,03	0,068
„ 0,2 „	0,23	0,41	0,64	1,13	2,49	0,094
„ 0,3 „	0,39	0,63	1,19	1,81	4,37	0,19

Sehen wir von der Reihe für 50 qmm eintauchende Fläche ab, so nimmt für jede Fläche die Polarisation der Stromstärke proportional zu, für die drei grösseren Flächen lässt sich dieselbe sogar darstellen durch $p_k = a \cdot i$. Bei annähernd gleicher Stromdichte ist die Kathodenpolarisation ebenso annähernd die gleiche.

17. Ein ganz eigenthümliches Verhalten zeigten amalgamirte Zinkelectroden als Anoden. Es wurde ein amalgamirter Zinkkegel von etwa 350 qmm Fläche als Anode genommen und ein Strom von 0,055 Amp. geschlossen. Die Anodenpolarisation war gleich nach Stromschluss 0,32 Volt; dieselbe nahm anfangs sehr langsam zu, nach 23 Minuten ging die Electrometernadel plötzlich aus der Scala, kehrte aber ebenso schnell zu Null zurück, stand dort 30 Secunden und ging wieder schnell aus der Scala, dann auf Null und dann wieder aus der Scala und ging darauf auf den Theilstrich 80, einer Polarisation von etwa 4 Volt entsprechend und schwankte um diesen Werthe längere Zeit. Abwischen der Anode mit Fliesspapier, wodurch die Amalgamirung wieder gleichmässiger wurde, lässt das Spiel von neuem eintreten.

An einem anderen amalgamirten Zinkstab dauerte es wiederum etwa 20 Minuten bis sich die grosse Polarisation entwickelte, dann aber zeigte sich ganz dasselbe Spiel, es wurde neunmal nach der Reihe die Zunahme und Abnahme der Polarisation beobachtet, ohne dass eine Verlangsamung der Bewegungen eintrat.

Der Rückgang der Electrometernadel zum Nullpunkt ist

meist kein stetiger, die Nadel geht mehr oder weniger zurück, bleibt dann kurze Zeit stehen oder geräth selbst, bevor sie weiter zurückgeht, in ein kleines Schwanken. Verstärkung des Stromes bewirkt im allgemeinen einen rascheren Verlauf der Erscheinung, die Bewegungen werden lebhafter.

An der Anode zeigt sich jedesmal, wenn die Polarisation in der angegebenen Weise in die grosse übergeht, die Nadel also mit grosser Geschwindigkeit sich von der Nulllage entfernt, eine lebhafte Gasentwickelung; während derselben rieselt von der Anode ein graues Pulver nieder. Es macht den Eindruck, wie wenn eine grosse Menge occludirten Gases plötzlich aus dem Stabe hervorbräche und dabei die oberflächlichen Schichten des Stabes abstosse. Das Pulver wurde mit einem Glaslöffel aufgefangen; es zeigte sich dann etwas gelblich gefärbt; es gab sich als Amalgam zu erkennen, denn wenn man Gold mit dem Pulver rieb, so wurde dasselbe amalgamirt.

Ob die Gasentwickelung und das Niederfallen des Pulvers der starken Zunahme der Polarisation vorausgehen, oder ob es gleichzeitig ist, sodass etwa das Abstossen der oberflächlichen Schicht die Ursache ist, dass die Polarisation plötzlich wieder abnimmt, ist schwer zu sagen, wir haben zu einer Entscheidung noch nicht kommen können. Nur sei bemerkt, dass, wenn nach mehrfachem Hin- und Herwogen der Polarisation sich eine Zeit lang eine gewisse grosse Polarisation hält, und man unterbricht auf kurze Zeit den Strom, dass dann jedesmal, wie bei dem reinen Zink, nach neuerem Stromschluss die Polarisation den kleinen Werth der normalen Sauerstoffpolarisation hat.

18. Die Erscheinungen an den Kupferanoden verlaufen zwar im ganzen und grossen wie bei den Zinkelectroden, zeigen im einzelnen jedoch erhebliche Verschiedenheit. Das Gemeinsame ist das Eintreten der grossen Polarisation nach längerer oder kürzer Zeit, je nach der Dichte des erregenden Stromes, ferner die Erregung der grossen Polarisation durch eine geringere Stromdichte, wenn sie vorher an einem Theile der Anode durch grössere Stromdichte hervorgerufen war. Ebenso ist das Auftreten der grossen Polarisation von einer lebhaften Gasentwickelung begleitet, sodass sich das Gas um das Kupferblech dort, wo dasselbe die Oberfläche der Flüssigkeit schneidet, als ein Gaskranz herumliegt. Auch hier macht es den Ein-

druck, als wenn vorher occludirtes Gas aus dem Metall hervorbräche, ja zuweilen schien es, als wenn oberflächliche Theile des Kupfers abgerissen würden; es ist im Beobachtungstagebuch einmal vermerkt, dass nach dem Hervorbrechen des Gases feine Kupferspäne auf der Flüssigkeit schwammen.

Abweichend von Zink zeigt sich, dass der Werth der Anodenpolarisation in viel geringerem Grade von der Stromstärke, bez. Stromdichte abhängig ist, und weiter, dass dieselbe, wie es scheint, nur innerhalb gewisser Grenzen der Stromdichte einen constanten Werth annimmt. Ferner sind die Werthe der Anodenpolarisation bei Kupfer erheblich grösser als bei Zink.

Die Kathodenpolarisation wächst ebenso wie bei Zink und Zinkvitriol mit der Stromdichte und hat ähnliche Werthe, so fand sich bei einem Strome 0,18 Amp. und etwa 900 qmm eingetauchter Fläche die Kathodenpolarisation 0,351 Volt, bei 450 qmm eingetauchter Fläche 0,61 Volt, bei 335 qmm 1,44 Volt, und als nur die Kante des rechteckigen Kupferstreifens in einer Länge von 12 mm mit der Flüssigkeit in Berührung war, 3,55 Volt.

Um den Gang der Erscheinung an der Kupferanode übersichtlich zu machen, möge eine Beobachtung etwas ausführlicher beschrieben werden. Es wurde ein Kupferdreieck von 40 mm Höhe, 12 mm Grundlinie, also 480 qmm Oberfläche mit der Spitze nach unten als Anode in die Flüssigkeit getaucht, als Kathode ein viereckiger Kupferstreifen, 12 mm breit, 40 mm tief, eingetaucht. Als ein Strom von 0,0497 Amp. geschlossen wurde, war die Potentialdifferenz der Electroden $D = 16{,}39$ Volt, die Polarisation an der Anode $p_a = 0{,}124$ Volt, an der Kathode $p_k = 0{,}126$ Volt. Für den Widerstand der Kupferlösung ergibt sich daraus $W = 325$ Ohm.

Während 40 Minuten nahm die Anodenpolarisation nicht merklich zu, der Strom wurde deshalb auf 0,108 Amp. verstärkt; gleich nach dieser Verstärkung war die Anodenpolarisation 0,42 Volt, nach 4 Minuten trat dann bei lebhafter Gasentwickelung an der Anode ein plötzliches Wachsen der Polarisation ein, sodass die Electrometernadel weit über die Grenzen der Scala abgelenkt wurde. Die Polarisation liess aber sofort nach und sank auf 17 Volt, welcher Werth einige Zeit dauerte.

Eine Verstärkung des Stromes auf 0,2 Amp. liess die Polarisation erheblich wachsen, sie stieg auf 59 Volt, stand dann kurze Zeit bei etwa 50 Volt und ging zurück auf 17 Volt und schwankte einige Zeit zwischen 17 und etwa 25 Volt, ohne einen constanten Werth anzunehmen.

Bei einem anderen Dreieck der gleichen Grösse genügte der Strom 0,1 nicht, um die grosse Polarisation hervorzubringen, es wurde deshalb das Kupferdreieck so hoch emporgezogen, dass nunmehr 270 qmm eintauchten. Nach etwa 10 Minuten entwickelte sich die grosse Polarisation, stieg zunächst bis etwa 40 Volt und ging ziemlich schnell bis etwa 19 Volt zurück, um welchen Werth sie schwankte.

Die Schwächung des Stromes auf den halben Werth bewirkte ein Zurückgehen der Polarisation auf den Werth von etwa 0,3 Volt; die Polarisation nahm aber bald in der geschilderten Weise zu und stieg auf etwa 15 Volt. Einsenken des Kupferdreiecks bis zu seiner Grundlinie liess die Polarisation sofort bis 0,23 Volt zurückgehen; dieselbe wuchs indess bald, nahm aber lange keinen constanten Werth an, sondern schwankte zwischen grosser und kleiner Polarisation, eine Zeit lang den Werth 13,1 Volt zeigend.

Diese und andere Versuche führten zu der Vermuthung, dass die grosse Polarisation einen bestimmten Werth unterhalb einer gewissen Stromdichte und oberhalb einer gewissen anderen Stromdichte nicht annimmt, und dass zwischen diesen Grenzen die Polarisation nicht erheblich von der Stromdichte abhängt.

Von den vielfachen Versuchen, um über diese Verhältnisse einigermaassen zur Klarheit zu gelangen, sollen hier nur die schliesslichen Versuche erwähnt werden. Es wurden 4 Kupferdreiecke hergestellt und deren Oberflächen zum Theil mit Kolophonium und Wachs bezogen, um ganz bestimmte leitende Flächen als Electrodenflächen zu erhalten. Das so hergestellte Dreieck I hatte eine leitende Oberfläche von 40 qmm, das Dreieck II von 80 qmm, Dreieck III von 160 qmm, Dreieck IV von 320 qmm. Es wurden meist der Reihe nach wachsende, in einigen Fällen auch der Reihe nach abnehmende Ströme zur Herstellung der Polarisation benutzt; die angegebenen Ströme sind jene, bei welchen die Polarisationen, wenn die-

selben constant wurden, gemessen wurden. Als Stromquelle diente eine Dynamomaschine von 110 Volt Klemmspannung, die Stromstärken wurden durch Widerstände regulirt.

Dreieck I. 40 qmm.

Strom	
0,025 Amp.	Die grosse Polarisation tritt 15 Minuten nach Stromschluss mit lebhafter Gasentwickelung ein, ist kurze Zeit 50 Volt, geht dann zurück und nimmt den constanten Werth 14,16 Volt an.
0,037 „	Die Polarisation nimmt den constanten Werth 14,36 Volt an.
0,050 „	Die Polarisation nimmt den constanten Werth 14,36 Volt an.
0,101 „	Die Polarisation nimmt den constanten Werth 14,74 Volt an.
0,147 „	Die Polarisation nimmt den constanten Werth 15,91 Volt an.
0,210 „	Die Polarisation zeigt keinen constanten Werth an, die Electrometernadel schwankt unregelmässig zwischen einer Ablenkung von 70 Scalentheilen, einer Polarisation von 16 Volt entsprechend, und 136 Scalentheilen, ja geht zuweilen bis 160 (Polarisation 40 Volt) heraus.
0,147 „	Die Polarisation wird zunächst 15,9 Volt; nach einiger Zeit wird dieselbe schwankend, steigt bis 23 Volt und geht zurück auf 17,7 Volt, welchen Werth sie längere Zeit beibehält; sie scheint indess noch etwas abzunehmen.
0,103 „	Die Polarisation wird constant etwa 17 Volt.
0,055 „	Die Polarisation wird constant etwa 15,3 Volt.
0,035 „	Die Polarisation nimmt zunächst den Werth 14,2 an, geräth dann aber ins Schwanken, sodass die Electrometernadel unregelmässig zwischen der Nulllage und dem Theilstrich 100 hin- und hergeht, kommt kurze Zeit bei dem Theilstrich 60, entsprechend 14 Volt, zur Ruhe und beginnt neuerdings zu schwanken.

Strom	
0,26 Amp.	Die Polarisation nimmt kurze Zeit den Werth 18,5 Volt an, schwankt dann aber zwischen 18 Volt und einem erheblich höheren Werth, ohne dass die Electrometernadel während der zu einer Messung erforderlichen Zeit ruhig steht.

Dreieck II. 80 qmm.

0,025 „	Der Strom ruft während $1^1/_4$ Stunde die grosse Polarisation nicht hervor; als das Dreieck zur Spitze herausgezogen wurde, entwickelte sich dieselbe, ging bei Eintauchen des ganzen Dreiecks vollständig zurück, trat dann aber nach 5 Minuten ein und nahm für mehrere Minuten den Werth 16,3 Volt an.
0,013 „	Die Polarisation schwankt zwischen sehr kleinen Werthen und etwa 14 Volt, derart, dass sie kurze Zeit 14 Volt ist, dann zurückgeht auf fast Null, wieder wächst, kurze Zeit wieder 14 Volt zeigt und so fort.
0,021 „	Auch bei diesem Strome stellt sich die Polarisation zunächst bei 14,2 Volt ein, nach einiger Zeit geräth die Electrometernadel in Schwingungen, geht zurück auf einen kleinen Werth, zeigt dann wieder 14,2 Volt, geräth neuerdings ins Schwanken und so fort.
0,034 „	Die Polarisation wird constant 14,86 Volt.
0,050 „	„ „ „ „ 15,2 „
0,010 „	„ „ „ „ 16,2 „
0,133 „	„ „ „ „ 17,5 „
0,183 „	Die Polarisation ist erheblich schwankend, die Nadel gibt grosse Werthe an, stellt sich dann aber bei 17,5 Volt ein und nimmt noch langsam ab.
0,235 „	Die Polarisation schwankt, die Electrometernadel zeigt kurze Zeit 20 Volt, geht zurück auf 18,7 Volt und kommt zuletzt bei 17,1 Volt zur Ruhe.
0,276 „	Die Polarisation wächst auf 30 Volt, geht zurück auf 17 Volt, wächst wieder und nimmt keinen constanten Werth an.

Strom

,29 Amp. Die Electrometernadel schwankt zwischen etwa denselben Werthen wie vorher.

Dreieck III. 160 qmm.

,014 „ Nach Schluss des Stromes bleibt die Polarisation etwa 0,1 Volt und zeigt während 20 Minuten keine Zunahme. Auch als das Dreieck bis zur Spitze herausgezogen und diese eine sehr grosse Polarisation erhalten hatte, bleibt nach Eintauchen des ganzen Dreiecks die Polarisation während 10 Minuten auf dem Werthe 0,1 Volt. Erst als der Strom auf 0,1 Amp. verstärkt wurde, trat die grosse Polarisation ein. Als dann der Strom wieder auf 0,014 Amp. gebracht wurde, stellte sich kein constanter Zustand ein, die Polarisation stieg auf etwa 13 Volt, sank auf 4 Volt und ging zwischen diesen Werthen hin und her.

,022 „ Die Schwankungen blieben ungefähr die gleichen.

,035 „ Die Schwankungen bleiben, obere Grenze etwa 16 Volt, untere Grenze sehr kleine Werthe.

,05 „ Die Polarisation nimmt nach einigem Schwanken den Werth 14.6 Volt an, geräth dann in starkes Schwanken und geht zu einem sehr kleinen Werthe zurück; sie wächst wieder, nimmt kurze Zeit den Werth 14,6 Volt an und geräth neuerdings ins Schwanken bis nahezu Null abnehmend, wächst wieder auf 15 Volt, kommt wieder ins Schwanken und so fort.

,095 „ Die Polarisation wird 15 Volt und bleibt mit geringem Schwanken während 5 Minuten so stehen; dann geht die Electrometernadel langsam auf Null und wieder auf den früheren Stand. Nach 4 Minuten geräth die Nadel wieder in Schwingungen, kommt wieder zur Ruhe und geräth wieder in Schwingungen, die Schwingungen werden grösser und die Nadel geht in die Nulllage. Die Polarisation wächst wieder und das ganze Spiel wiederholt sich.

Strom	
0,12 Amp.	Die Polarisation wird 15 Volt, die Nadel geräth nach einiger Zeit in Schwingungen, beruhigt sich, fängt wieder an zu schwingen, beruhigt sich wieder und so fort.
0,174 „	Die Polarisation wird constant 15 Volt.
0,176 „	Bei Fortsetzung der Versuche am folgenden Tage trat beim Schliessen des Stromes sofort grosse Polarisation ein, sie blieb, nachdem sie zuerst auf 42 Volt gestiegen war, eine Zeit lang 17 Volt, nahm schwankend zu bis etwa 19,2, ging wieder zurück und blieb bei 18 Volt stehen.

Die schwankende Polarisation bei grösserer Stromdichte liess sich bei der zu Gebote stehenden electromotorischen Kraft an diesem Dreieck nicht mehr beobachten.

Dreieck IV. 320 qmm.

Strom	
	Bei Schluss eines Stromes von 0,3 Amp. trat sehr schnell die grosse Polarisation ein, bei Schwächung des Stromes auf
0,0138 Amp.	ging die Polarisation erst auf Null zurück, nahm aber noch 2 Minuten zu, sodass die Electrometernadel bis zu dem Theilstriche 50 der Scala ging, entsprechend der Polarisation von etwa 12 Volt. Die Polarisation wurde nicht constant, schwankte in kleineren oder grösseren Amplituden zwischen dem Theilstrich 25—50.
0,021 „	Die Polarisation ist anfangs etwa 14 Volt, nahm aber sehr bald ab, die Electrometernadel schwankt zwischen denselben Grenzen wie vorher.
0,032 „	Die Electrometernadel schwingt um den einer Polarisation von 14,5 Volt entsprechenden Stand in kleineren oder grösseren Intervallen, ohne einen festen Stand anzunehmen.
0,045 „	Das Electrometer zeigt zunächst eine bis 16 Volt zunehmende Polarisation, dieselbe geht schwankend auf 14 Volt zurück, die Nadel geräth neuerdings in ein zunehmendes Schwanken, bei dem sie bis zum Theilstrich 6 zurückgeht, stellt sich wieder bei 14 Volt ein, kommt ins Schwanken und so fort.

Strom	
0,091 Amp.	Die Polarisation wächst auf 16,4 Volt und geht zurück auf 14,5 Volt. Nach einiger Zeit beginnt die Electrometernadel zu schwingen, beruhigt sich, kommt wieder in immer grösser werdende Schwingungen, sodass die Nadel nahe zu Null kommt, stellt sich wieder in der Stellung 14,5 Volt ein und so fort.
0,127 „	Die Anodenpolarisation wird 15 Volt, die Nadel geräth aber bald in Schwingungen, beruhigt sich, schwingt wieder, beruhigt sich nochmals und schwingt dann in immer grösseren Amplituden, bei denen die Nadel bis zu Null geht, nimmt dann wieder für kurze Zeit den 14,5 Volt entsprechenden Stand ein. Nach 7 Minuten wiederholt sich das Spiel.
0,176 „	Die Polarisation wird 15 Volt; die Electrometernadel bleibt 14 Minuten stehen, geräth dann in Schwingungen, bei denen sie bis zum Theilstrich 16 zurückgeht, entsprechend einer Polarisation von 2 Volt, geht wieder heraus zu 15 Volt und fängt wieder an zu schwingen und so fort.
0,172 „	Bei den am folgenden Tage fortgesetzten Versuchen brachte dieser Strom nach 12 Minuten die grosse Polarisation, welche kurze Zeit auf 40 Volt war, dann abnahm, kurze Zeit 22 Volt wurde und dann stetig auf 15 Volt zurückging. Dieser Werth wurde während $^1/_2$ Stunde beobachtet, ohne dass ein Schwanken eintrat.
0,23 „	Bei Verstärkung des Stromes auf diesen Werth nahm die Polarisation langsam bis 16,1 Volt zu, blieb längere Zeit so stehen und schwankte dann, sehr langsam wachsend und abnehmend, um 16,9 Volt.
0,283 „	Die Anodenpolarisation wird 17,5 Volt.
0,32 „	Durch Vergrösserung der Klemmspannung der Maschine auf 120 Volt liess sich der Strom bis zu diesem Werthe verstärken. Die Polarisation wurde constant 17,5 Volt.

19. Bei den im letzten Paragraphen mitgetheilten Zahlen sieht man zunächst, was auch schon am Schluss von § 15

betreffs der Anodenpolarisation an Zink in Zinkvitriol hervorgehoben wurde, dass unter, soweit sich beurtheilen lässt, ganz gleichen Umständen die Werthe der Anodenpolarisation nicht unerheblich schwanken. So zeigt das kleinste Dreieck einmal bei dem Strome 0,147 Amp. die Anodenpolarisation 15,9 Volt, das anderemal 17,7 Volt, bei dem Strom 0,103 Amp. einmal 14,7 Volt, das anderemal 17 Volt. Zwischen den der gleichen Stromstärke angehörigen Werthen war der Strom auf 0,21 Amp. gebracht worden, sonst war alles bei den je zwei Messungen ganz gleich. Beim Dreieck III ergaben die Beobachtungen am Schluss des ersten Tages bei 0,174 Amp. die Anodenpolarisation 15 Volt, am folgenden Tage derselbe Strom die Polarisation 18 Volt. Einen Grund hierfür wissen wir nicht anzugeben.

Mit Beachtung dieser Unsicherheit lassen die im vorigen Paragraphen mitgetheilten Zahlen deutlich erkennen, dass die Polarisation innerhalb der Grenzen der Stromdichte, in welcher dieselbe einen constanten Werth annimmt, nicht erheblich mit der Stromdichte sich ändert. Eine Zunahme der Stromstärke auf das vierfache lässt die Polarisation sich nur soweit ändern, dass die Werthe zwischen Grenzen liegen, welche sich auch bei einer und derselben Stromstärke für die Anodenpolarisation finden. Es ist das ein erheblicher Unterschied gegenüber dem Verhalten des Zinks in Zinkvitriol, bei welchem die Anodenpolarisation erheblich mit der Stromdichte, und zwar derselben nahezu proportional zunahm.

Weiter zeigt sich, dass unterhalb einer gewissen Stromdichte die Anodenpolarisation keinen constanten Werth annimmt, vielmehr zwischen kleinen Werthen und jenem Werthe, den dieselbe bei dem Constantwerden annimmt, hin und her schwankt. Ebenso wird die Polarisation oberhalb einer gewissen Stromdichte nicht constant, sie schwankt zwischen dem bei geringerer Stromdichte erhaltenen constanten Werthe und einem höheren Werthe. Es schien uns zuweilen, als wenn sich dieselbe einem zweiten grösseren Werthe nähere, den sie bei noch grösserer Stromdichte erreichen würde. Mit kleinen Spitzen liess sich die Frage nicht verfolgen, da diese durch den Strom zu rasch verzehrt und damit die Verhältnisse schwankend werden, wir haben indess kürzere Zeit Polarisationen von doppelter Stärke beobachtet.

Dass es die Stromdichte ist, welche auf das Constantwerden der Polarisation den maassgebenden Einfluss hat, zeigen die Beobachtungen an den verschiedenen Dreiecken, bei Dreieck I wird die Polarisation schon bei 0,04 Amp. constant, bei Dreieck IV zeigen sich erst bei dem Strom 0,17 Amp. constante Werthe.

20. Die Polarisation an den Zink- und Kupferanoden ist hiernach eine sehr verwickelte Erscheinung, zu deren Aufklärung es noch mehrfacher Versuche bedarf; wir betrachten deshalb diese Mittheilung auch durchaus nur als eine vorläufige, welche wir im Anschluss an unsere Versuche über die Polarisation an kleinen Platinelectroden nur machen, weil durch die Uebersiedelung des einen von uns (Koch) nach Stuttgart ein gemeinsames Weiterarbeiten für uns zunächst ausgeschlossen ist. Wir begnügen uns deshalb auch hier mit einigen Andeutungen, welche Vorstellung man sich etwa über diese Vorgänge machen kann.

Was zunächst die zunehmende Polarisation an der Kathode angeht, so möchten wir diese auf die an der Kathode nach den Hittorf'schen Ueberführungszahlen sowohl bei Kupfer als bei Zink eintretende Verdünnung der Lösung zurückführen, welche einmal eine electrische Differenz zwischen der Kathode und dem zum Electrometer führenden Metalle zur Folge hat; weiter aber die Kathode mit einer schlecht leitenden Schicht umhüllt. Die Verdünnung nimmt mit wachsender Stromdichte zu, es muss demnach die am Electrometer gemessene Potentialdifferenz mit wachsender Stromdichte zunehmen.

Die Erscheinungen an der Anode können wohl nur darauf zurückgeführt werden, dass das an derselben bei einer gewissen Stromdichte abgeschiedene Ion SO_4 nicht in dem Maasse das Metall der Anode zu lösen im Stande ist, als es abgeschieden wird. Es wird sich deshalb dort der Electrolyt H_2SO_4 bilden und auch von dem Strome zersetzt werden. Der zunächst aus diesem Electrolyt abgeschiedene Sauerstoff wird von dem Metall der Anode aufgenommen, bis das Metall gewissermaassen gesättigt ist; dann aber entwickelt sich der Sauerstoff an der Anode, und diese Entwickelung scheint den Anstoss zu geben, dass das occludirte Gas zum Theil aus dem Metall wieder ausgestossen wird. Wenn man dann noch die Annahme macht,

dass der an der Oberfläche der Anode entwickelte Sauerstoff durch eine oberflächliche Oxydation eine schlecht leitende Schicht hervorbrächte, so würden sich die am Zink beobachteten Erscheinungen zum grossen Theil verstehen lassen.

Die grosse Polarisation entwickelt sich hiernach, wenn die Oberfläche des Zinks mit Sauerstoff und jener schlecht leitenden Schicht bedeckt wird, deren Dicke von der Stromdichte abhängig ist. Die Polarisation besteht dann aus der durch die Sauerstoffbedeckung bedingten electromotorischen Gegenkraft und dem durch die schlecht leitende Schicht bewirkten Potentialsprung. Der Letztere muss mit der Stromstärke proportional zunehmen, wie es auch die Beobachtungen des § 15 zeigen.

Bei dem amalgamirten Zink würde anzunehmen sein, dass die durch den an der Oberfläche nach Beendigung der Occlusion entwickelten Sauerstoff hergestellte schlecht leitende Schicht bei dem Hervorbrechen des occludirten Sauerstoffs als nicht fest haftend von der Anode abgestossen würde und dass deshalb die Polarisation wieder ihren kleinen Werth annimmt, dass dann der ganze Vorgang sich wiederholt, bis das Amalgam abgestossen ist. Dann verläuft die Erscheinung wie an reinem Zink.

Dass das Rühren der Flüssigkeit, das Abwischen der Electrode, ja auch das Kratzen mit einer scharfen Glaskante nur eine Schwankung der grossen Polarisation zur Folge hat, würde einerseits zeigen, dass die Schicht sehr fest am Zink haftet, andererseits, dass die an einer einzelnen Stelle der Anode durch Kratzen fortgenommenen Schicht sich sehr rasch wieder ersetzt.

Schwer erklärlich ist in dieser Auffassung die Thatsache, dass die grosse Polarisation nicht sofort auftritt, wenn man nach kurzer Unterbrechung den Strom wieder schliesst, auch wenn der Zinkstab ruhig in der Lösung gehangen hat. Das deutet darauf hin, dass die schlecht leitende Schicht bald verschwindet, bez. dass sie wesentlich nur solange vorhanden ist, als der Strom selbst besteht.

Wie die Verbreitung des Zustandes auf eine grössere Anode, nachdem die grosse Polarisation an einem kleinen Theile der Oberfläche erzeugt war, zu Stande kommt, dafür

bietet sich in dieser Auffassung keine Erklärung, wie wir darüber eine Erklärung überhaupt nicht zu geben wissen.

Für die an den Kupferanoden beobachteten Erscheinungen genügen die vorhin gemachten Annahmen nicht; zwar würde man die erheblich höheren Werthe der Polarisation dadurch erklären können, dass man für die schlecht leitende Schicht einen erheblich grösseren Widerstand annähme als bei dem Zink, eine Annahme, welcher die geringe Zunahme der Polarisation mit der Stromstärke widerspricht. Um diese geringe Abhängigkeit der Polarisation von der Stromstärke mit der vorgeführten Auffassung in Einklang zu bringen, müsste man die Annahme hinzufügen, dass der Widerstand der angenommenen schlecht leitenden Schicht mit wachsender Stromstärke abnähme, eine Annahme, die sich durch nichts weiter begründen lässt, also nur eine Umschreibung der beobachteten Thatsache wäre.

Ebenso wenig liefert die Annahme einer schlecht leitenden Schicht eine Erklärung dafür, dass sich bei dem Kupfer nur innerhalb gewisser Grenzen der Stromdichte ein stabiler Werth der grossen Polarisation ausbildet; dass bei kleinerer Stromdichte die Werthe zwischen sehr kleinen Werthen und etwa 14 Volt unregelmässig schwanken; dass zuweilen die Polarisation während mehrerer Minuten einen festen Werth annimmt und dann plötzlich ins Schwanken kommt, und indem die Schwankungen immer grösser werden, auf sehr kleine Werthe zurückgeht, um dann sofort wieder auf den vorherigen festen Werth zu steigen; dass ferner oberhalb einer gewissen Stromdichte der vorher erreichte feste Werth die untere Grenze einer neuerdings zwischen weiten Grenzen schwankenden Polarisation wird. Man könnte ja dieser Schicht dazu bestimmte Eigenschaften beilegen, gäbe damit aber den beobachteten Thatsachen nur einen anderen Ausdruck.

Um alle diese Erscheinungen übersehen zu können wird die nächste Aufgabe sein, die vorhandenen electromotorischen Gegenkräfte und die Widerstände voneinander zu trennen.

21. Als das Resultat unserer Untersuchung erhalten wir folgendes:

1. An kurzen Drahtelectroden in verdünnter Schwefel-

säure zeigt sich eine mit wachsender Stromstärke erheblich wachsende Polarisation.

2. Die Polarisation besteht aus einer electromotorischen Gegenkraft und einem Widerstande, den wir als Uebergangswiderstand bezeichnet haben. Die electromotorische Gegenkraft ist nicht abhängig von der Länge der Spitzen und ausser bei der 1procent. Schwefelsäurelösung nicht abhängig von der Concentration der Lösung. Dieselbe hat jenen Werth, welchem sich die Polarisation von Platten bei wachsender Stromdichte annähert, 3,79 Volt.

3. Der Widerstand der sich an den Electroden bildenden schlecht leitenden Schicht, der Uebergangswiderstand ist für eine gegebene Drahtelectrode und eine gegebene Lösung constant, unabhängig von der Stromstärke. Für ein gegebenes Electrodenpaar ist er proportional dem specifischen Leitungswiderstande der Lösung; für eine gegebene Lösung nimmt er mit wachsender Länge der Drahtelectroden erheblich ab.

4. Die unter 2 und 3 angeführten Sätze gelten nur bis zu einer gewissen, von der Länge der Drahtelectroden und der Leitungsfähigkeit der Lösung abhängigen Stromstärke. Ist diese erreicht, so bewirkt eine Vergrösserung der electromotorischen Kraft den „Stromumschlag“; durch plötzliches Wachsen der Polarisation an der kleineren Electrode wird der Strom sehr schwach, es bleibt nur der „Reststrom“ übrig.

Die Stärke dieses Reststromes wird bei einer weiteren Vergrösserung der electromotorischen Kraft nicht vermehrt, die Folge dieser Vergrösserung ist nur eine dieser Zunahme gleiche Zunahme der Polarisation. Die Stärke des Reststromes ist für längere Drahtelectroden grösser als für kürzere, sie scheint ebenfalls grösser zu sein, wenn der Stromumschlag durch Wachsen der Sauerstoffpolarisation eingetreten ist, als wenn das Wachsen der Wasserstoffpolarisation ihn bewirkte.

5. Nach Auftreten des Reststromes, wenn er durch Wachsen der Polarisation der Anode bedingt ist, wird die Anode rasch verzehrt, sie geräth in lebhaftes Glühen und hat grosse innere Spannungen, welche unter Umständen eine Spaltung der Drahtelectroden herbeiführen. An der Kathode, wenn das Wachsen der Polarisation an dieser den Stromumschlag bewirkt, zeigt sich eine in bläulich weissem Lichte leuchtende Gashülle,

welche bei zunehmender electromotorischer Kraft nach und nach die ganze Electrode einhüllt; die Electrode wird dann ebenfalls glühend, ohne indess ähnliche innere Spannungen zu zeigen wie die Anode. Die Kathode bleibt unversehrt.

6. Auch Zinkelectroden in Zinksulfat, Kupferelectroden in Kupfersulfat zeigen eine mit wachsender Stromstärke wachsende Polarisation; an den Anoden tritt bei einer gewissen Stromdichte ein plötzliches Wachsen der Polarisation ein, welche an einer Zinkanode mit wachsender Stromstärke, und zwar derselben proportional, zuzunehmen scheint, an der Kupferanode sich wenig mit der Stromstärke ändert, indess nur innerhalb gewisser Grenzen der Stromdichte einen stabilen Werth annimmt. Man kann diese grosse Polarisation an grösseren Anodenflächen bei geringer Stromdichte erhalten, wenn man sie vorher an einem kleinen Theile der Oberfläche durch grössere Stromdichte hervorgerufen hat.

Aachen und Stuttgart, im November 1891.

VII. *Magnetische Experimentaluntersuchungen;* *von Carl Fromme.*

(Hierzu Taf. VIII Fig. 9.)

Siebente Abhandlung.

Ueber verschiedene Zustände des permanenten Magnetismus.

§ 1. Es ist bekannt, dass die Wirkung, welche eine magnetisirende Kraft auf das permanente Moment eines Eisenkörpers ausübt, sowohl durch die *Grösse* des Moments bestimmt wird, als auch durch die *Art seiner Entstehung*. Wenn z. B. das permanente Moment durch eine Kraft P erzeugt war, so bringt eine in der gleichen Richtung wie P wirkende Kraft $p < P$ eine kleine Aenderung hervor, welche je nachdem (vgl. die 5. Abh.) in einer Zunahme oder in einer Abnahme bestehen kann. War dagegen eine permanente Magnetisirung durch Wirkung einer Kraft $P' > P$ entstanden, aber dann durch eine in entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft π auf denselben Werth, den P im ersten Fall erzeugte, reducirt worden, so bringt nun Kraft p eine viel grössere Zunahme des permanenten Moments hervor.

Die Versuche, welche ich in der 5. Abhandlung beschrieben habe, zeigten, dass der Unterschied in der Wirkung der Kraft p auch dann noch bestehen bleibt, wenn Kraft π der Kraft P gleichgerichtet und von solcher Grösse war, dass sie das von P' ($P' = P$ angenommen) erzeugte permanente Moment gar nicht änderte.

Ich habe aus diesen Versuchen geschlossen, dass ein permanentes Moment bei gleicher Grösse noch in verschiedenen Zuständen bestehen, d. h. dass die Anordnung der Molecularmagnete mannigfaltig variiren kann, und dass jeder dieser Zustände ein ihm eigenthümliches Widerstandsvermögen gegen störende Kräfte besitzt, indem sich benachbarte Molecularmagnete im einen Fall zu mehr, im anderen zu weniger stabilen Gruppen zusammenschliessen.

Nachdem ich nun in der 6. Abhandlung bewiesen habe, dass die Geschwindigkeit, mit welcher die magnetisirende Kraft abfällt, einen durch secundäre Ursachen nicht zu erklärenden Einfluss auf die *Grösse* des permanenten Moments besitzt, will ich jetzt den *Zustand*, in welchem sich ein solches, bei rascher Kraftabnahme erzeugtes *PM* befindet, genauer untersuchen und mit anderen Zuständen des permanenten Moments in Vergleich stellen.

§ 2. Wenn man die magnetisirende Kraft rasch auf Null absinken lässt, so ist, wie a. a. O. gezeigt, das resultirende permanente Moment *PM* kleiner als nach langsamer Reduction der Kraft auf Null.

Das letztere Verfahren liefert das maximale *PM*. Einen ebenso grossen Verlust, wie durch rasche Kraftabnahme (Stromunterbrechung), kann man dem *PM* Max. auch durch eine in conträrer Richtung wirkende Kraft von passender Grösse oder durch Erschütterungen von geeigneter Stärke zufügen. Eine mögliche Verschiedenheit des Zustands der drei so erhaltenen gleich grossen permanenten Momente wurde dadurch festgestellt, dass man in der einen oder anderen Richtung auf das reducirte *PM* eine Kraft wirken liess und den von ihr inducirten temporären Magnetismus, sowie die Zu- oder Abnahme bestimmte, welche *PM* durch sie erfuhr.[1]) Die Versuche wurden mit Bündeln dünner Eisendrähte, mit Eisen- und Stahlstäben ausgeführt. Für rasche Kraftabnahme wurde der Strom gewöhnlich zwischen Platinflächen unterbrochen, langsame Kraftabnahme (zur Erzielung des *PM* Max., von welchem immer ausgegangen wurde), erreichte man durch allmähliche Einschaltung von Flüssigkeitswiderstand. Für die Erschütterungen diente ein hölzerner Hammer.

§ 3. Ich beschreibe zuerst die Versuche, bei welchen die prüfende Kraft in der nämlichen Richtung wirkte, wie diejenige, welche das *PM* Max. erzeugt hatte. Das durch Stromunterbrechung, conträren Strom oder Erschütterung reducirte *PM* nahm in diesem Fall wieder zu[2]) und näherte sich dem *PM* Max.

---

1) Einige wenige derartige Versuche sind schon in der 3. Abhandlung mitgetheilt worden.

2) Ueber Ausnahmen vgl. Tabelle 8.

Die Tabellen 1—5 beziehen sich auf das in der 5. und 6. Abhandlung schon mehrfach erwähnte Drahtbündel in Paraffin.

Die electromotorische Kraft lieferten stets 5 Bunsen'sche Elemente. Die Stromstärke bezeichne ich durch Angabe des im Siemens'schen Rheostaten liegenden Widerstands. Bei allen im Folgenden angeführten Versuchen wurde PM Max. bei $W = 0$ im Rheostaten erzeugt.

Tabelle 1.

Dem PM Max. = 815 sc. wurde ein Verlust zugefügt entweder durch Unterbrechung des Stromes bei $W=0$ oder bei $W=20$ oder durch Vornahme passender Erschütterungen. Sollten letztere einen ebenso grossen Verlust verursachen, wie die Stromunterbrechung bei $W = 20$, so liess man ebenfalls zuerst den Strom mit $W = 20$ auf das PM Max. wirken, — liess ihn aber selbstverständlich langsam auf Null absinken — und nahm dann erst die Erschütterungen vor. Die prüfende Kraft lag zwischen $W = 100$ und $W = 20$. Der Verlust betrug im Mittel

durch Stromunterbrechung	durch Erschütterung
bei $W = 0$: 117,0 sc.	116,5 sc.
bei $W = 20$: 91,0 sc.	und 91,6 sc.

Von diesen Mitteln wichen die Einzelwerthe immer nur sehr wenig ab.

a) Das durch Stromunterbrechung bei $W = 20$ resp. durch Erschütterung reducirte PM nahm durch $W = 100$ bis $W = 20$ um folgende Beträge zu:

W	1malige Wirkung der Kraft		3malige Wirkung der Kraft		5malige Wirkung der Kraft	
	nach Unterbr.	nach Erschütt.	nach Unterbr.	nach Erschütt.	nach Unterbr.	nach Erschütt.
100	14,8	21,0	—	—	—	—
50	35,1	48,5	—	—	—	—
35	51,4	65,8	57,3	70,3	—	—
27	62,2	86,0	69,5	92,0	71,2	93,0
20	77,1	91,2	84,9	97,2	86,9	97,7

b) Zunahme des durch Stromunterbrechung bei $W = 0$ resp. durch Erschütterung reducirten *P M*.

W	1malige Wirkung der Kraft		3malige Wirkung der Kraft		5malige Wirkung der Kraft	
	nach Unterbr.	nach Erschütt.	nach Unterbr.	nach Erschütt.	nach Unterbr.	nach Erschütt.
100	14,0	25,6	13,5	26,7	—	—
70	20,9	40,9	21,3	43,0	—	—
50	29,7	60,9	34,5	64,0	—	—
40	39,4	78,2	47,7	83,1	—	—
30	50,4	97,7	61,4	104,0	63,4	105,0
20	70,7	116,0	83,4	122,5	86,1	123,5

Das durch Stromunterbrechung reducirte *P M* wächst also in jedem Falle weniger als das durch Erschütterung um gleichviel geschwächte, der Unterschied erreicht 100 Proc. In beiden Fällen wächst die Zunahme mit der Zahl der Kraftwirkungen, aber stärker nach Stromunterbrechung als nach Erschütterung, sodass der Unterschied etwas kleiner wird, je öfter man die Kraft anwendet. Mit wachsender Kraft nimmt der relative Unterschied ebenfalls ab. Durch Stromunterbrechung bei $W = 0$ wurde *P M* stärker geschwächt, als bei $W = 20$. Trotzdem sind in Reihe b) die Zunahmen sämmtlich kleiner als in Reihe a), während dagegen dem grösseren Verlust durch Erschütterung stets auch die grössere Zunahme folgt. In Reihe b) wird durch einmalige Wirkung von $W = 20$ der durch die Erschütterungen hervorgerufene Verlust gerade ausgeglichen, während mehrmalige Wirkung *P M* über den Ausgangswerth 815 steigert. Hierin spricht sich die specifische Wirkung der kleineren Kraft ($W = 20$) aus, wenn sie nach einer grösseren ($W = 0$) wirkt. (5. Abh.)

Tabelle 2.

Das *P M* Max. = 820 wurde durch eine der conträren Kräfte $W = 300$, 400, 500, 700, 1000 geschwächt. Einen ebenso grossen Verlust ertheilte man dem *P M* durch Erschütterungen. Vergrössernd wirkte darauf eine der Kräfte $W = 50$, 40, 30, 20. Der Erschütterungsverlust war selbstverständlich dem durch die conträre Kraft niemals genau gleich zu erhalten.

Es wurden deshalb die Erschütterungsverluste als Abscissen, die Zunahmen durch eine der vergrössernden Kräfte als Ordinaten aufgetragen. Man erhielt so Curven, welche gegen die Abscissenaxe concav waren. Aus ihnen wurde diejenige Zunahme entnommen, welche eingetreten sein würde, wenn der Verlust durch Erschütterung genau ebenso gross wie der durch conträren Strom gewesen wäre.

Contr. Kraft $W=$	Gleichgerichtete Kraft											
	Verlust	$W=50$ Zunahme		Verlust	$W=40$ Zunahme		Verlust	$W=30$ Zunahme		Verlust	$W=$ [illegible] Zunahme	
		nach c. K.	nach Ersch.		nach c. K.	nach Ersch.		nach c. K.	nach Ersch.		nach c. K.	nach Ersch.
300	183,6	85,6	83,5	179,0	110,2	110,5	186,3	148,6	144,5	183,1	168,9	[illegible]
400	139,2	68,5	69,0	139,8	91,3	90,0	141,5	118,5	117,5	—	—	—
500	115,8	60,9	60,0	114,0	78,0	78,5	117,3	101,5	100,5	114,8	113,0	[illegible]
700	80,7	45,1	45,0	81,0	59,7	59,8	81,0	75,5	75,5	—	—	—
1000	57,0	34,6	35,0	57,5	46,4	47,5	57,7	58,7	58,0	—	—	—

Die Zunahme des PM nach einem Verlust durch conträren Strom ist also derjenigen nach einem Erschütterungsverlust immer nahe gleich, die kleinen Unterschiede sind fast zu gleichen Theilen positiv und negativ. Wir können also den Satz aussprechen:

„Bei Bündeln dünner Eisendrähte wird das permanente Moment durch Erschütterungen in den gleichen Zustand versetzt, wie durch einen conträren Strom. Von beiden verschieden ist aber der Zustand, in welchen PM durch eine Stromunterbrechung gelangt."

Ich habe mir nun die Frage vorgelegt, ob es nicht möglich sei, den letzteren Zustand dadurch vollkommen in den ersteren überzuführen, dass man dem durch Stromunterbrechung geschwächten PM noch einen weiteren Verlust durch Erschütterungen oder durch einen conträren Strom zufügt.

Tabelle 3.

Durch Stromunterbrechung bei $W=0$ erfuhr PM Max. $= 820$ sc. im Mittel einen Verlust von 119 sc. Durch einmalige Wirkung der Kraft $W=40$ erfolgte wieder eine Zunahme von

40,0 sc. Schwächte man aber das reducirte $PM = 701$ durch Erschütterungen bei 5 Versuchen noch weiter um

6,8 36,2 46,5 68,9 93,8,

sodass der Gesammtverlust resp. war:

129,3 153,7 165,9 187,3 212,8

so nahm PM durch $W = 40$ zu um

46,2 79,5 88,0 101,8 122,8.

Brachte man dagegen die obigen Gesammtverluste ausschliesslich durch Erschütterungen hervor, so ergaben sich durch $W = 40$ die Zunahmen:

84,5 97,5 104,0 114,5 128,0,

welche um

38,3 18,0 16,0 12,7 5,2

grösser sind.

Demnach unterscheidet sich der Zustand, in den man PM durch Stromunterbrechung und nachfolgende Erschütterungen versetzt, zwar immer von dem durch Erschütterungen allein resultirenden, aber er nähert sich doch dem letzteren um so mehr an, ein je grösserer Theil des ganzen Verlustes durch die Erschütterung verursacht ist. Bei der letzten Beobachtung ging die Annäherung schon bis auf 4 Proc., obwohl der Erschütterungsverlust noch erheblich kleiner als der aus Stromunterbrechung war.

Da sich nach Tab. 2 Erschütterung und conträrer Strom in ihrer Wirkung auf PM als gleich erwiesen hatten, so stellte ich weitere Versuche auch in der Weise an, dass ich dem PM Max. zuerst einen Verlust mittelst Stromunterbrechung, sodann einen weiteren durch einen conträren Strom zufügte. Als prüfende Kraft diente wieder $W = 40$.

Tabelle 4a.

Abnahme durch Stromunterbrechung	Abnahme durch den contr. Strom $W =$		Gesammtabnahme	Zunahme durch $W = 40$	Zunahme durch $W = 40$ vermindert um 38,7
119,1	∞	0	119,1	38,7	0
116,9	3000	10,9	127,8	49,8	11,1
117,8	2000	18,6	136,4	57,8	19,1
119,5	1500	25,8	145,3	65,3	26,6

Abnahme durch Stromunterbrechung	Abnahme durch den contr. Strom $W =$		Gesammtabnahme	Zunahme durch $W = 40$	Zunahme durch $W = 40$ vermindert um 38,7
119,4	1200	33,2	152,6	73,1	34,4
118,1	1000	41,5	159,6	81,3	42,6
119,8	800	53,7	173,5	91,6	52,9
119,5	600	73,7	193,2	107,7	69,0
120,4	500	90,0	210,4	120,7	82,0
122,3	450	101,0	223,3	128,0	89,3
120,7	400	115,1	235,8	133,9	95,2
120,6	350	131,9	252,5	143,8	105,1
120,5	300	154,5	275,0	157,4	118,7
120,7	270	172,3	293,0	167,5	128,8
121,3	240	193,8	315,1	179,6	140,9
120,8	220	210,8	331,6	189,0	150,3

Ausserdem reducirte ich das PM Max. auch allein durch einen conträren Strom und bestimmte die Zunahme durch $W = 40$.

Tabelle 4b.

Conträrer Strom $W =$	2000	1500	1200	1000	800	600	500	450	400
Abnahme des PM Max.	28,7	37,0	46,7	56,3	70,8	95,3	112,3	123,8	139,7
Zunahme durch $W = 40$	27,0	32,7	38,3	44,9	52,6	67,1	75,5	81.8	90,3
Conträrer Strom $W =$	350	300	270	240	220	200	180	165	160
Abnahme des PM Max.	157,6	183,3	202,3	226,8	246,0	268,5	294,0	319,2	329,3
Zunahme durch $W = 40$	99,6	113,0	120,3	135,2	144,3	154,3	169,0	181,5	190,4

Die graphische Darstellung der Versuche Tabelle 4 b) in Fig. 9 — Abscisse = Verlust, Ordinate = Zunahme — ergibt eine gegen die Abscissenaxe zuerst schwach concave, später geradlinig verlaufende Curve. Die entsprechende, die Versuche in Tabelle 4 a) darstellende Curve beginnt bei der Abscisse 119,1, ist anfangs ebenfalls concav gegen die Abscissenaxe und verläuft nachher geradlinig. Der ersteren Curve nähert sie sich zunächst rasch, später langsam und scheint sie bei einem 300 übersteigenden Gesammtverlust vollkommen zu erreichen. Somit verschwindet die specifische Wirkung der Stromunterbrechung auf PM um so mehr, einen je grösseren Verlust

durch conträren Strom man dem PM noch zufügt; bei einem Gesammtverluste von mehr als 300 ist sie ganz verschwunden. In der letzten Reihe der Tabelle 4a) findet sich die Zunahme durch $W = 40$ vermindert um diejenige Zunahme, welche das nur durch Stromunterbrechung reducirte PM erfährt. Diese Zahlen übersteigen bei schwachen conträren Strömen den durch diese allein hervorgerufenen Verlust, bei den stärkeren bleiben sie hinter demselben zurück, stets sind sie aber grösser als diejenige Zunahme, welche PM erfährt, wenn es nur durch conträren Strom reducirt war — wie der Vergleich mit Tabelle 4a) lehrt.

„Erschütterung sowohl als ein conträrer Strom modificirt also den Zustand des durch Stromunterbrechung reducirten PM derart, dass eine der magnetisirenden gleichgerichtete Kraft eine grössere Zunahme hervorbringt, welche sogar, wenn die Erschütterung oder der conträre Strom hinreichend stark war, diejenige erreichen kann, die nach alleiniger Wirkung einer Erschütterung oder eines conträren Stroms beobachtet wird."

Während bei den bisherigen Versuchen nur die Zunahme des PM beobachtet wurde, gebe ich in Tabelle 5) eine Reihe, in welcher auch die ganzen inducirten Momente gemessen sind. Ich bezeichne dieselben durch GM, die Zunahme des PM durch $\delta . PM$, die Differenz $GM - \delta . PM$, d. h. das verschwindende Moment durch TM.

Tabelle 5.

Die Entfernung der Magnetisirungsspirale vom Magnetometer war in den folgenden fünf Beobachtungsreihen nicht die gleiche. PM Max. ist daher durch verschiedene Zahlen ausgedrückt. Die GM sind stets (auch bei der zweiten und folgenden Wirkungen der Kraft) von dem reducirten PM an gezählt.

PM Max.	Reduction des PM durch	Grösse des Verlustes	Vergröss. wirkt $W =$	Zahl der Einwirk.	GM	$\delta . PM$	TM
900	Stromunt.	96,6	200	1	73,4	6,9	66,5
	Erschütt.	113,9	200	1	70,1	11,6	58,5
		90,0	200	1	69,0	10,2	58,8
900	Stromunt.	103,4	100	1	165,5	15,0	150,5
		102,6	100	1	166,3	15,2	151,1

P M Max.	Reduction des *P M* durch	Grösse des Verlustes	Vergröss. wirkt $W =$	Zahl der Einwirk.	*G M*	$\delta . PM$	*TM*
	Erschütt.	107,0	100	1	156,8	24,8	132,0
		102,9	100	1	155,7	24,2	131,5
740	Stromunt.	102,7	70	1	213,9	18,9	195,0
	Erschütt.	99,2	70	1	201,2	34,2	167,0
752	Stromunt.	113,4	55	1	285,9	24,6	261,3
			55	2	258,4	27,1	231,3
			55	6	245,9	26,9	219,0
	Erschütt.	114,3	55	1	280,5	51,2	229,3
			55	2	272,0	53,2	218,8
			55	6	268,5	53,5	215,0
	Contr. Str.	112,6	55	1	281,5	51,0	230,5
			55	2	274,5	53,0	221,5
			55	6	268,7	54,0	214,7
740	Stromunt.	104,2	50	1	330,0	28,0	302,0
			50	2	298,3	31,7	266,6
			50	8	276,5	30,8	245,7
	Erschütt.	102,7	50	1	317,5	53,1	264,4
			50	2	309,0	55,3	253,7
			50	8	299,8	55,8	244,0

Die Verschiedenheit des Zustandes von *PM*, welche nach Stromunterbrechung einerseits, nach einem conträren Strom oder Erschütterung andererseits bis dahin in der Verschiedenheit der $\delta . PM$ hervortrat, macht sich also auch bei dem ganzen inducirten Moment *GM* bemerkbar: Dasselbe ist am grössten nach Stromunterbrechung, aber nur bei der ersten Wirkung der Kraft, bis zur zweiten Wirkung fällt es schon so stark ab, dass es von da an die letzte Stelle einnimmt. Nach einem conträren Strom und nach Erschütterung sind auch die *GM* einander gleich, sowie die $\delta . PM$ die gleichen waren. „*Man wird also die durch conträren Strom und Erschütterung hervorgerufenen beiden Zustände des PM als vollkommen identisch — bei Drahtbündeln — betrachten dürfen.*" Der nach Stromunterbrechung bei der ersten Wirkung der Kraft grosse Werth von *GM* und der kleine Werth von $\delta . PM$ bringen zusammen das abnorm grosse *TM* hervor. Dasselbe nimmt aber mit Wiederholung der Einwirkung stark ab und unterscheidet sich schliesslich kaum noch von den nach conträrem Strom oder Erschütterung beobachteten Werthen.

Da ich aus vielfacher Erfahrung wusste, dass bei magnetischen Erscheinungen nicht nur das Material der Eisenkörper,

sondern auch ihre Form von entscheidendem Einfluss ist, dass also, um zu allgemeinen Gesetzen zu gelangen, die Messungen sich auf Körper der verschiedensten Dimensionen erstrecken müssen, so untersuchte ich ausser Drahtbündeln auch Eisen- und Stahlstäbe. In der That verhielten sich dieselben nicht durchaus den Drahtbündeln gleich.

Tabelle 6.

Eisenstab, Länge = 17 cm, Dicke = 0,6 cm, *PM* Max. = 534.

Reduction des *PM* Max. durch	Grösse des Verlustes	Vergröss. wirkt *W* =	Zahl der Einwirk.	*GM*	$\delta . PM$	*TM*
Stromunt.	243,4	150	1	486,2	37,8	448,4
			2	429,7	48,2	381,5
			3	407,3	52,2	355,1
			6	386,2	56,7	329,5
Contr. Strom	237,0	150	1	499,4	142,0	357,4
			2	490,0	146,0	344,0
			3	489,0	147,5	341,5
			6	482,0	150,0	332,0
Stromunt.	246,9	250	1	284,9	26,4	258,5
			2	240,2	33,2	207,0
			3	223,8	36,4	187,4
			6	208,9	35,7	173,2
Contr. Strom	244,0	250	1	294,5	106,5	188,0
			2	290,2	109,5	180,7
			3	290,2	110,5	179,7
			6	287,8	111,8	176,0
Erschütt.	255,2	250	1	274,3	88,5	185,8
			6	268,7	93,5	175,2
Stromunt.	249,4	400	1	175,1	19,4	155,7
			6	123,4	25,4	98,0
Contr. Strom	248,0	400	1	179,0	77,0	102,0
			6	179,0	79,0	100,0
Erschütt.	248,2	400	1	161,6	57,5	104,1
			6	159,7	59,7	100,0
Stromunt.	245,1	600	1	106,4	11,8	94,6
			2	85,4	14,8	70,6
			6	75,2	14,6	60,6
Contr. Strom	243,2	600	1	119,3	53,8	65,5
			2	119,1	55,1	64,0
			6	119,3	55,5	63,8
Erschütt.	243,5	600	1	104,0	38,8	65,2
			2	104,0	40,0	64,0
			6	103.8	40,2	63,6
Stromunt.	249,2	1000	1	67,7	9,2	58,5
			2	53,4	10,7	42,7
			6	46,7	10,9	35,8

Reduction des *PM* Max. durch	Grösse des Verlustes	Vergröss. wirkt $W =$	Zahl der Einwirk.	*GM*	$\delta . PM$	*TM*
Contr. Strom	250,8	1000	1	72,3	35,3	37,0
			2	72,5	36,2	36,3
			6	72.5	36,3	36,2
Erschütt.	247,6	1000	1	55,8	19,3	36,5
			2	56,0	20,0	36,0
			6	56,2	20,3	35,9

Auch bei dem Eisenstabe nimmt also *PM* am wenigsten zu, wenn es durch Stromunterbrechung reducirt worden war, aber es tritt jetzt auch noch ein Unterschied zwischen den $\delta . PM$ nach conträrem Strom und nach Erschütterung auf: es nimmt *PM* stärker zu, wenn der Verlust durch einen conträren Strom, als wenn er durch Erschütterung herbeigeführt war. Ebenso verhält sich *GM*: Es ist grösser nach conträrem Strom als nach Erschütterung und übertrifft dann auch das nach Stromunterbrechung inducirte *GM*. Dagegen sind die *TM* nach conträrem Strom und nach Erschütterung immer nahe einander gleich; bei den ersten Impulsen der Kraft sind sie viel kleiner, als nach Stromunterbrechung, schliesslich aber etwas grösser. Die Zunahme des *PM* durch wiederholte Wirkung der Kraft ist, wie bei den Drahtbündeln, relativ am bedeutendsten nach Stromunterbrechung.

Das hervorstechende Merkmal des durch Stromunterbrechung geschaffenen Zustandes ist also einmal die geringe Zunahmefähigkeit des reducirten *PM*, welche in Tabelle 6 nur den dritten bis vierten Theil derjenigen nach Wirkung eines conträren Stromes beträgt, und zweitens bei wiederholter Einwirkung der Kraft, die starke Abnahme von *TM*, welche durchschnittlich um 50 Proc. grösser ist, als wenn *PM* durch conträren Strom oder Erschütterung reducirt war.

Wir gelangen also zu dem Resultat, dass „bei Eisenstäben jeder der drei Zustände des permanenten Moments, die durch Stromunterbrechung, conträren Strom und Erschütterung geschaffen werden, von den anderen verschieden ist.“

Nun habe ich in der vorigen Abhandlung gezeigt, dass das *PM* Max. eines Eisenstabes nicht nur durch Stromunterbrechung, sondern auch schon durch *rasche* Vergrösserung eines eingeschalteten Flüssigkeitswiderstandes eine Abnahme

erleidet. Um mich zu überzeugen, dass hierdurch PM auch wesentlich in den gleichen Zustand gelangt, wie durch eine Unterbrechung des Stromes, stellte ich die folgenden Versuche an.

Tabelle 7.

Derselbe Eisenstab. PM Max. = 534.

Reduction des PM …h rasche Abnahme der Stromstärke						Reduction des PM durch Erschütterung					
…se	Vergr. wirkt $W=$	Zahl der Einw.	GM	$\delta.PM$	TM	Grösse des Verl.	Vergr. wirkt $W=$	Zahl der Einw.	GM	$\delta.PM$	TM
[illegible]	250	1	247,8	10,0	237,8	127,5	250	1	250,5	62,5	188,0
		2	214,0	11,0	203,0			2	248,0	64,5	183,5
		6	192,3	11,0	181,3			6	244,3	65,6	178,7

Diese Zahlen bestätigen die oben ausgesprochene Erwartung. Das Verhältniss der $\delta.PM$ nach Erschütterung und nach rascher Stromabnahme ist sogar hier besonders gross, es erreicht den Werth 6 und würde noch grösser ausgefallen sein, wenn der Verlust durch Erschütterung nicht 127,5, sondern ebenfalls 146,0 betragen hätte.

Die folgende Tabelle enthält Versuche mit einem Stahlstab von 15 cm Länge und 0,6 cm Dicke, PM Max. war = 752.

Tabelle 8.

…act. … M …ch	Grösse der Red.	Vergr. wirkt $W=$	Zahl der Einw.	GM	$\delta.PM$	TM	Reduct. d. PM durch	Grösse der Red.	Vergr. wirkt $W=$	Zahl der Impul.	$\delta.PM$
…unt.	132,0	100	1	98,6	4,5	94,1	Stromunt.	127,5	20	1	23,3
			2	96,0	4,8	91,2				2	23,0
			6	94,0	4,0	90,0				6	22,0
…ütt.	137,4	100	1	97,4	5,9	91,5	Erschütt.	130,0	20	1	37,9
			2	96,4	5,9	90,5				2	39,3
			6	96,0	5,4	90,6	„	112,1	20	1	33,6
…unt.	129,7	50	1	190,7	8,2	182,5				2	34,9
			2	182,7	7,2	175,5				6	36,1
			6	178,7	5,9	172,8	„	138,5	20	1	41,2
…ütt.	130,5	50	1	191,9	13,8	178,1				2	43,1
			2	191,0	14,5	176,5				6	44,0
			6	190,0	15,0	175,0	„	121,5	20	1	37,3
…unt.	129,0	30	1	310,7	14,0	296,7				2	38,5
			2	296,5	12,5	284,0				6	38,8
			6	291,1	11,1	280,0	Contr. Str.	127,9	20	1	43,5
…ütt.	144,5	30	1	315,1	25,6	289,5				6	43,6
			2	312,4	26,6	285,8	„	126,9	20	1	43,9
			6	310,4	27,1	283,3				2	45,6
										6	46,4

Aus diesen Beobachtungen folgt, dass ebenso wie bei dem Eisenstab, so auch bei dem Stahlstab, die grösste Zunahme des *PM* dann eintritt, wenn es durch einen conträren Strom, eine kleinere, wenn es durch Erschütterung, und die geringste, wenn es durch Stromunterbrechung reducirt war.

Die starke Abnahme, welche *GM* und *TM* mit Wiederholung der Kraftwirkung bei dem Eisenstab und dem Drahtbündel erfuhren, wenn *PM* durch Stromunterbrechung geschwächt worden war, zeigen die Beobachtungen mit dem Stahlstab ebenfalls. Ferner ist auch, wie bei dem Eisenstab, das *TM* des ersten Impulses grösser, das des sechsten aber kleiner, wenn *PM* durch Stromunterbrechung, als wenn es durch Erschütterung reducirt war.

Folgendes aber ist allein bei Stahlstäben beobachtet worden: Während ein durch Erschütterung oder conträren Strom reducirtes *PM* mit Wiederholung der Impulse fortwährend zunahm, zeigte das durch Stromunterbrechung reducirte *PM* meist schon vom zweiten Impulse der vergrössernden Kraft an wieder eine Abnahme. Die Erklärung dafür liegt (nach der 5. Abh.) darin, dass diese Kraft schon zu dem Gebiet derjenigen Kräfte gehörte, welche nach einer grösseren und in der gleichen Richtung wie diese wirkend, das von derselben erzeugte *PM* verringern. Diese verkleinernde Wirkung der Kraft überwiegt also dann über die Tendenz zur Zunahme.[1]

Bei den bisherigen Versuchen war die Schwächung des *PM* Max. durch nur eine conträre Kraft bewirkt worden. In Tabelle 9 wird *PM* entweder durch 7 aufeinander folgende conträre Kräfte oder durch eine einzige reducirt, und der resultirende Zustand geprüft durch Anwendung der *PM* wieder vergrössernden Kraft $W = 250$.

---

1) Bei einem Drahtbündel beobachtete ich, dass nach einem Verlust durch Stromunterbrechung sowohl als nach einem solchen durch conträren Strom eine folgende *kleine* Kraft überhaupt keine Zunahme, sondern vom ersten Impuls an eine beträchtliche Abnahme des *PM* hervorbrachte.

Tabelle 9.

Eisenstab. PM Max. = 530.

Reduction des PM Max. durch	Grösse des Verlustes	Zahl der Wirk. der PM vergröss. Kraft	GM	$\delta . PM$	TM
7 contr. Kräfte	250,5	1	295,3	107,3	188,0
		2	292,1	109,7	182,4
		6	288,9	112,1	176,8
1 contr. Kraft	245,0	1	295,5	107,5	188,0
		2	292,1	110,5	181,6
		6	290,3	112,7	177,6

Es ist also gleichgültig, ob man die Reduction in 7 Stufen oder auf einmal ausführt, der resultirende Zustand des PM ist in beiden Fällen derselbe.

Weitere Versuche stellte ich in der Weise an, dass ich eine Schwächung des PM Max. von etwa der Grösse wie in Tabelle 9 durch eine Reihe von abwechselnd entgegen- und gleichgerichteten Kräften ausführte, und zwar wählte ich die Kräfte entweder a) so, dass die schliesslich zu erreichende untere Grenze von PM niemals oder b) so, dass dieselbe zeitweise unterschritten wurde. In beiden Fällen aber schwächte die letzte der angewendeten Kräfte die Magnetisirung. Es folgte darauf die prüfende Kraft $W = 250$, welche die permanente Magnetisirung wieder vergrösserte.

Tabelle 10.

Eisenstab. PM Max. = 530.

Reduction des PM durch gleich- u. entgegenger. Kr.	Grösse des Verlustes	Zahl der Wirk. der PM vergröss. Kraft	GM	$\delta . PM$	TM
a	241,3	1	290,6	104,0	186,6
		2	288,0	106,9	181,1
		6	286,0	109,0	177,0
b	250,2	1	244,6	59,3	185,3
		2	243,6	61,2	182,4
		6	241,2	62,5	178,7

Während also die GW und $\delta . PM$ der Reihe a) nur wenig kleiner als die entsprechenden Werthe der Tabelle 9 sind, bleiben die der Reihe b) sehr beträchtlich hinter ihnen zurück. Nur die TM sind in allen vier Reihen der Tabellen 9 und 10 einander gleich.

„Der Zustand des permanenten Moments also, welcher durch eine Reihe von abwechselnd gerichteten Kräften erzeugt wird, unterscheidet sich nur dann von demjenigen, welchen eine einzige conträre Kraft C hervorbringt, wenn PM bei einer oder mehreren derselben unter denjenigen Werth herabsank, auf welchen es durch Kraft C gelangt.“

In Reihe b) wird also ein Zustand von PM erreicht, der bezüglich der kleinen Werthe von $\delta . PM$ Aehnlichkeit mit demjenigen hat, welcher durch eine Stromunterbrechung erzeugt wird. Dagegen unterscheidet er sich von dem letzteren ganz wesentlich in Bezug auf die GM und TM. Diese sind hier mit Wiederholung der Kraftwirkung nur wenig veränderlich, während sie nach Stromunterbrechung so sehr stark abnahmen.

§ 4. Ich theile nun einige von den Versuchen mit, welche ich mit entgegengerichteten Kräften ausführte. Es wurde also auch jetzt dem PM Max. ein Verlust entweder durch Stromunterbrechung oder durch einen conträren Strom oder durch Erschütterung zugefügt. Darauf liess man einen conträren Strom auf das reducirte PM wirken und bestimmte den in Folge desselben weiter eintretenden Verlust $\delta . PM$, sowie das ganze inducirte Moment GM.

Tabelle 11.

Drahtbündel in Paraffin. PM Max. = 900 bei den sechs ersten, dagegen PM Max. = 752, bei der letzten Beobachtungsreihe ($W = 300$). Auch geschah die Stromunterbrechung zuerst ausnahmsweise an Quecksilber, und nur bei der letzten Reihe an Platin.

...ction ...*PM* ...rch	Gr. der Red.	Dar. wirkt ebenf. schw. *W* =	*GM*	*δ.PM*	*TM*
...unt.	105,7	2000	25,6	19,8	5,8
...hütt.	99,2	2000	5,3	0,0	5,3
...Str.	106,3	2000	5,2	0,0	5,2
...unt.	99,8	1200	45,0	35,0	10,0
...hütt.	101,1	1200	9,0	0,2	8,8
...unt.	102,0	800	74,5	59,2	15,3
...hütt.	98,0	800	15,0	1,3	13,7
...unt.	104,5	500	123,0	97,5	25,5
...hütt.	108,1	500	46,9	24,6	22,3
...unt.	94,3	400	155,7	123,7	32,0
...hütt.	103,8	400	85,2	56,7	28,5
...unt.	98,7	300	210,3	167,0	43,3
...hütt.	110,7	300	139,3	99,8	39,5
	97,0	300	150,0	111,0	39,0
...Str.	106,5	300	138,8	100,0	38,8

Reduction des *PM* durch	Gr. der Red.	Dar. wirkt ebenf. schw. *W* =	Zahl der Wirk.	*GM*	*δ.PM*	*TM*
Stromunt.	105,8	300	1	178,9	142,2	36,7
			2	177,2	145,8	31,4
			4	179,0	147,8	31,2
Erschütt.	112,0	300	1	95,4	62,7	32,7
			2	97,7	66,5	31.2
			4	100,0	69,0	31,0
Contr. Str.	108,5	300	1	93,9	61,4	32,5
			2	96,8	65,7	31,1
			4	98,9	68,2	30,7

Tabelle 12.

Eisenstab der Tabelle 6. *PM* Max. = 535.

Reduction des *PM* durch	Grösse der Reduction	Darauf wirkt ebenf. schw. *W* =	Zahl der Wirk.	*GM*	*δ.PM*	*TM*
Stromunt.	250,5	500	1	207,8	77,5	130,3
			2	199,3	100,3	99,0
			6	195,0	114,5	80,5
Erschütt.	257,2	500	1	86,0	3,7	82,3
			2	85,9	4,0	81,9
			6	85,2	4,3	80,9
Contr. Strom	252,4	500	1	83,5	0,0	83,5
			2	82,0	0,2	81,8
			6	80,6	0,4	80,2
Stromunt.	253,8	350	1	303,2	108,7	194,5
			2	293,1	140,7	152,4
			6	287,7	162,2	125,5
Erschütt.	260,5	350	1	132,9	9,5	123,4
			2	134,3	10,5	123,8
			6	133,1	11,8	121,3
Contr. Strom	252,0	350	1	129,0	1,2	127,8
			2	128,0	1,3	126,7
			6	126,0	2,0	124,0

Tabelle 13.

Stahlstab der Tabelle 8. PM Max. = 752.

Reduction des PM durch	Grösse der Reduction	Darauf wirkt ebenf. schw. $W =$	Zahl der Wirk.	GM	$\delta.PM$	TM
Stromunt.	129,2	50	1	379,0	193,6	185,4
			2	376,2	199,8	176,4
			6	377,5	202,5	175,0
Erschütt.	131,0	50	1	342,3	158,6	183,7
			2	342,0	164,5	177,5
			6	—	166,5	—
Contr. Strom	128,0	50	1	334,0	151,5	182,5
			2	337,0	159,8	177,2
			6	—	163,8	—

Die Versuche beweisen, dass man auch mittelst eines das permanente Moment noch mehr schwächenden Stromes erkennen kann, ob eine Stromunterbrechung, eine Erschütterung oder ein conträrer Strom vorausgegangen war. Im letzten Falle ist die Wirkung des prüfenden conträren Stromes am kleinsten — wie bei der Gleichartigkeit der beiden aufeinander folgenden Processe nicht anders zu erwarten, — etwas grösser sind $\delta.PM$ und GM nach einer Erschütterung, aber nur bei Stahl- und namentlich bei Eisenstäben, während bei Drahtbündeln conträrer Strom und Erschütterung sich wieder gleich verhalten, und weitaus am grössten fällt die neue Schwächung $\delta.PM$ der permanenten Moments nach einer Stromunterbrechung aus. Dann ist auch GM am grössten und nimmt bei wiederholter Wirkung der Kraft vorwiegend ab. Die Grösse des verschwindenden Moments TM erfährt in jedem Falle bei folgenden Einwirkungen der Kraft eine Abnahme, die wieder besonders gross nach Stromunterbrechung und bei Eisenstäben ist.

Diese Beobachtungen mit einer Kraft, welche den Verlust an permanentem Moment noch vergrössert, führen also in der Hauptsache zu demselben Resultat, wie die in § 3 beschriebenen, bei welchen die prüfende Kraft einen Theil des Verlustes wieder aufhob.

„Sie beweisen sämmtlich, dass der Zustand des permanenten Moments, welcher aus einer Stromunterbrechung hervorgeht, durchaus verschieden ist von demjenigen, welcher Folge einer Erschütterung oder eines conträren Stromes oder einer Anzahl von verschieden gerichteten Strömen ist.“

§ 5. Bei allen bisher beschriebenen Versuchen wurde

die prüfende Kraft, sei es dass sie das PM wieder vergrösserte oder noch mehr schwächte, *plötzlich* von Null bis zu ihrem vollen Werthe gesteigert: man schloss den Strom erst dann, wenn der gewünschte Rheostatenwiderstand bereits eingeschaltet war, und der Eisenkörper sich in der Magnetisirungsspirale befand. Es schien nun denkbar, dass diese plötzliche Einwirkung der Kraft auf die Verschiedenheit der Momente nach Stromunterbrechung, Erschütterung oder conträrem Strom von Einfluss war, ja dass eine solche Verschiedenheit vielleicht gar nicht mehr auftreten würde, wenn man nur die prüfende Kraft *langsam* von Null bis zu ihrem vollen Werthe ansteigen liesse. Es geschah dies bei den folgenden Versuchen in der Weise, dass der Strom geschlossen wurde, während ausser dem gewünschten Rheostatenwiderstand noch ein grosser Flüssigkeitswiderstand eingeschaltet war, den man dann allmählich entfernte.

Tabelle 14.

Eisenstab 15 cm lang, 0,7 cm dick. PM Max. = 362 wurde geschwächt durch Stromunterbrechung um 161 oder durch einen conträren Strom um 157 oder durch Erschütterung um 152. Die prüfende Kraft war $W = 200$, vergrösserte wieder die bestehende Magnetisirung und wurde entweder langsam oder rasch zur vollen Wirkung gesteigert.[1])

Anzahl d. Wirk. d. prüf. Kraft	Schwächung des PM durch											
	Stromunterbrechung				conträren Strom				Erschütterung			
	Rasche W.		Langs. W.		Rasche W.		Langs. W.		Rasche W.		Langs. W.	
	GM	$\delta.PM$	GM	$\delta.PM$	GM	$\delta.PM$	GM	$\delta.PM$	GM	$\delta.PM$	GM	$\delta.PM$
1	262,4	17,6	249,9	14,8	264,3	55,9	254,4	51,0	239,6	34,2	233,6	34,9
2	237,4	21,4	226,7	18,1	262,2	56,5	253,6	52,5	236,6	34,6	233,8	36,5
3	229,1	22,6	221,0	18,5	261,5	57,0	253,5	53,0	236,1	34,8	233.8	37,0
4	225,6	23,1	219,5	18,9								
5	223,9	23,0	217,5	19,0								

Diese Versuche zeigen, dass eine Kraft, welche im Sinne der bestehenden Magnetisirung wirkt, in jedem Falle, sie mag rasch oder langsam zu ihrem vollen Werth ansteigen, verschiedene Momente inducirt und PM um verschiedene Beträge ändert, je nachdem PM durch Stromunterbrechung, Erschütterung oder einen conträren Strom reducirt worden war. Die Ge-

1) Die Zurückführung der Kraft auf Null geschah dagegen nur langsam.

schwindigkeit der Wirkung ist auch auf die Reihenfolge der GM und der $\delta . PM$ ohne Einfluss: immer wird das grösste GM nach einem conträren Strom und das kleinste nach einer Erschütterung inducirt, immer findet sich die grösste Zunahme des PM nach einem conträren Strom und die kleinste nach einer Stromunterbrechung. Dagegen ist, wie bereits in der 3. Abhandlung beschrieben, das GM wie das $TM = GM - PM$ grösser bei raschem als bei langsamen Ansteigen der Kraft und die Versuche zeigen weiter, dass entsprechend dem grösseren GM dann auch $\delta . PM$ grösser ausfällt.

§ 6. Die Versuche haben also zu folgenden Hauptresultaten geführt:

1. Der Zustand, in welchem sich das permanente Moment eines Eisenkörpers nach raschem Abfall der magnetisirenden Kraft auf Null (Stromunterbrechung) befindet, unterscheidet sich wesentlich von denjenigen beiden Zuständen, in welche es durch eine in conträrer Richtung wirkende Kraft oder durch Erschütterungen gelangt.

2. Die letzteren beiden Zustände sind im Allgemeinen ebenfalls von einander verschieden, nur bei Bündeln dünner Eisendrähte sind sie identisch.

3. Die Verschiedenheit der drei Zustände ergibt sich sowohl aus den ungleichen temporären Momenten, welche eine Kraft inducirt, als auch aus den ungleichen Aenderungen des permanenten Moments, welche eine Kraft hervorbringt, sie mag in der Richtung der vorherigen Magnetisirung oder in der entgegengesetzten wirken.

4. Sucht die Kraft das frühere PM wieder herzustellen, so inducirt sie bei Drahtbündeln nach einer Stromunterbrechung zwar das grösste Moment, bringt aber die kleinste Zunahme des permanenten Moments hervor. Bei Eisenstäben dagegen ist sowohl das inducirte als auch die Zunahme des permanenten Moments am grössten, wenn eine Schwächung des PM durch eine conträre Kraft stattgefunden hatte; etwas kleiner ist das inducirte Moment nach einer Stromunterbrechung und am kleinsten nach Erschütterungen. Die Zunahme des permanenten Moments ist dagegen bei Stäben am geringsten nach einer Stromunterbrechung.

5. Wirkt die Kraft dagegen in der der ursprünglichen

Magnetisirung entgegengesetzten Richtung, so ist das inducirte Moment und die Abnahme des permanenten am grössten nach Stromunterbrechung und im allgemeinen am kleinsten nach Wirkung eines conträren Stroms.

6. Die auszeichnenden Merkmale des magnetischen Zustandes, welcher aus einer Stromunterbrechung hervorgegangen ist, sind einmal die kleine Zunahme, welche *PM* durch eine gleichgerichtete Kraft, und die grosse Abnahme, welche es in Folge einer entgegengerichteten Kraft erfährt, und zweitens das anfänglich grosse verschwindende Moment, welches nur durch Wiederholung der Kraftwirkung den normalen Werth erreicht.

7. Durch den zweiten Punct unterscheidet sich dieser Zustand auch wesentlich von demjenigen, welcher aus der Wirkung einer Reihe von abwechselnd gleich- und entgegengerichteten Kräften entsteht, obwohl dieser ebenfalls unter Umständen ein grösseres Maass von Stabilität gegenüber den *PM* erhöhenden Kräften besitzt.

8. Die beiden in 6) genannten Merkmale zeigt auch derjenige Zustand des permanenten Magnetismus, welcher durch rasche aber immer noch continuirliche Einschaltung von Flüssigkeitswiderständen in den Stromkreis entsteht (cf. die 6. Abh.)

9. Die Kraft, welche das durch Stromunterbrechung, conträren Strom oder Erschütterung reducirte *PM* wieder erhöht, kann man langsam oder rasch von Null bis zu ihrer vollen Stärke anwachsen lassen; die beschriebenen Unterschiede der drei Zustände des *PM* ergeben sich in beiden Fällen.

10. Wenn zu dem durch Stromunterbrechung bewirkten Verlust an *PM* noch ein weiterer durch einen conträren Strom oder durch Erschütterung hinzutritt, so verschwindet in dem neuen Zustand des *PM* der Einfluss der Stromunterbrechung um so vollständiger, je stärker der conträre Strom oder die Erschütterung waren.

11. Je grösser der dem *PM* durch Erschütterungen oder conträren Strom zugefügte Verlust ist, desto grösser ist auch die Zunahme, welche eine folgende, *PM* wieder hebende Kraft hervorbringt. Wenn dagegen der Verlust durch Stromunterbrechung entstanden ist, so kann dem grösseren Verlust die kleinere Zunahme entsprechen.

§ 7. Die vorstehend geschilderten Resultate besitzen un-

zweifelhaft grossen Werth für die Erkenntniss der molecularen Vorgänge in den magnetisirbaren Körpern. Ich will im Folgenden versuchen zu bestimmen, wodurch der aus rascher Abnahme der magnetisirenden Kraft hervorgegangene Zustand des permanenten Moments molecularmagnetisch von anderen Zuständen sich unterscheidet.

Die Bezeichnung „Zustand" habe ich in der 5. Abhandlung eingeführt als Ausdruck dafür, dass ein gleich grosses permanentes Moment durch die gleiche magnetisirende Kraft um ganz verschiedene Grössen geändert werden kann, sowohl temporär als permanent. Man sieht schon aus dem im Eingang des § 1 angezogenen Falle, dass ein permanentes Moment bei gleicher Grösse in einer sehr grossen Menge von Zuständen existiren kann; im Besonderen ging dies auch aus den Versuchen der 5. Abhandlung hervor. In dieser wurde nun als innerer Grund dieser Verschiedenheit eine wechselnde Gruppirung der Molecularmagnete bezeichnet, welche man sich unendlich verschieden denken kann, auch ohne dass die *Grösse* des permanenten Moments sich ändert. Lässt man magnetisirende Kräfte in aufsteigender Reihe wirken, so drehen sich die Molecularmagnete permanent mehr und mehr der Richtung der magnetisirenden Kraft zu. Aber nebenher geht noch eine Aenderung in der gegenseitigen Lage der Molecularmagnete, derart dass einer jeden Kraft auch eine besondere Gruppirung derselben entspricht, und es gilt das auch noch für diejenigen grossen Kräfte, welche keine Zunahme des permanenten Moments mehr hervorbringen. Sie bewirken wenigstens noch eine Umstellung der Gruppen, wie daraus hervorgeht, dass (5. Abhandlung) eine kleinere Kraft das maximale *PM* um verschiedene Beträge ändert je nach der Kraft, durch welche es erzeugt war.

Beginnen wir mit der Betrachtung derjenigen Kräfte, welche das geschwächte *PM* noch mehr zu verkleinern streben (§ 4). Ihre Wirkung ist am kleinsten, wenn der erste Verlust ebenfalls Folge eines conträren Stromes war, und er ist besonders klein dann, wenn der zweite Strom dem ersten an Grösse bedeutend nachsteht (Tab. 12). Das ist unschwer zu erklären. Denn die erste conträre Kraft ändert gewisse Gruppen von Molecularmagneten, während in anderen die Drehung der Magnete keine permanente Umgestaltung der Gruppen

nach sich zieht. Wirkt nun eine zweite, aber kleinere conträre Kraft, so bleiben die letzteren Gruppen auch jetzt permanent ungeändert, und in den ersteren sind die Drehungen der Molecularmagnete desshalb grösstentheils nur temporär, weil diese Gruppen von der vorhergegangenen *grösseren* Kraft gebildet waren.

Grösser fällt die Wirkung der zweiten conträren Kraft schon aus, wenn sie, wie in Tab. 13, die erste übertrifft, und das ist nach dem eben Gesagten sehr erklärlich. Aber immer bleibt ihre Wirkung auf *PM* bedeutend hinter derjenigen zurück, welche sie nach vorhergegangener Schwächung des *PM* durch Stromunterbrechung ausübt. Stromunterbrechung gruppirt offenbar die Molecularmagnete in einer Weise, welche total verschieden ist von der durch conträren Strom erzeugten, und ebenso wie die plötzliche Stromunterbrechung wirkt rasche continuirliche Vergrösserung eines in den Stromkreis eingeschalteten Flüssigkeitswiderstands. Hierbei schwingen ebenfalls die Molecularmagnete mit einer gewissen Geschwindigkeit zurück und haben bei der lebhaften Bewegung Gelegenheit, sich zu anderen Gruppen zusammenzuschliessen. Hält man dann mit der raschen Einschaltung von Widerstand ein und fügt weiteren Widerstand nur langsam hinzu, so entsprechen die nun noch vorhandenen temporären Drehungen der Molecularmagnete schon anderen Ruhelagen.

Ich bin der Ansicht, dass gerade bei der raschen Abnahme der Stromstärke, sei es durch Unterbrechung des Kreises oder nur durch rasche Einschaltung von Widerstand, die Gruppirung der Molecularmagnete infolge der lebhaften Bewegung, in welche sie dabei gerathen, eine durchgreifende Aenderung erfährt, während ein conträrer Strom zwar ebenfalls die Gruppirung ändert, aber doch vorzugsweise nur die Molecularmagnete in den bestehen bleibenden Gruppen zurückdreht. Es ist dies aus der enormen Abnahme des verschwindenden Moments zu schliessen, welche ausschliesslich nach einer Stromunterbrechung bei wiederholter Wirkung der Kraft beobachtet wurde, und welche nicht anders zu erklären ist, als durch eine Wiederumlagerung der Gruppen.

Die Aenderung, welche das durch Erschütterungen geschwächte *PM* durch eine folgende, sei es *PM* wieder vergrössernde, sei es noch mehr verkleinernde Kraft erfährt, steht bei Stäben zwischen den Aenderungen, welche nach Wir-

kung einer Stromunterbrechung und eines conträren Stroms beobachtet werden, während freilich bei Drahtbündeln die durch Erschütterung und conträren Strom erhaltenen Zustände des *PM* merklich einander gleich waren. In der That wird man sich vorstellen können, dass durch Erschütterungen des Stabes die Molecularmagnete in eine ähnlich lebhafte Bewegung wie durch eine Stromunterbrechung gerathen, und dass infolgedessen eine theilweise Umformung der Gruppen eintritt. Bei Stäben würde dann die Stabilität der Gruppen gegenüber Erschütterungen geringer als bei Drahtbündeln sein müssen. Doch muss die Umformung eine erheblich weniger durchgreitende als durch Stromunterbrechung sein, wie einestheils aus dem Verhalten der Drahtbündel, anderentheils daraus hervorgeht, dass nach einem Verlust durch Erschütterung die Abnahme der temporären Momente bei wiederholter Wirkung der Kraft nur gering ist.

Eine grössere Kraft *P* erzeuge ein gewisses *PM*, dasselbe werde dann auf irgend eine Weise auf einen kleineren Werth *pm* reducirt, und nun lasse man eine kleinere Kraft *p* in der Richtung der früheren wirken. *pm* nimmt dann im Allgemeinen wieder zu [1]) und zwar um einen desto grösseren Betrag, je grösser *PM* gewesen war, je grössere Kräfte also vorher schon gewirkt hatten. Wenn wir nun beobachten, dass die Zunahme des permanenten Moments am geringsten ist, wenn es vorher durch Stromunterbrechung reducirt war, so verhält es sich also gerade so, wie wenn der Körper dann vorher weniger grossen Kräften unterworfen gewesen wäre, mit anderen Worten, durch Stromunterbrechung hat sich die Gruppirung der Molecularmagnete derjenigen des unmagnetischen Zustandes mehr genähert als durch Erschütterung oder gar durch conträren Strom. Das ändert sich wieder, sobald wir nach der Stromunterbrechung den Körper erschüttern oder der Wirkung eines conträren Stromes unterwerfen. Die Gruppirung wird mit der neuen Schwächung des permanenten Momentes nochmals eine andere, indem sie sich derjenigen annähert, welche allein durch Erschütterung oder conträren Strom erzeugt wird.

Giessen, Math.-Phys. Inst. Februar 1892.

1) Dass *pm* auch abnehmen kann ist im § 3 gezeigt worden.

Jahrg. 11. Nr. 2.

Verhandlungen
der
Physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

Sitzung vom 26. Februar 1892.

Vorsitzender: Hr. A. Kundt.

Hr. **F. Neesen** trägt vor

über Messung von Verdampfungswärmen.

Hr. **M. Thiesen** spricht dann:

1. Ueber vollkommene Diopter.

Im Anschlusse an den in einer früheren Veröffentlichung [1]) eingeführten Sprachgebrauch wird als *vollkommenes Diopter* eine Reihe von durchsichtigen Medien bezeichnet, durch welche eine scharfe dioptrische Abbildung einer Fläche, welche in einem isotropen homogenen Medium liegt, auf einer anderen conjugirt genannten Fläche bewirkt wird, wenn diese einer gleichen Bedingung genügt. Der Vortragende beschränkt sich auf die Behandlung des speciellen Falles, in welchem die conjugirten Flächen Ebenen sind und eine geometrisch ähnliche Abbildung dieser Ebenen aufeinander stattfindet; der allgemeine Fall bietet indessen keinerlei Schwierigkeit.

Die Wirkung eines Diopters ist vollständig durch die Zeit bestimmt, in welcher das Licht von einem beliebigen Punkte der einen zu einem Punkte der anderen Grenzfläche des Diopters gelangt. Diese als Charakteristik des Diopters bezeichnete Grösse ist im allgemeinen eine Function von vier Variabeln, welche die Lage der Punkte in den beiden Flächen bestimmen. Für ein vollkommenes Diopter, dessen Grenzen überdies mit den conjugirten Flächen zusammenfallen, entartet aber die Charakteristik. Da jedem Punkte der einen Fläche nur ein bestimmter Punkt der conjugirten Fläche entspricht, so bestehen zwei Bedingungsgleichungen zwischen den vier Variabeln, welche die beiden Punkte bestimmen, die Charakteristik reducirt sich auf eine Function von zwei Variabeln und

---

1) M. Thiesen, Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1890. p. 799.

zur vollständigen Bestimmung des Diopters müssen noch die Bedingungsgleichungen hinzugefügt werden, welche die Abbildung der conjugirten Flächen aufeinander kennzeichnen.

Wendet man diese Betrachtungen auf den speciellen Fall an, bezeichnet man die beiden conjugirten Ebenen mit (1), (2) und die Charakteristik des durch diese Ebenen begrenzten Diopters mit T_{12} und nennt man γ das constante Verhältniss zwischen zwei in den Ebenen (1) und (2) einander entsprechenden Strecken, so ist bei passender Wahl von rechtwinkligen Coordinatensystemen in den beiden Ebenen die Wirkung des Diopters vollständig bestimmt durch:

$$T_{12} = F(x_1, y_1); \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_2 = \gamma x_1; \\ y_2 = \gamma y_1. \end{cases} \tag{2}$$

Da die Function F völlig unbestimmt bleibt, so ist die Zahl der Diopter, welche die verlangte Eigenschaft haben, eine unendlich grosse.

Wählt man als Grenzflächen des Diopters zwei neue bezüglich zu (1) und (2) parallele und mit diesen in demselben homogenen isotropen Medium gelegene Ebenen (0) und (3), so werden zunächst die Charakteristiken der hinzutretenden Stücke bei leicht verständlichen Bezeichnungen:

$$T_{01} = n_{01} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + e_{10}^2},$$
$$T_{23} = n_{23} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + e_{32}^2};$$

und demnach durch Addition

$$T_{03} = F(x_1, y_1) + n_{01} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + e_{10}^2} + n_{23} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + e_{32}^2}. \tag{3}$$

In diesem letzteren Ausdrucke sind noch die Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 durch x_0, y_0, x_1, y_1 zu ersetzen. Zunächst kann man x_2 und y_2 durch die Gleichungen (2) eliminiren, sodann aber den Grundsatz anwenden, dass das Licht stets auf einem solchen Wege von einem Punkte zu einem anderen gelangt, dass eine kleine Aenderung dieses Weges keine Aenderung der Zeitdauer bedingen würde. Es muss also T_{03} bei einer kleinen Verschiebung des Punktes $(x_1 y_1)$ ungeändert bleiben und man erhält

$$\begin{cases} o = \frac{\partial F}{\partial x_1} + n_{01} \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0) + e_{10}^2}} - \gamma\, n_{23} \frac{x_3 - x_2}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + e_{32}^2}}; \\ o = \frac{\partial F}{\partial y_1} + n_{01} \frac{y_1 - y_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + e_{10}^2}} - \gamma\, n_{23} \frac{y_3 - y_2}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + e_{32}^2}}. \end{cases}$$

Der Ausdruck (3), in welchem die Grössen x_1, y_1, x_2, y_2 durch die Gleichungen (2) und (4) eliminirt sind, entspricht der allgemeinsten Form der Charakteristik des speciellen Diopters bezogen auf zwei den conjugirten parallele Ebenen.

Die hingeschriebenen Gleichungen erlauben nun auch leicht, die allgemeinsten Eigenschaften des betrachteten Diopters abzuleiten. Die Gleichungen (4) sagen aus, dass zwischen den Cosinus der Winkel, welchen die in einem Punkte der einen conjugirten Ebene mit einer in dieser Ebene liegenden Richtung bilden und den entsprechenden Cosinus des austretenden Strahlenbüschels eine lineare Beziehung besteht. Die specielle Wahl von F bestimmt beispielsweise das austretende Strahlenbüschel, welches einem parallelstrahlig in das Diopter eintretenden entspricht; ist dies Strahlenbüschel gegeben, so lässt sich leicht zu jedem eintretenden Strahle der austretende construiren.

Aehnliche Sätze über den Strahlengang durch ein vollkommenes Diopter, die aber doch noch nicht ganz ausreichend sind, um den Strahlengang vollständig zu bestimmen, sind schon früher veröffentlicht worden. Ein von Clausius [1]) herrührender Satz ergibt sich durch Differentiation der Gleichungen (4) bei constant bleibenden x_1, y_1, x_2, y_2; das noch speciellere von Abbe [2]) und v. Helmholtz [3]) aufgestellte sogenannte Sinusgesetz gilt nur, falls $\partial F/\partial x_1$ und $\partial F/\partial y_1$ gleich Null gesetzt werden können, d. h. falls einem senkrecht einfallenden ein senkrecht austretender Strahl entspricht.

2. Ueber die Construction von Dioptern mit gegebenen Eigenschaften.

Die Eigenschaften eines Diopters werden durch seine Charakteristik bestimmt; man kann daher von vornherein die Forderung stellen: diejenige Reihe von durchsichtigen Medien anzugeben, deren Gesammtheit eine gegebene Charakteristik zukommt.

1) R. Clausius, Pogg. Ann. **121.** p. 1. 1864.
2) E. Abbe, Archiv für mikroskopische Anatomie. 1874.
3) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. Jubelband. p. 566. 1874.

Ob diese Forderung sich allgemein erfüllen lässt, ist streitig; der Vortragende glaubt es, aber ohne einen strikten Beweis dafür zu haben; andererseits hat Hr. Abbe die Behauptung aufgestellt[1]), dass die Construction vollkommener Diopter im Sinne des vorangehenden Vortrages unmöglich sei, während sich doch die Charakteristik solcher Diopter angeben lässt. Die früher veröffentlichte Angabe, Hr. Abbe habe einen angeblichen Beweis dieser Behauptung gegeben, beruhte dagegen auf einem Irrthum des Vortragenden.

Jedenfalls muss zur Entscheidung der Frage die Natur der Medien, aus denen das Diopter zu bilden ist, weiter beschränkt werden. Lässt man Medien zu, in denen die Lichtgeschwindigkeit beliebig von der Richtung abhängt, so lässt sich ohne weiteres ein Medium, und zwar ein homogenes, angeben, welchem zwischen bestimmten Grenzen eine gegebene Charakteristik zukommt. Lässt man dagegen nur isotrope Medien zu, die aber continuirlich ineinander übergehen dürfen, so lässt sich die Aufgabe in folgende Fassung bringen:

Es ist eine Function der Variablen x, y, z, x_0, y_0 zu suchen, der Art, dass *erstens*

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 = n^2$$

von x_0 und y_0 unabhängig ist;

zweitens, wenn z gleich einer gegebenen Function von x und y gesetzt wird, welche die Vorderfläche des Diopters bestimmt, T für $x = x_0$, $y = y_0$ verschwindet;

drittens, wenn z gleich einer anderen gegebenen Function von x und y gesetzt wird, welche die Hinterfläche des Diopters bestimmt, T gleich der als Function von x, y, x_0, y_0 gegebenen Charakteristik wird.

Ist diese Aufgabe gelöst, so sind die Brechungsexponenten der gesuchten Medien mit n proportional.

Der Vortragende glaubt, dass die Lösung der Aufgabe immer, und zwar bei Zulassung discontinuirlicher Lösungen auf unendlich verschiedene Art möglich sein muss.

Vereinfachungen ergeben sich, falls man sich auf Systeme beschränkt, welche eine Axe haben.

4) E. Abbe, Carl's Repertorium. **16.** p. 306.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Fig. 2.

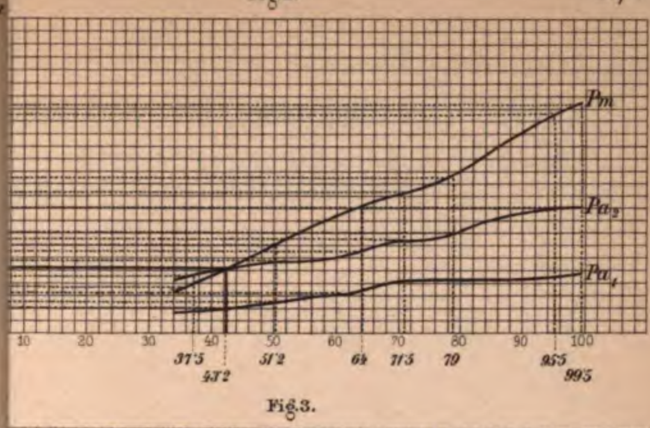


Fig. 3.

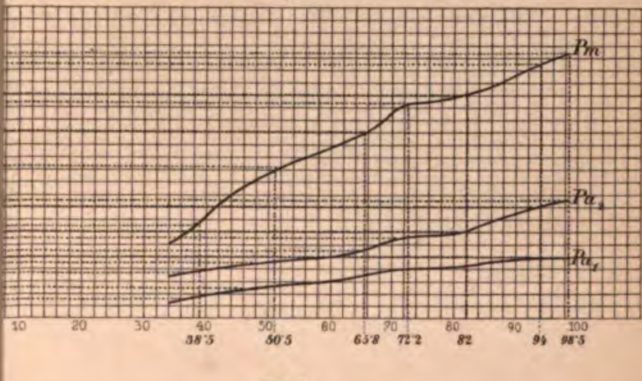
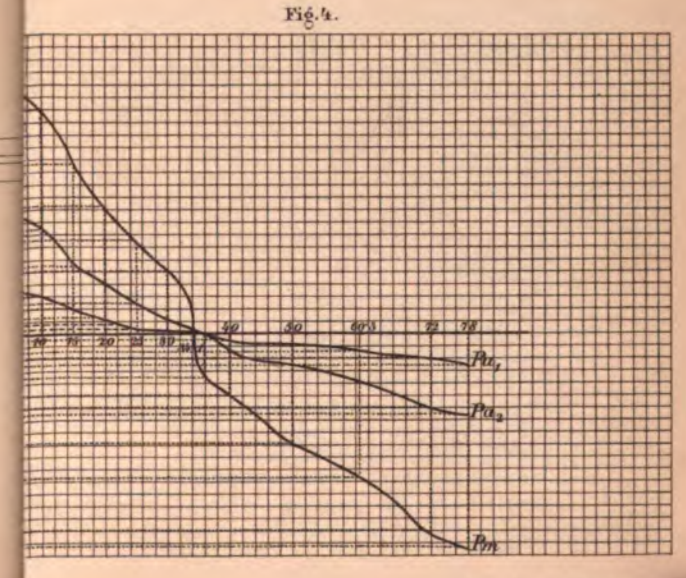


Fig. 4.



Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig


THE ASTOR LIBRARY
NY

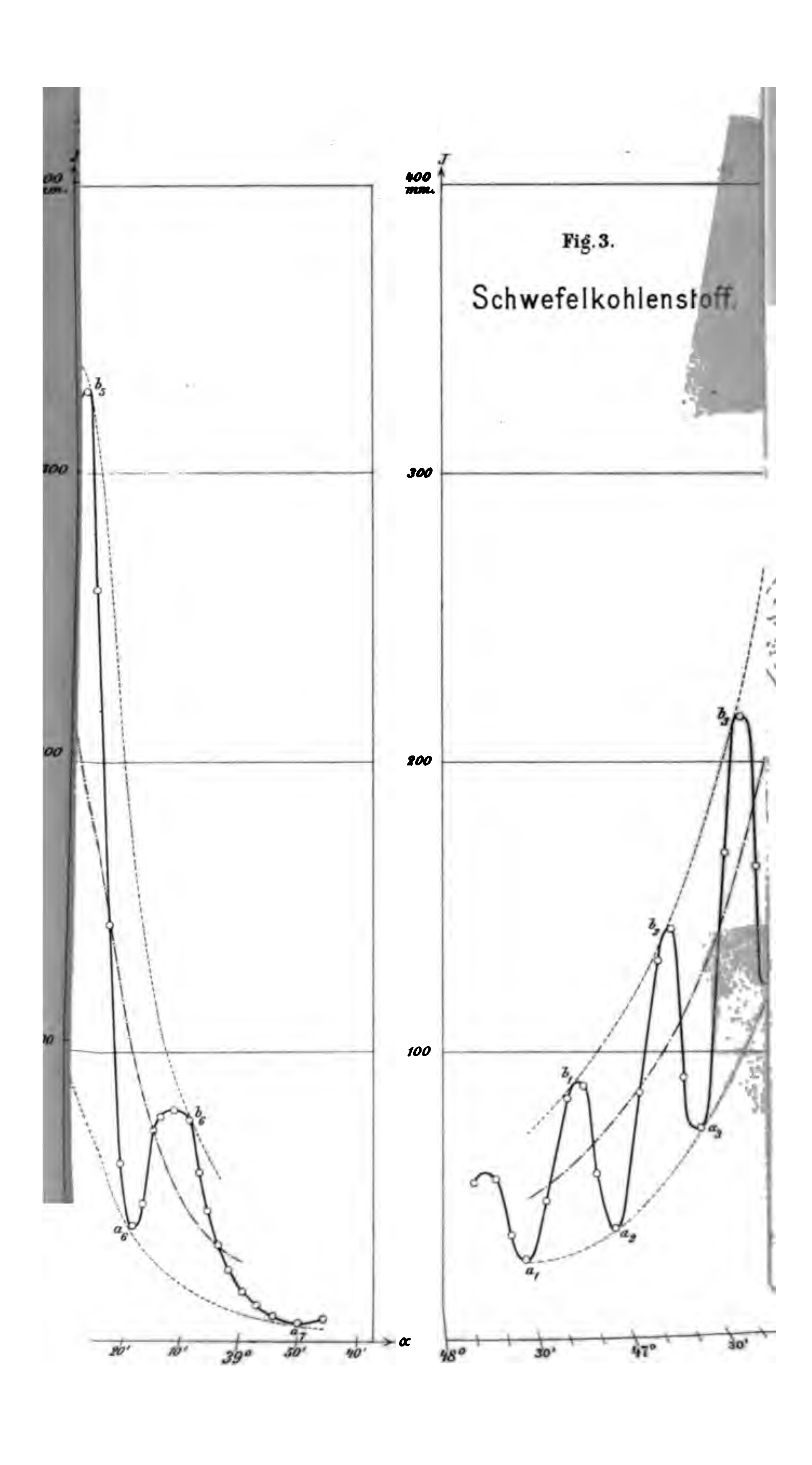
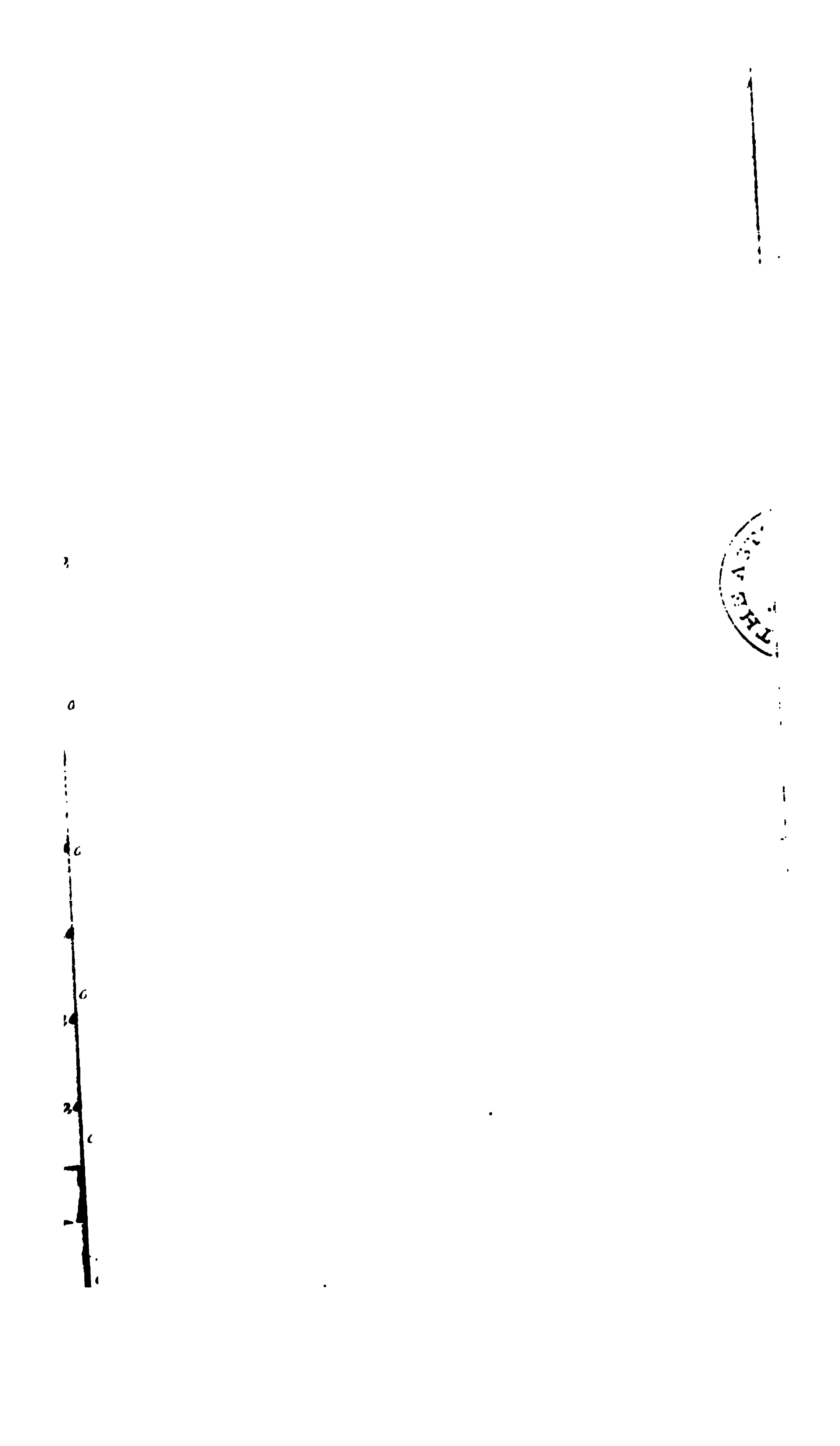


Fig. 3.
Schwefelkohlenstoff.
J
400
mm.
300
200
100
α
20'
10'
39°
50'
40'
48°
30'
47°
30'
b_5
b_6
a_6
a_7
b_1
b_2
b_3
a_1
a_2
a_3





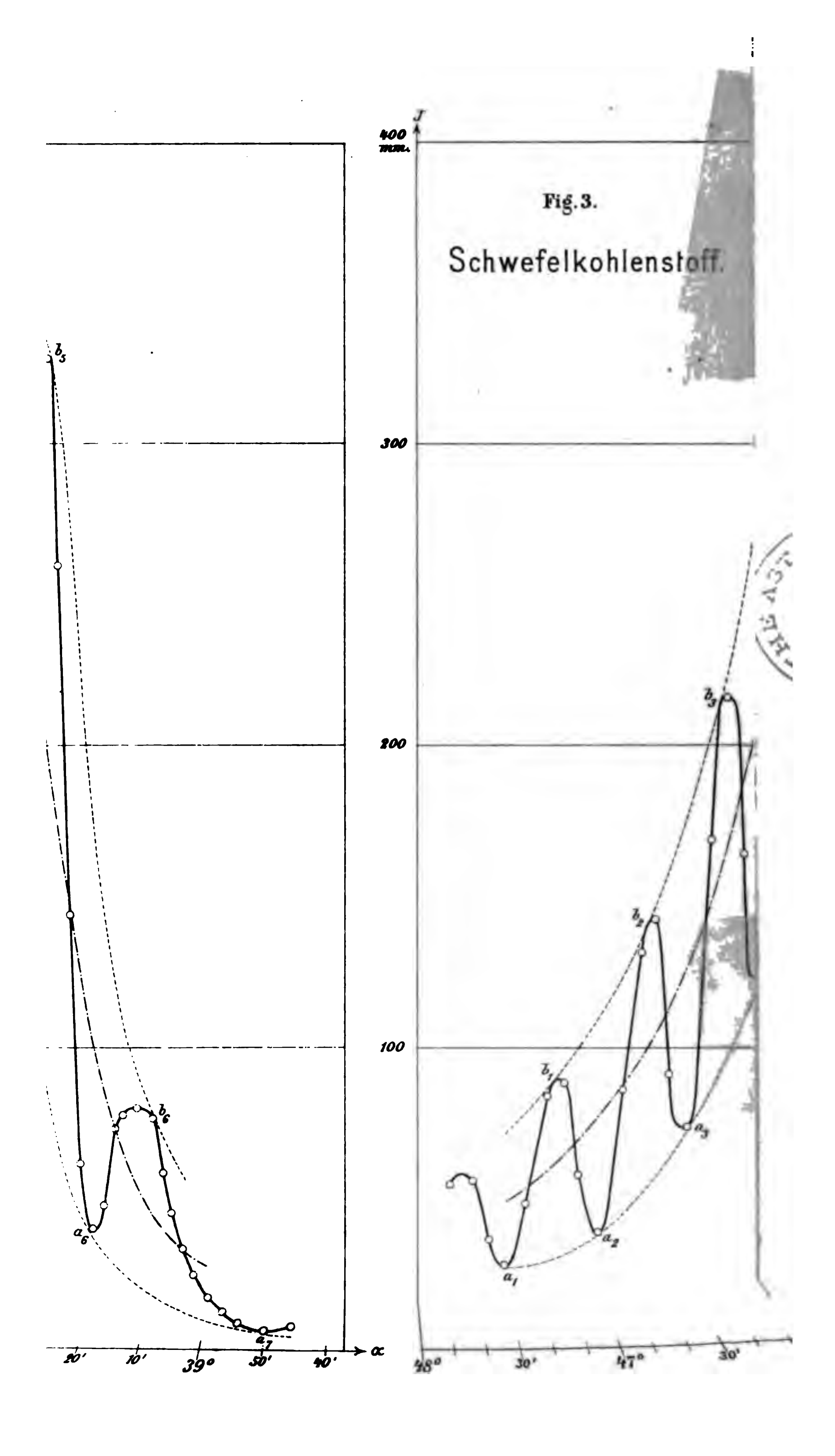


Fig. 3.
Schwefelkohlenstoff.
J
400 mm.
300
200
100
b_5
b_6
a_6
a_7
b_1
b_2
b_3
a_1
a_2
a_3
20'
10'
39°
50'
40'
α
48°
30'
47°
30'

X

L_2 S

A_1

Fig. 9.

A

K_1

K_2

Fig. 10.

B_1 D

C_1 C

A E

B D_1

C_2

g. 8 b.

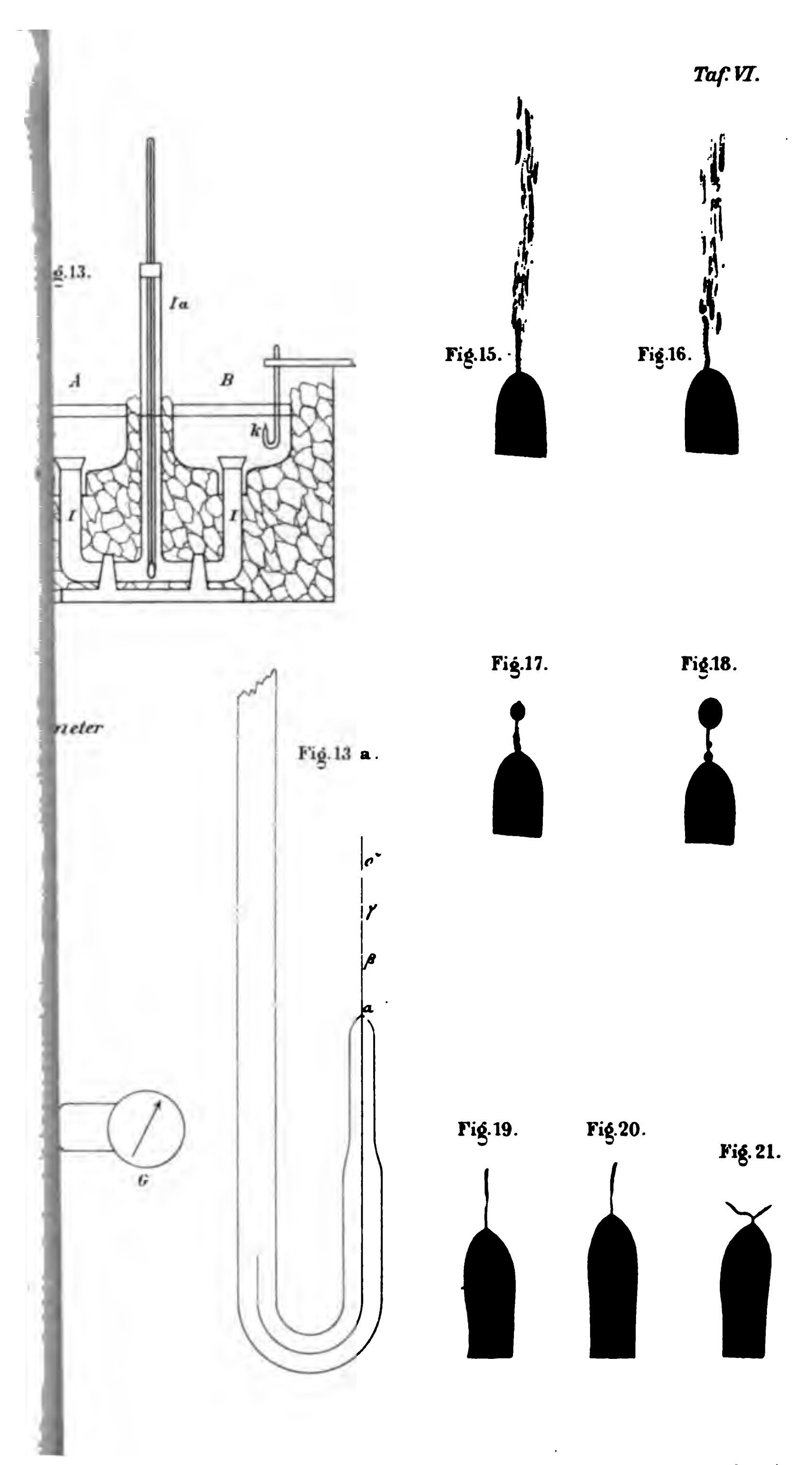
Fig. 8 e.

Fig. 8 c.

Fig. 8 d.

Lith. Anst. v. C. Kirst, Leip


LIBRARY
NY



Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig





Fig. 9.

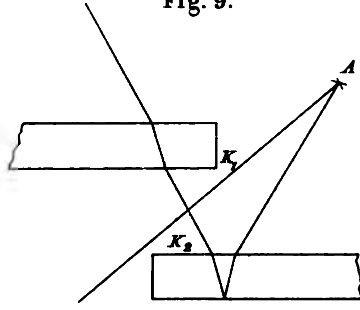
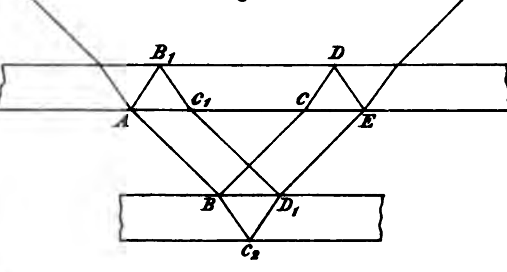


Fig. 10.



g.8 b.

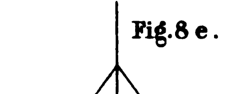


Fig. 8 e.

Fig. 8 c.

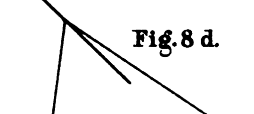
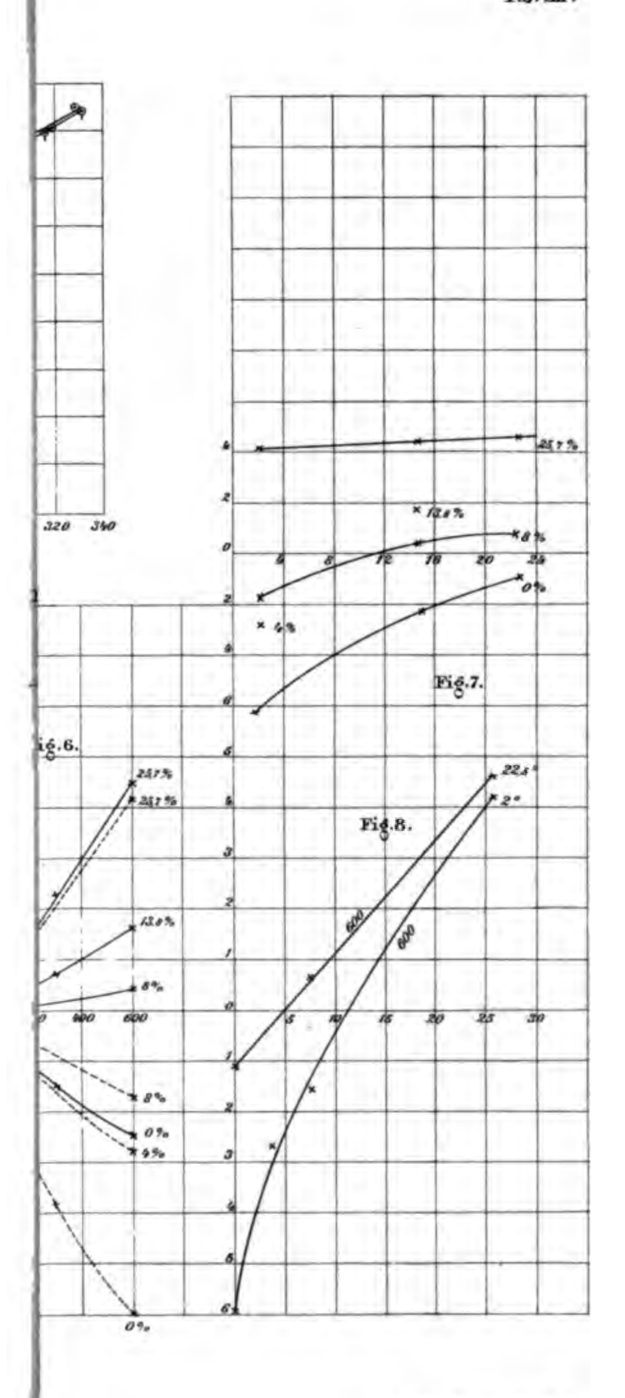


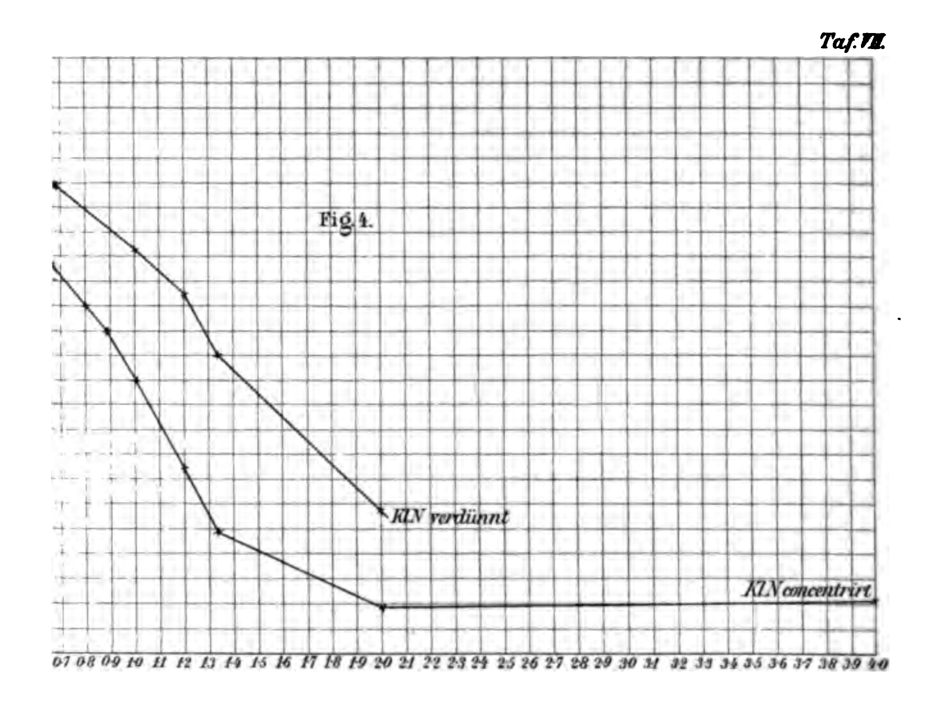
Fig. 8 d.

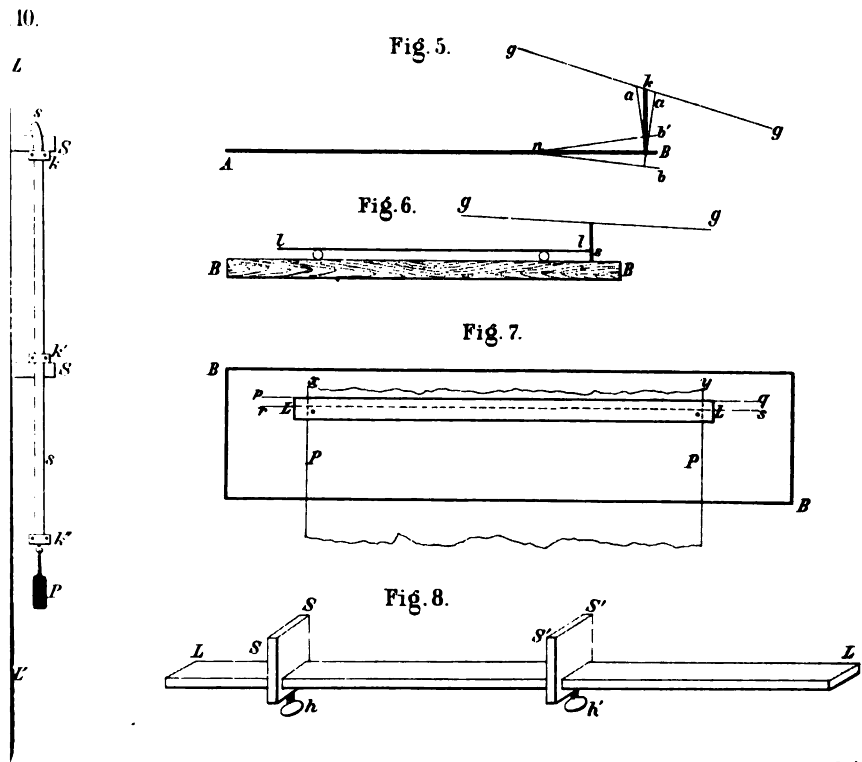
Lith. Anst. v C. Kr





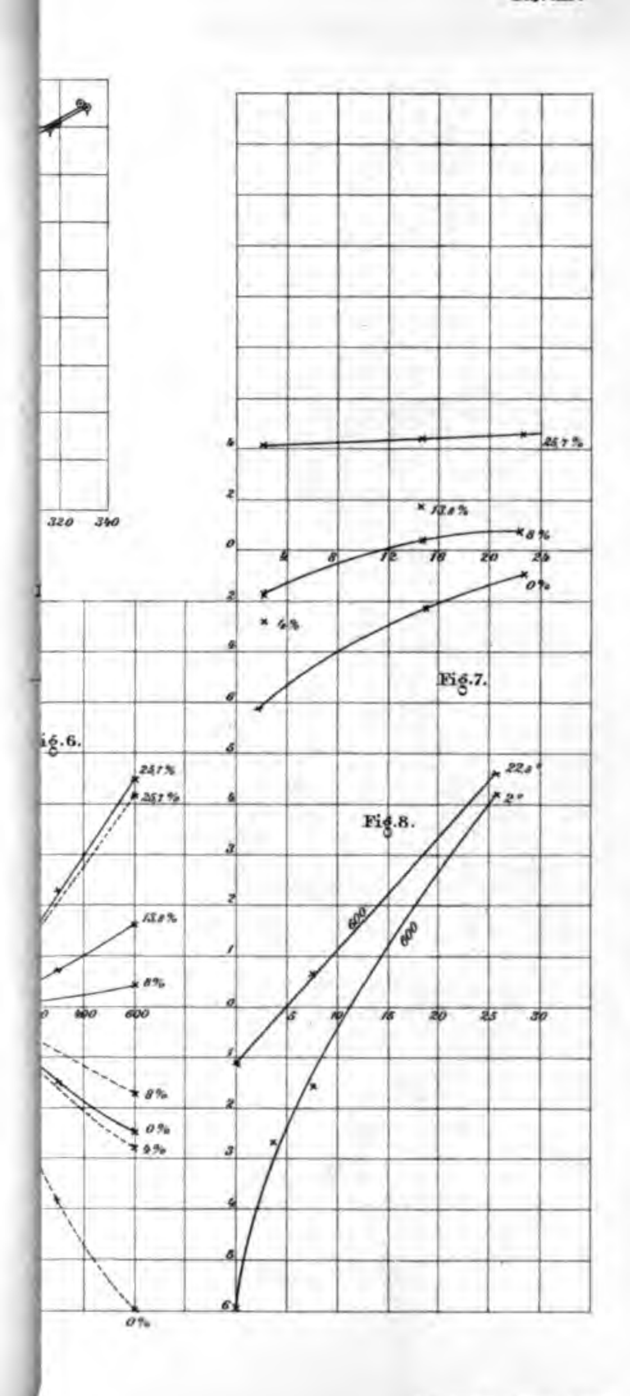
Lith. Anst. v. C. Ernst, Leipzig.





Lith. Anst. v. C. Kirst, Lei[pzig]





Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig.